VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

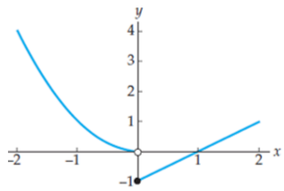
Capítulo 1 Unidad 2. Funciones de Variable Compleja

1.1 Introducción al concepto de funciones analíticas

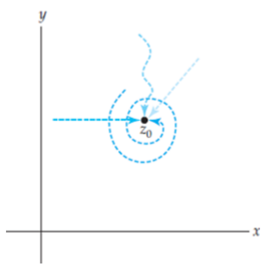
La teoría de funciones de una variable compleja tiene como objetivo extender el cálculo al dominio complejo. Tanto la diferenciación como la integración adquieren una nueva profundidad y significado; al mismo tiempo, el rango de aplicabilidad se restringe radicalmente. De hecho, solo las funciones analíticas u holomórficas pueden diferenciarse e integrarse libremente.

1.2 Límite de funciones complejas

El concepto más importante en el cálculo elemental es el de límite. Recordar que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ intuitivamente significa que los valores $f(x)$ de la función f pueden acercarse arbitrariamente al número real L si los valores de x se eligen lo suficientemente cerca, pero no igual a, el número real x_0. En el análisis real, los conceptos de continuidad, la derivada, y la integral definida se definieron utilizando el concepto de límite. Los límites complejos tienen un papel igualmente importante en el estudio del análisis complejo. El concepto de límite complejo es similar al de un lmite real en el sentido de que $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ significará que los valores $f(z)$ de la función compleja f puede hacerse arbitrariamente cerca del número complejo L si los valores de z se eligen suficientemente cerca, pero no iguales, del número complejo z_0. A pesar de que exteriormente es similar, hay una diferencia importante entre estos dos conceptos de límite. En un límite real, hay dos direcciones desde las cuales x puede acercarse a x_0 en la línea real, a saber, desde la izquierda o desde la derecha.



En un límite complejo, sin embargo, hay infinitamente muchas direcciones desde las cuales z puede acercarse a z_0 en el plano complejo.



Para que un límite complejo exista, cada forma en que z pueda acercarse a z_0 debe producir el mismo valor límite.

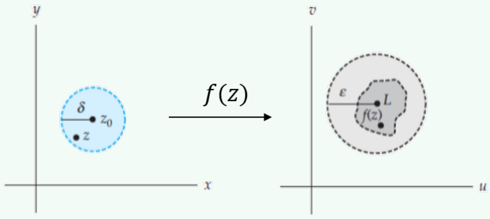
Definición 1.1 (Límite complejo)

Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ punto de acumulación de A. Se dice que

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

si

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ \ tal\ \ que\ \ si\ \ 0 < |z - z_0| < \delta,\ \ se\ \ tiene\ \ que\ \ |f(z) - L| < \epsilon$$



♣

Ejemplo Sea $f(z) = \dfrac{z^2+9}{z-3i}$, f está definida solamente para $z \neq 3i$. Sin embargo

$$\lim_{z \to 3i} f(z) = 6i$$

En efecto, si $z \neq 3i$, entonces se tiene

$$|f(z) - 6i| = \left| \frac{z^2+9}{z-3i} - 6i \right| = |z - 3i|$$

por consiguiente, tomando $\delta = \epsilon$ se obtiene

$$|f(z) - 6i| < \epsilon\ \ si\ \ 0 < |z - 3i| < \delta$$

o sea que

$$\lim_{z \to 3i} \frac{z^2+9}{z-3i} = 6i$$

Teorema 1.1 (Propiedades de los límites complejos)

SSupongamos que f y g son funciones complejas. Si $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ y $\lim_{z \to z_0} g(z) = M$, entonces

1. $\lim_{z \to z_0} cf(z) = cL$, *c es una constante compleja*
2. $\lim_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = L \pm M$
3. $\lim_{z \to z_0} f(z) \cdot g(z) = L \cdot M$
4. $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{L}{M}$, *siempre que $M \neq 0$*

♡

La demostración de este teorema es muy semejante a la demostración del teorema para el caso real.

1.3 Continuidad de funciones complejas

La definición de continuidad para una función compleja es, en esencia, lo mismo que para una función real. Es decir, una función compleja f es continua en un punto z_0 si el límite de f cuando z se aproxima a z_0 y es el mismo que el valor de f en z_0.

Definición 1.2 (Continuidad)

Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se dice que f es continua en $z_0 \in A$ si

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

esto es

$$\forall \, \epsilon > 0 \;\; \exists \, \delta > 0 \;\; tal \;\; que \;\; si \;\; 0 < |z - z_0| < \delta, \;\; se \;\; tiene \;\; que \;\; |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

♣

Criterio para la continuidad en un punto Una función compleja f es continua en un punto z_0 si se cumple

1. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe,
2. f está definida en z_0, y
3. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

Si f es continua en cada punto $z \in A$ se dice que f es continua en A.
Si una función compleja f no es continua en un punto z_0 entonces decimos que f es **discontinua** en z_0. Por ejemplo, la función $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ es discontinua en $z = i$ y en $z = -i$.

Teorema 1.2 (Propiedades de las funciones continuas complejas)

SSupongamos que f y g son continuas en z_0. Si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ y $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = g(z_0)$, entonces

1. $\lim\limits_{z \to z_0} cf(z) = cf(z_0)$*, c es una constante compleja*
2. $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) \pm g(z)) = f(z_0) \pm g(z_0)$
3. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \cdot g(z) = f(z_0) \cdot g(z_0)$
4. $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{f(z_0)}{g(z_0)}$*, siempre que* $g(z_0) \neq 0$

♡

La demostración de este teorema es muy semejante a la demostración del teorema para el caso real.

Teorema 1.3 (Continuidad de la composición de funciones)

Si la función g es continua en z_0 y f es continua en $g(z_0)$, entonces la función compuesta $h(z) = (f \circ g)(z) = f(g(z))$ es continua en el punto z_0 es decir:

$$\lim_{z \to z_0} f(g(z)) = f(g(z_0))$$

♡

Por consiguiente, si la función g es continua en el conjunto A, y f lo es en $g(A)$, resulta que $h = f \circ g$ es continua en A.

Definición 1.3 (Sucesiones)

Se dice que la sucesión de números complejos $\{z_n\}$ converge a z_0 si

$$\forall \, \epsilon > 0 \, \exists \, N \in \mathbb{N} \;\; tal \;\; que \;\; si \;\; n > N \;\; se \;\; tiene \;\; |z_n - z_0| < \epsilon$$

♣

Dado que el límite es único y

1. Si $\{w_n\} \to w$ y $\{z_n\} \to z$ entonces $\{w_n + z_n\} \to w + z$

2. $\{w_n \cdot z_n\} \to w \cdot z$
3. Si $w \neq 0$, $\left\{\dfrac{z_n}{w_n}\right\} \to \dfrac{z}{w}$

Observamos que

$$\{z_n\} \to z \Leftrightarrow \{Re(z_n)\} \to Re(z), \ \ \{Im(z_n)\} \to Im(z)$$

esto se sigue de que

$$|z - z_n| = \sqrt{(Re(z - z_n))^2 + (Im(z - z_n))^2}$$

Esta observación muestra que una sucesión en $\mathbb{C}$ es convergente si y sólo si es de Cauchy.

Definición 1.4 (Continuidad por sucesiones)

Una función $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua $z_0 \in A$ si y sólo si

$$\forall \{z_n\} \ \ tal \ que \ \{z_n\} \to z, \ \ \{f(z_n)\} \to f(z_0)$$

♣

Ejemplo Con respecto a la métrica cordal

$$d_{\mathbb{C}}(z_1, z_2) = \begin{cases} \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}} & si \quad z_1, z_2 \neq \infty \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z_1|^2}} & si \quad \ z_2 = \infty \end{cases}$$

se tiene que $d_{\mathbb{C}}(z_n, \infty) \to 0$ si y sólo si $|z_n| \to \infty$

1.4 Diferenciabilidad de funciones complejas

Definición 1.5 (Diferenciabilidad)

Sea A un abierto en $\mathbb{C}$, se dice que una función $f : A \to \mathbb{C}$ es diferenciable en el sentido complejo en $z_0 \in A$, si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe. Este límite, llamado le derivada, se denota por $f'(z_0)$

♣

Se dirá que f es diferenciable en el sentido complejo en A, si lo es en cada punto de A.

Observación Como en el caso real, la definición anterior es equivalente al siguiente:

f es derivable en $z_0 \in A$ si $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$ con $h \in \mathbb{C}$ existe .

Ejemplo Para $f(z) = z^2$ se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(z_0 + h)^2 - z_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2z_0 h + h^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h(2z_0 + h)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (2z_0 + h) \\ &= 2z_0 \end{aligned}$$

por lo que la función es derivable en todo z_0 y $f'(z_0) = 2z_0$

Teorema 1.4 (Propiedades de las funciones diferenciables)

Si f y g son funciones complejas derivables en un punto z_0 y c es una constante compleja, entonces

1. $f(z) = c \Rightarrow f'(z) = 0$ y $(cf(z))' = cf'(z)$
2. $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$
3. $(f(z) \cdot g(z))' = f(z) \cdot g'(z) + f'(z) \cdot g(z)$
4. $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right) = \dfrac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$ *con* $g(z) \neq 0$
5. $(f \circ g)'(z) = (f(g(z)))' = f'(g(z))g'(z)$

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Muestre que la función $f(z) = |z|$ es continua.
2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como $f(0) = 0$ y $f(r[\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta]) = \mathrm{sen}\,\theta$ si $r > 0$. Muestre que f es discontinua en 0, pero continua en cualquier otro punto.
3. Muestre que la función $f(z) = z^n$ es diferenciable.