Facultad de Ciencias UNAM

VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

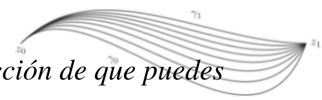
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 2. Funciones de Variable Compleja

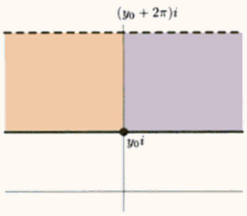
1.1 Función Exponencial Compleja

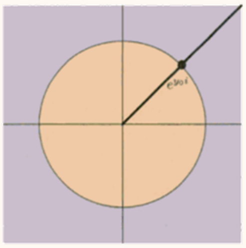
Lema 1.1 (Biyectividad de la función exponencial compleja restringida)

La función e^z restringida al rectángulo infinito

$$A_{y_0} = \{z \in \mathbb{C} \mid y_0 \leq Im\ z < y_0 + 2\pi\}$$

es inyectiva sobre $\mathbb{C} - \{0\}$, y $e^z \mid A_{y_0}$ es suprayetiva.





♡

Demostración Si $e^z = e^w$, con $z, w \in A_{y_0}$, entonces

$$e^{z-w} = 1 \quad y \quad w - z = 2\pi n i, \ \ n \in \mathbb{Z}$$

Por lo cual $z = w$, ya que la distancia entre las partes imaginarias de dos puntos cualesquiera en A_{y_0} es menor que 2π. Por lo tanto $e^z \mid A_{y_0}$ es inyectiva. Ahora, dado $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. La ecuación $e^z = w$ tiene solución z en A_{y_0}

$$w = |w| \frac{w}{|w|} = e^x e^{iy}$$

si y sólo si

$$\log\ |w| = x \quad y \quad e^{i\ \arg\ w} = e^{iy}$$

donde la segunda ecuación tiene un número infinito de soluciones, una de las cuales satisface $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$. ■

La proposición nos dice que la exponencial compleja comparte algunas propiedades con la exponencial real, pero no todas. La exponencial real es creciente y por tanto tiene una inversa, el conocido logaritmo natural. Por otro lado, debido a que e^z es periódica y por tanto no inyectiva, no podemos definir una sola función inversa de la exponencial. Lo que sí podemos hacer es restringir el dominio de la exponencial compleja, para que sea inyectiva en ese dominio. Como e^z tiene periodo $2\pi i$, es natural considerar cualquier franja horizontal de ancho 2π; en forma explícita, sean $y_0 \in \mathbb{R}$ y

$$A_{y_0} = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}, \ y_0 \leq y \leq y_0 + 2\pi\}$$

Notamos que en la prueba de la proposición anterior la asociación

$$w \to \log\ |w| + i \arg\ w$$

establece una función inversa, lo cual sugiere la siguiente definición.

1.2 Logaritmo Complejo

Definición 1.1 (Logaritmo complejo)

La función con dominio $\mathbb{C} - \{0\}$, *y rango* A_{y_0} *y regla de correspondencia*

$$\log\ z = \log\ |z| + i \arg\ z, \quad con\ \arg\ z \in [y_0, y_0 + 2\pi)$$

se llama ***rama de logaritmo***. ♣

Comentario Nótese que para que el logaritmo sea función, es necesario restringir el codominio;

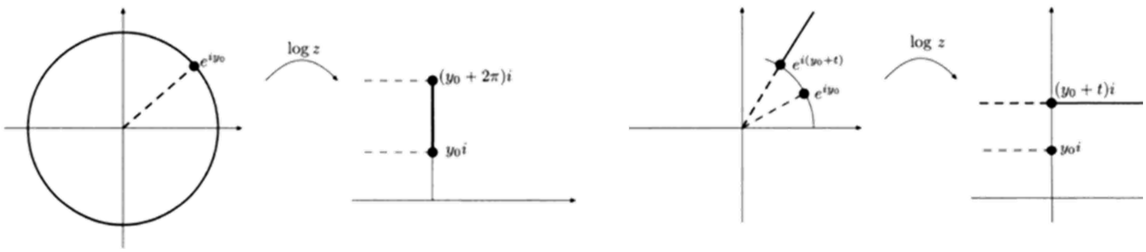
$$\{x + iy \mid y_0 < y \leq y_0 + 2\pi\}, \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

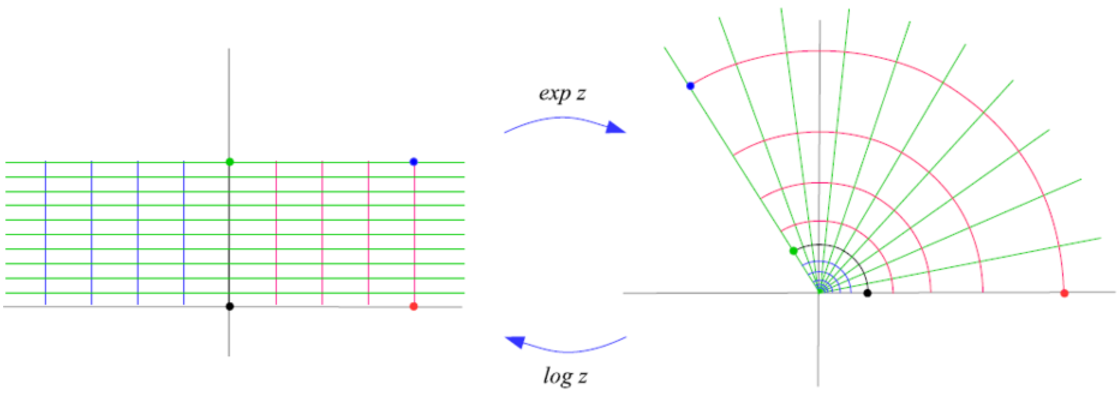
$$o$$

$$\{x + iy \mid y_0 \leq y < y_0 + 2\pi\}, \quad y_0 \in \mathbb{R}$$

La geometría de la función logaritmo es la inversa de la exponencial: círculos concéntricos al origen se desarrollan en segmentos de líneas verticales y semirectas que parten del origen se transforman en rectas horizontales.
Al escribir la función es su forma polar

$$\log\ z = \log(re^{i\theta}) = \log\ r + i\theta$$





El valor principal del logaritmo de z, que denotaremos por $Log\ z$, es el valor que se obtiene cuando se usa el argumento principal de z en la ecuacion $\log\ z = \ln\ |z| + i \arg\ z$. Recordemos que el argumento principal de z, que denotaremos por θ_p, es el argumento de z que satisface $-\pi < \theta_p \leq \pi$. Tenemos que todos los valores de $\arg z$ pueden obtenerse a partir del valor principal θ_p, usando la fórmula $\arg z = \theta_p + 2n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$.
Tomando $n = 0$ en esta expresión obtenemos el valor principal, $Log\ z$.

Ejemplo 1.1 Para encontrar todos los valores de $\log(1 - i)$, se tiene

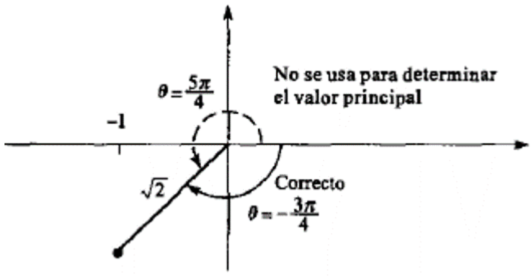
$$\log(1-i) = \log|1-i| + i\arg(1-i) + 2i\pi n = \log\ \sqrt{2} + i\frac{-\pi}{4} + 2i\pi n = \log\ \sqrt{2} + i\left(\frac{-\pi}{4} + 2\pi n\right), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Para encontrar el valor principal $Log(1 - i)$ consideramos $n = 0$, en este caso

$$Log(1-i) = \log\ \sqrt{2} + i\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

✍ **Ejercicio 1.1** Determine $Log(-1-i)$ y todos los valores de $\log(-1-i)$

Solución *El número complejo $-1-i$ se muestra gráficamente en la figura*



El valor principal θ_p de este número complejo es $-\dfrac{3\pi}{4}$ y su módulo es $\sqrt{2}$. Por lo que

$$Log(-1-i) = \log\ \sqrt{2} + i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

Mientras que

$$\log(-1-i) = \log\ \sqrt{2} + i\left(2n\pi - \frac{3\pi}{4}\right),\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Teorema 1.1 (Logaritmo como inversa de la exponencial)

El logaritmo es la inversa de la exponencial en el siguiente sentido: si $\log(z)$representa una rama de logaritmo, entonces

$$e^{\log\ z} = z \quad \forall\, z \in \mathbb{C} - \{0\}$$

también si se elije la rama

$$y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$$

entonces

$$\log(e^z) = z \quad \forall\, z \in A_{y_0}$$

♡

Demostración Como $\log\ z = \log|z| + i\arg\ z$,

$$e^{\log\ z} = e^{\log|z|}e^{i\arg\ z} = |z|\frac{z}{|z|} = z$$

Recíprocamente, si $z = x + iy$, donde $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$, se tiene

$$\log(e^z) = \log|e^z| + i\arg\ e^z = \log|e^z| + iy = \log e^x + iy = z$$

Esto se sigue ya que $\arg(e^z) = y$, por la forma en que se eligió la rama de logaritmo. ■

Comentario Notamos que en el resultado anterior si $z \notin A_{y_0}$, entonces no necesariamente $e^{\log\ z} = z$, por ejemplo, $y_0 = 0$, y $z = 2\pi i$, se tiene $\log(e^{2\pi i}) = 0$.

✍ **Ejercicio 1.2** Encuentre todos los valores de $(-1)^i$

Solución *Tenemos que*

$$(-1)^i = e^{i\log(-1)} = e^{i(\log|-1| + i(\pi + 2\pi n))} = e^{-\pi - 2n\pi},\quad n \in \mathbb{Z}$$

✍ **Ejercicio 1.3** Encuentre todos los valores de 2^i

Solución *Tenemos que*

$$2^i = e^{i\log(2)} = e^{i(\log|2| + i2\pi n)} = e^{-2n\pi + i\log|2|},\quad n \in \mathbb{Z}$$

Proposición 1.1 (Propiedad de logaritmo)

Sea $\log\ z$ *la rama de logaritmo cuyo argumento toma valores en* $[y_0, y_0 + 2\pi)$, *si* $z, w \in \mathbb{C}\{0\}$, *entonces*

$$\log(zw) = \log\ z + \log\ w \qquad \text{mód}\ \ 2\pi i$$

Demostración

$$\begin{aligned}
\log(z \cdot w) &= \log|z \cdot w| + i \arg\ (z \cdot w) \\
&= \log|z| + \log|w| + i(\arg\ z + \arg\ w) \\
&= \log|z| + i \arg\ z + \log|w| + i \arg\ w \\
&= \log\ z + \log\ w
\end{aligned}$$

Ejemplo 1.2 Tomando la rama cuyo argumento toma valores en $[0, 2\pi)$, multiplicamos los complejos

$$\left(-\sqrt{2}i\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -1 - i$$

ahora

$$\log\left(-\sqrt{2}i\right) + \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \log(\sqrt{2}) + \log\ 1 + i\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{7\pi}{4}\right) = \log(\sqrt{2}) + i\frac{13\pi}{4}$$

por otra parte

$$\log(-1 - i) = \log(\sqrt{2}) + i\frac{5\pi}{4}, \quad y \quad \frac{13\pi}{4} - \frac{5\pi}{4} = 2\pi$$

■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Encuentre los valores
   - $\log 1$
   - $\log i$
2. Encuentre $\log[(-1 - i) \cdot (1 - i)]$ en el intervalo $[0, 2\pi)$
3. Demuestre que $\log\ z = 0$ si $z = 1$.