VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

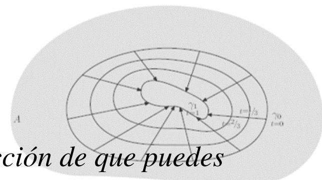
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 3. Integración Compleja

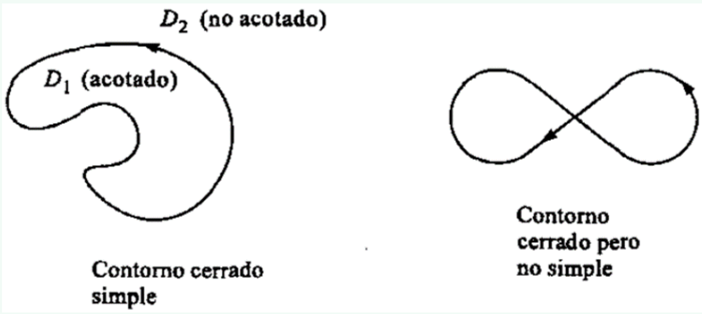
1.1 Lema de Goursat

Cada curva admite 2 orientaciones. Decimos que una curva simple está orientada positivamente si su orientación es contaria a la de las manecillas del reloj.

Orientación positiva   Orientacion negativa

Definición 1.1 (Contorno cerrado)

Un contorno cerrado simple es un contorno que genera dos dominios: uno acotado y otro no acotado; ambos dominios tienen al contorno como frontera. Decimos que el dominio acotado es el interior del contorno



♣

Indicaremos la integración alrededor de un contorno cerrado simple en la dirección positiva por medio del operador $\ointctrclockwise$ y la integración en la dirección negativa mediante $\ointclockwise$. Observamos que

$$\ointctrclockwise f(z)dz = -\ointclockwise f(z)dz$$
$$\ointctrclockwise f(x,y)dx = -\ointclockwise f(x,y)dx$$
$$\ointctrclockwise f(x,y)dy = -\ointclockwise f(x,y)dy$$

Comentario El teorema de Cauchy establece condiciones para que $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ a lo largo de cualquier curva cerrada contenida en el dominio de f. Las condiciones pueden establecerse sobre la curva o sobre la región U.

El siguiente teorema, conocido como **Teorema de Green** en el plano, es de suma importancia y se aplica a funciones reales. sin embargo, nos será de utilidad al integrar funciones complejas analíticas alrededor de contornos cerrados.

Teorema 1.1 (Teorema de Green en el plano)

Sean $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ dos funciones reales y sus primeras derivadas parciales continuas en una región R definida por el interior de un contorno cerrado simple C más los puntos de C. Entonces

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

♡

Asi pues, el teorema de Green nos permite transformar una integral de línea alrededor de C en una integral doble extendida a la región limitada por C.

Teorema 1.2

Sean $f : A \to \mathbb{C}$ una función C^1 en un abierto $A \subset \mathbb{C}$ y R un rectángulo cerrado contenido en A. Entonces

$$\oint_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

♡

Demostración Si $f = u + iv$ y $dz = dx + idy$,

$$\oint_{\partial R} f(z)dz = \oint_{\partial R} (u\,dx - v\,dy) + i\oint_{\partial R} (v\,dx + u\,dy)$$
$$\overset{Green}{=} \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i\iint_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

donde la última igualdad vale por las condiciones de Cauchy-Riemann. ■

Comentario Nótese cómo una vez que se ha visto que el valor de esta integral es cero, la orientación de C es irrelevante.

Ejemplo 1.1 Si C es un contorno simple cerrado

$$\oint_C dz = 0, \quad \oint_C z\,dz = 0, \quad \oint_C z^2\,dz = 0$$

dado que las funciones $1,\ z,\ z^2$ son enteras y sus derivadas son continuas en todos los puntos.
Goursat fue el primero en demostrar que la condición de continuidad sobre f' se puede omitir. Esta omisión es importante. ■

Este resultado es bueno, pero se puede demostrar una versión mejorada del teorema de Cauchy-Goursat, para la cual sólo requerimos que f sea analítica. De hecho, con base en esta versión mejorada podremos demostrar que f es de clase C^∞. Para ir en esta dirección, primero mostraremos un caso muy particular, pero importante, del teorema de Cauchy-Goursat.

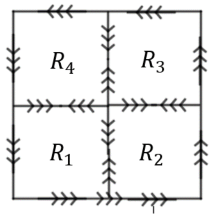
Lema 1.1 (Goursat)

Sean $f : A \to \mathbb{C}$ una función analítica en un abierto $A \subset \mathbb{C}$ y R un rectángulo cerrado contenido en A. Entonces

$$\oint_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

♡

Demostración Subdividimos cada lado de R a la mitad para descomponer a R en cuatro rectángulos R_1, R_2, R_3, R_4 de igual tamaño.



Si orientamos cada una de las fronteras de estos rectángulos positivamente, es claro que la integral de f a lo largo de ∂R es la suma de las integrales de f a lo largo de las fronteras de estos rectángulos; además, por la desigualdad del triángulo,

$$\left|\oint_{\partial R} f(z)\,dz\right| \leq \sum_{i=1}^{4}\left|\oint_{\partial R_i} f(z)\,dz\right| \tag{1.1}$$

Afirmamos que para alguno de estos rectángulos pequeños se cumple

$$\frac{1}{4}\left|\oint_{\partial R} f(z)\,dz\right| \leq \left|\oint_{\partial R_i} f(z)\,dz\right| \quad o \quad \left|\oint_{\partial R} f(z)\,dz\right| \leq 4\left|\oint_{\partial R_i} f(z)\,dz\right|$$

pues de lo contrario tendrímos una contradicción con la desigualdad $(1{,}1)$. Llamamos a dicho rectángulo R_1. Luego volvemos a dividir R_1 en cuatro rectángulos de igual tamaño y repetimos el argumento para obtener un rectángulo $R_2 \subset R_1$ tal que

$$\left|\oint_{\partial R} f(z)\,dz\right| \leq 4\left|\oint_{\partial R_1} f(z)\,dz\right| \leq 4^2\left|\oint_{\partial R_2} f(z)\,dz\right|$$

así, obtenemos una sucesión de rectángulos anidados

$$R_1 \supset R_2 \supset \cdots \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \cdots$$

tales que

$$\left|\oint_{\partial R} f(z)\,dz\right| \leq 4^n\left|\oint_{\partial R_n} f(z)\,dz\right|$$

Como los rectángulos están anidados, existe z_0 tal que $z_0 \in R_n$ para todo n.
Puesto que f es analítica en R, para z_0 existe el límite

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$$

y por definición, esto implica que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |z-z_0| < \delta$, entonces

$$|f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)| < \epsilon|z-z_0|$$

Observemos que

$$\oint_{\partial R_n} f(z)\,dz = \oint_{\partial R_n}(f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0))\,dz$$

pues la función $-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)$ admite una primitiva F y por tanto su integral a lo largo de cualquier curva cerrada es cero. Entonces,

$$\left|\oint_{\partial R_n} f(z)\,dz\right| = \left|\oint_{\partial R_n}(f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0))\,dz\right| < \epsilon\oint_{\partial R_n}|z-z_0|\,|dz|$$

Si denotamos por d, d_n, p, p_n las magnitudes de las diagonales y los perímetros de R, R_n, es fácil ver que $2^n d_n = d$ y $2^n p_n = p$, de modo que

$$\oint_{\partial R_n}|z-z_0|\,|dz| \leq d_n p_n = \frac{1}{4^n}dp$$

reuniendo toda la información, tenemos que

$$\left|\oint_{\partial R} f(z)\,dz\right| \leq 4^n\left|\oint_{\partial R_n} f(z)\,dz\right| < \frac{4^n}{4^n}\epsilon\,d\,p = \epsilon\,d\,p$$

como lo anterior vale para todo $\epsilon > 0$, se tiene que

$$\left| \oint_{\partial R} f(z)\, dz \right| = 0$$

■

Ejemplo 1.2 Si γ es cualquier curva simple cerrada en el plano entonces

$$\oint_{\gamma} e^{z^2} dz = 0$$

ya que $f(z) = e^{z^2}$ es analítica en todo $\mathbb{C}$. ■

Ejemplo 1.3 Si γ es una curva simple cerrada cuyo interior no contiene al origen entonces

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z}\, dz = 0$$

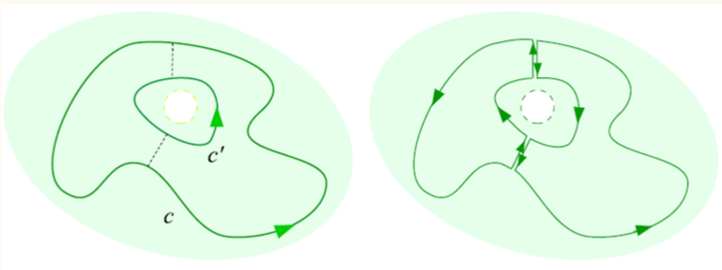
ya que $\frac{1}{z}$ es analítica en $\mathbb{C} - 0$. Pero si el interior de γ sí contiene a 0 entonces la integral no es 0. ■

El lema de Goursat se puede mejorar aún más. Podemos permitirnos el lujo de que f deje de ser analítica en algunos puntos del interior de nuestro rectángulo, con una condición adicional:

Corolario 1.1

Si f es una función analítica con derivada continua en una región A y si c y c' son dos curvas simples cerradas y ajenas en A tales que una puede deformarse a la otra dentro de A sin cambiar su orientacion, entonces

$$\oint_{c} f(z)\, dz = \oint_{c'} f(z)\, dz$$



♡

Demostración Si las curvas c y c' son ajenas, podemos conectarlas con dos arcos a y a' en A para obtener dos curvas simples s y s' cuyos interiores estan contenidos en A. Por el Teorema de Cauchy las integrales de f en s y en s' son 0. Pero si c y c' tienen la misma orientación entonces

$$\oint_{c} f(z)\, dz - \oint_{c'} f(z)\, dz = \oint_{s} f(z)\, dz + \oint_{s'} f(z)\, dz = 0$$

ya que las integrales sobre los arcos a y a' se cancelan. ■

Ejemplo 1.4 Si c es una curva simple cerrada c orientada positivamente y el interior de c contiene al origen, entonces

$$\oint_{c} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i$$

ya que podemos deformar la curva c a un circulo centrado en el origen. ■

Lema 1.2 (Goursat 2)

Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, R un rectángulo cerrado en A, $z_0 \in Int\ R$ y $f : A - \{z_0\} \to C$ una función analítica tal que

$$lim_{z \to z_0}(f(z)(z - z_0)) = 0$$

entonces

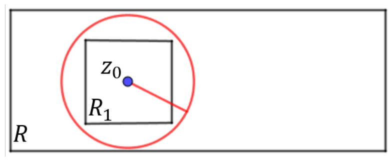
$$\oint_{\partial R} f(z)\, dz = 0$$

♡

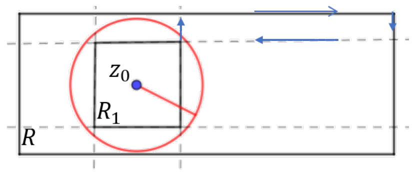
Demostración [Goursat 2] Tenemos que para todo $\epsilon > 0$ exste $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$ tenemos que

$$|f(z)(z - z_0)| < \epsilon, \quad o \quad |f(z)| < \frac{\epsilon}{|z - z_0|}$$

Sea R_1 un cuadrado de lado L centrado en z_0 tal que $|z - z_0| < \delta$ para todo $z \in R_1$.



Prolongando los lados de R_1 podemos subdividir a R en nueve rectángulos.



Observemos que en cualquiera de estos rectángulos pequeños (distinto de R_1) f es analítica, de modo que

$$\oint_{\partial R} f(z)\, dz = \oint_{\partial R_1} f(z)\, dz$$

Tenemos entonces que

$$\left|\oint_{\partial R} f(z)\, dz\right| \leq \oint_{\partial R_1} |f(z)|\, |dz| < \oint_{\partial R_1} \frac{\epsilon}{|z - z_0|}\, |dz|$$

pero para todo $z \in \partial R_1$, $|z - z_0| \geq \dfrac{L}{2}$, de modo que

$$\oint_{\partial R_1} \frac{\epsilon}{|z - z_0|}\, |dz| < \epsilon\, \frac{2}{L} \oint_{\partial R_1} |dz| = \epsilon\, \frac{2}{L}\, 4L = 8\epsilon$$

de donde se sigue el resultado. ■

Ejemplo 1.5 Sean $U \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, R un rectángulo cerrado contenido en U, $z_0 \in Int\ R$ y $f : U \to \mathbb{C}$ una función analítica. Definamos $g : U \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, & \text{si } z \neq z_0 \\ f'(z), & \text{si} z = z_0. \end{cases}$$

Observemos que g es analítica en $U \setminus \{z_0\}$, pues es el cociente de dos funciones analíticas, y

$$\lim_{z \to z_0} g(z)(z - z_0) = 0$$

Entonces, por el lema de Goursat 2

$$0 = \oint_{\partial R} g(z) dz = \oint_{\partial R} \frac{f(z)}{z - z_0} - f(z_0) \oint_{\partial R} \frac{dz}{z - z_0}$$

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Para $R > 0$ sea γ_R el arco de circunferencia centrada en cero y radio R, que va de R a -R y contenida en el semiplano superior. Demuestra

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{z^2} dz = 0$$