Variable Compleja

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

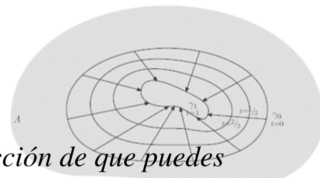
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 3. Integración Compleja

1.1 Teorema de Cauchy

Teorema 1.1 (Lema de Goursat 2)

Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, R un rectángulo cerrado en A, $z_0 \in Int\ R$ y $f : A - \{z_0\} \to C$ una función analítica tal que

$$lim_{z \to z_0}(f(z)(z - z_0)) = 0$$

entonces

$$\oint_{\partial R} f(z)\, dz = 0$$

♡

Ejemplo 1.1 Sean $A \subset \mathbb{C}$ un conjunto abierto, R un rectángulo cerrado contenido en A, $z_0 \in IntR$ y $f : A \to \mathbb{C}$ una función analítica. Definamos $g : A \to C$ por

$$g = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

Observemos que g es analítica en $A \setminus \{z_0\}$, pues es el cociente de dos funciones analíticas, y

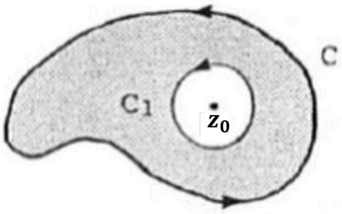
$$\lim_{z \to z_0} g(z)(z - z_0) = 0$$

Entonces, por el Lema de Goursat 2

$$0 = \oint_{\partial R} g(z)\, dz = \oint_{\partial R} \frac{f(z)}{z - z_0} - f(z_0) \oint_{\partial R} \frac{dz}{z - z_0} \tag{1.1}$$

Comentario El rectángulo R se puede deformar a una región C.

Para ver esto, consideremos C_1 un circulo de radio ϵ centrado en z_0 tal que C_1 se encuentre dentro de una región C



entonces $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ es analítica en la región acotada por C y C_1 por lo que

$$\oint_C \frac{dz}{z - z_0} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z - z_0}$$

En C_1 se tiene $|z - z_0| = \epsilon$ o $z - z_0 = \epsilon\, e^{i\theta}$ es decir $z = z_0 + \epsilon\, e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y por tanto $dz = i\epsilon\, e^{i\theta}\, d\theta$ de manera que

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon\, e^{i\theta}}{\epsilon\, e^{i\theta}} = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

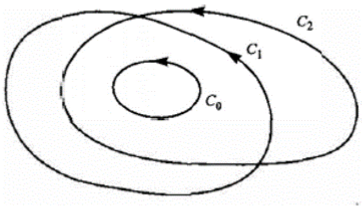
en consecuencia $(1{,}1)$ toma la forma

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial R} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

■

Comentario Si bien en nuestra deducción supusimos que los contornos C, y C_1 no se cortaban, esta condición no es necesaria.

Ejemplo 1.2 Supongamos que, en la figura,



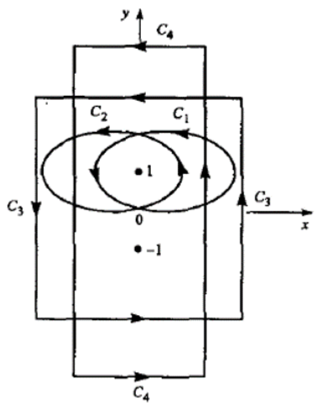
f(z) es analítica sobre C_2 y en su interior, salvo quizá en algunos puntos del interior de C_0. Supongamos además que f(z) es analítica sobre C, y en su interior, salvo quizá en algunos puntos del interior de C_0, y que C_0 está dentro de C_1, y C_2, y no corta a ninguno de estos dos contornos. Observese que C_1 y C_2 pueden cortarse. Tenemos entonces que

$$\oint_{\partial C_1} f(z)\, dz = \oint_{\partial C_0} f(z)\, dz \quad y \quad \oint_{\partial C_2} f(z)\, dz = \oint_{\partial C_0} f(z)\, dz$$

Por lo tanto,

$$\oint_{\partial C_2} f(z)\, dz = \oint_{\partial C_1} f(z)\, dz$$

Ejemplo 1.3 Sea $f(z) = \frac{\cos\ z}{z^2+1}$. Los contornos $C_1,\ C_2,\ C_3$ y C_4 como se ve en la figura



Explique a qué se debe que sean válidas las siguientes ecuaciones:

- $\oint_{\partial C_1} f(z)\, dz = \oint_{\partial C_2} f(z)\, dz$
- $\oint_{\partial C_3} f(z)\, dz = \oint_{\partial C_4} f(z)\, dz$

Solución *La función f(z) es analítica salvo en los puntos que satisfacen la relación $z^2 + 1 = O$, Luego, $f(z)$ es analítica en cualquier dominio que no contenga el punto $z = \pm i$ Al transformar el contorno C_1 en el contorno C_2 por medio de una deformación continua, no cruzamos ninguna singularidad de f(z), Así queda probada la primer ecuación. De manera análoga podemos deformar C_3 para convertirlo en C_4, y demostrar así la validez de la segunda ecuación. Nótese que no podemos concluir que $\oint_{\partial C_2} f(z)\, dz = \oint_{\partial C_3} f(z)\, dz$ pues el dominio delimitado por C_2 y C_3 contiene el punto singular $z = -i$ de f(z).* ■

Ahora que contamos con el lema de Goursat, podemos demostrar también algunas versiones de un importante resultado:

Teorema 1.2 (Teorema de Cauchy 1)

Sean $A \subset \mathbb{C}$ un disco abierto y $f : A \to \mathbb{C}$ una función analítica. Entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

para cualquier curva cerrada C^1 por partes contenida en A ♡

Demostración Definimos F(z) como la integral de f a lo largo de una curva γ_1 dada por la unión de un segmento vertical y un segmento horizontal, que unen el centro de A con z. Con base en esta definición podemos calcular la derivada parcial de F con respecto de z:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h}$$

para calcular F(z) consideramos la curva γ_1 ya mencionada, mientras que para calcular F(z + h) usamos la unión de γ_1 con un segmento horizontal de z a z + h. La resta F(z + h)-F(z) representa entonces la integral de f a lo largo del segmento horizontal que podemos parametrizar por $\gamma_1(t) = z + t,\ t \in [0; h]$; denotamos esta integral por $\displaystyle\int_z^{z+h} f(z)\,dz$:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(z)\,dz \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^{h} f(z+t)\,dt = f(z)\end{aligned}$$

en el último paso hemos aplicado el teorema del valor medio a las partes real e imaginaria de f.
Observemos que debido al lema de Goursat podríamos haber definido F considerando una curva γ_2 formada por un segmento horizontal y uno vertical. Con un razonamiento análogo al anterior, usando ahora la curva $\gamma_2(t) = z + it, t \in [0, h]$, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{F(z+ih)-F(z)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_z^{z+ih} f(z)\,dz \\ = i\ \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^{h} f(z+it)\,dt = i\ f(z)\end{aligned}$$

de donde obtenemos $\dfrac{\partial F}{\partial y}(z) = i\,\dfrac{\partial F}{\partial x}(z)$ que son las condiciones de Cauchy-Riemann. Así, F es de clase C^1 y cumple las condiciones de Cauchy-Riemann, por lo que resulta ser analítica. Finalmente,

$$F'(z) = \frac{\partial F}{\partial x}(z) = f(z)$$

■

Podemos extender el teorema de Cauchy usando las versiones del lema de Goursat:

Teorema 1.3 (Teorema de Cauchy 2)

Sea $A \subset \mathbb{C}$ un disco abierto, $z_0 \in A$ y $f : A \setminus \{z_0\} \to \mathbb{Z}$ una función analítica en $A \setminus \{z_0\}$ tal que

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = 0$$

entonces

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

para cualquier curva cerrada C^1 por partes contenida en A que no pase por z_0

Demostración Seguimos un procedimiento completamente similar al anterior: Basta encontrar F analítica tal que $F'(z) = f(z)$. De hecho, definimos F como la integral de f a lo largo de una curva γ dada por una unión finita de segmentos horizontales y verticales que unen el centro de A (o para el mismo efecto, cualquier punto fijo de A) con z, sin pasar por z_0. Por el lema de Goursat 2.0, cualquier curva de este tipo (que no pase por z_0, por supuesto) nos sirve. ■

Ejemplo 1.4 Evalúe la integral $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3}$

Solución *Tenemos que* $\displaystyle\int_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3} = 0$ *ya que la función* $\displaystyle\frac{1}{(1-z)^3}$ *es analítica en todo el plano con excepción de $z = 1$, puntos que están en el exterior del circulo de integración, por lo que el teorema de Cauchy asegura que la integral es cero.* ■

Ejemplo 1.5 Evalúe la integral $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3}$

Solución *Tenemos que* $\displaystyle\int_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{dz}{(1-z)^3} = 0$ *ya que para la función* $\displaystyle\frac{1}{(1-z)^3}$ *existe la antiderivada en una región que contiene a la curva de integración.* ■

Una aplicación importante del teorema de Cauchy (más precisamente, de la versión 2.0) es la siguiente:

Proposición 1.1 (Aplicación del teorema de Cauchy)

Sean $A \subset \mathbb{C}$ un disco abierto, $F : A \to \mathbb{C}$ una función analítica, $z_0 \in A$ y $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ una curva cerrada C^1 por partes que no pase por z_0. Entonces

$$f(z_0) \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Demostración [Aplicación del teorema de Cauchy] Consideremos la función $g : A \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & z \neq z_0 \\ f'(z_0) & z = z_0 \end{cases}$$

Entonces g satisface las condiciones del teorema de Cauchy 2. Es analítica en $A \setminus^{\{} z_0\}$ y, puesto que g es continua en z_0, tenemos que

$$\lim_{z \to z_0} g(z)(z - z_0) = 0$$

Por lo tanto $\displaystyle\int_\gamma g(z)\, dz = 0$. ■

Ejemplo 1.6 Sea γ la circunferencia de radio r con centro z_0 rrecorida k veces ($k \in \mathbb{N}$) en sentido positivo; más precisamente, sea $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi k]$. Tenemos que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi k} \frac{rie^{it}}{re^{it}}\,dt = 2\pi k i \;\; es \;\; decir \;\; \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = k \in \mathbb{Z}$$

■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Hallar $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z^2 + 2z + 2}$ donde γ es el círculo $|z| = 2$
2. Evaluar $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{z - 3}$ donde γ es el círculo $|z| = 1$