Variable Compleja

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 3. Integración Compleja

1.1 El Teorema del Módulo Máximo y las Funciones Armónicas

Dada la estrecha relación entre las funciones analíticas de variable compleja y las funciones armónicas, no debe sorprender que podamos traducir algún comportamiento de unas en un comportamiento de las otras. Nuestro primer paso será extender el dualismo armónico-analítico a dominios simplemente conexos, a través del siguiente resultado.

Proposición 1.1

Sean U una región simplemente conexa de $\mathbb{C}$ y $u : U \to \mathbb{R}$ una función armónica en U. Entonces u es de clase C^∞ y existe una función analítica $f : U \to \mathbb{C}$ tal que $u = Re(f)$. ♠

Demostración Primero probemos la segunda parte de la proposición. Sea

$$g = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = U + iV$$

como u es armónica, en particular es de clase C^2, lo que implica que g es de clase C^1. Además, g cumple con las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial V}{\partial y};$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial V}{\partial x}.$$

Esto implica que g es analítica en U; como U es simplemente conexa, existe F analítica tal que $F' = g$ en U. Si $F = \widetilde{u} + i\widetilde{v}$, entonces

$$F' = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} - i\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

es decir, $\widetilde{u} - u = c$ para alguna $c \in \mathbb{R}$. Si $f = F - c$, tenemos que f es analítica y $u = Re(f)$

Probemos ahora la primera parte de la proposición. Por lo que acabamos de demostrar, $u = Re(f)$ para alguna f analítica en U. Como f es C^∞, entonces u también lo es. ■

Con este resultado en la mano, estamos equipados para estudiar funciones armónicas en dominios simplemente conexos, utilizando la teoría de funciones analíticas. Sea $\phi(x, y)$ una función armónica y $f = \phi + i\psi$ ser una *compleción analítica* para ϕ en el dominio simplemente conexo D. Ahora observe lo siguiente acerca de la función $e^{f(z)}$:

$$\left|e^{f(z)}\right| = \left|e^{\phi + i\psi}\right| = \left|e^{\phi}\right| \ \left|e^{i\psi}\right| = e^{\phi}$$

Debido a que la exponencial es una función que aumenta monótonamente en una variable real, implica que los puntos máximos de ϕ coinciden con los puntos máximos del módulo de la función analítica e^f. Por lo tanto, inmediatamente tenemos un principio máximo. para funciones armónicas.

1.2 El Teorema del Módulo Máximo

Este teorema y la **fórmula integral de Cauchy** se usarán para desarrollar algunas de las propiedades importantes de las **funciones armónicas**.

El principio del módulo máximo puede enunciarse, quizá mejor, como sigue:

Si una función analítica tiene un máximo local (o su valor absoluto) en un punto, entonces debe ser constante cerca de ese punto.

Una versión local del principio se sigue, esencialmente, porque un promedio no puede se mayor o igual a todos los valores, a menos que todos ellos sean iguales.

Proposición 1.2 (Propiedad de valor medio)

Sea f analítica en el interior y sobre un círculo de radio r y centro en z_0 (esto es, analítica en una región que contiene al círculo y su interior). Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

Demostración Por la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

donde $\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Pero por la definición de la integral,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} re^{i\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

■

1.3 Principio del máximo para funciones armónicas.

Sean U una región de $\mathbb{C}$ y $u : U \to \mathbb{R}$ una función armónica en U que alcanza un máximo en un punto $z_0 \in U$. Queremos ver que u debe ser constante. Ya sabemos que la parte real de una función analítica es armónica, así que supongamos por un momento que vale la afirmación recíproca, es decir, que para u existe una función $v : U \to \mathbb{R}$ tal que $f = u + iv$ es analítica. Observemos que

$$e^{f(z)} = e^{u(z)}(\cos\ v(z) + i\,\text{sen}\ v(z))$$

lo que implica que

$$\left|e^{f(z)}\right| = e^{u(z)}$$

Como u alcanza un máximo en un punto $z_0 \in U$ y la función e^x es creciente, $e^{u(z)}$ alcanza su máximo en $z_0 \in U$. Por el principio del módulo máximo, $e^{f(z)}$ es constante; de aquí es fácil concluir que u también resulta ser constante.

Debemos entonces responder la pregunta: ¿Cuándo ocurre que una función armónica u es la parte real de una función analítica? Para ver que esto no siempre ocurre, veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo Sea $u : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$u(z) = u(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} = \ln|z|$$

Veamos que u es armónica. Calculemos sus primeras derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

y las segundas derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

De aquí tenemos que es de clase C^2 (al menos) y que $\Delta u = 0$, es decir, u es armónica.

¿Existe f analítica tal que $u = Re(f)$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$? La idea detrás de este ejemplo es que u debería ser la parte real de log z, pero esta función no está definida en todo el dominio de u. En general, supongamos que existe una función v tal que $f = u + iv$ sea analítica; por las condiciones de Cauchy-Riemann tendríamos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2} \quad y \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

de modo que $v = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + c$ con c constante, pero esta función no es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. En resumen, u es armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ pero no puede ser la parte real de una función analítica en este conjunto.

Proposición 1.3 (Propiedad del valor medio para funciones armónicas)

Sea u armónica en una región que contiene un círculo de radio r alrededor de $z_0 = x_0 + iy_0$ y a su interior. Entonces

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

♠

Demostración Por la proposición 0.2, existe una función analítica f definida en una región que contiene este círculo y su interior, tal que $u = Re(f)$. Esta región de contención puede escogerse para que sea un disco ligeramente más grande. La existencia de un círculo ligeramente más grande en A es intuitivamente clara. Por la propiedad del valor medio para f,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

Al tomar la parte real en ambos lados nos da el resultado deseado.

Teorema 1.1 (Principio del máximo para funciones armónicas (versión local))

Sea u una función armónica en una región U de $\mathbb{C}$. Si u tiene un máximo local en $z_0 \in U$, entonces u es constante.

♡

Demostración Consideremos un disco abierto D alrededor del punto z_0. Como D es simplemente conexo, por la Proposición 0.2, existe f analítica en D tal que $u = Re(f)$. Entonces la función $e^{f(z)}$ también es analítica y $|e^{f(z)}| = e^{u(z)}$. Como u alcanza un máximo en z_0 y la función exponencial real es creciente, $|e^{f(z)}|$ también alcanza un máximo en z_0. Por el Teorema 0.1, $|e^{f(z)}|$ es constante en D y por lo tanto $e^{u(z)}$ también lo es, por lo que u es constante en D. Podemos aplicar este argumento a cualquier punto del conjunto

$$A = \{z \in U \mid u(z) = u(z_0)\}$$

lo que implica que A es abierto en U. Pero claramente A también es cerrado y no vacío. Como U es conexo, $A = U$ y u es constante. ■

Teorema 1.2 (Principio del máximo/mínimo para funciones armónicas)

Sean U una región acotada de $\mathbb{C}$ y $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ una función, continua en $\overline{U}$ y armónica en U. Sean m,M el mínimo y el máximo de u en ∂U, respectivamente. Entonces

- *$m \leq u(z) \leq M$ para todo $z \in U$.*
- *Si $u(z_0) = m$ o $u(z_0) = M$ en algún $z_0 \in U$, entonces u es constante.*

♡

Demostración Sea $\overline{M}$ el máximo de u en $\overline{U}$ y supongamos que $\overline{M} > M$. Esto dice que u alcanza su máximo global en un punto interior $z_0 \in U$. Por el resultado anterior, $u \equiv \overline{M}$ en $\overline{U}$, lo que es una contradicción. Por tanto, $\overline{M} = M$. Si $u(z_0) = M$ en algún $z_0 \in U$, nuevamente aplicamos el resultado anterior para concluir que u es constante. Al considerar la función $-u$ obtenemos las conclusiones para m.■

Ahora tenemos el principio del módulo máximo para funciones analíticas, mientras que tenemos dos principios (del máximo y el mínimo) para funciones armónicas. Uno podría preguntarse si existe un principio del módulo mínimo para funciones analíticas; es decir, si el módulo de una función analítica debe alcanzar su mínimo en la frontera del dominio de definición. Sin embargo, es muy fácil convencerse de que esto es falso:

Ejemplo Sea $f : \overline{D(0,1)} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = z$. Entonces $f(0) = 0$, de modo que el módulo de f alcanza su mínimo en un punto interior del dominio y f no es constante. Sin embargo, eliminando la posibilidad de que $f(z) = 0$ obtenemos el anhelado principio:

Teorema 1.3 (Principio del módulo mínimo para funciones analíticas)

Sea U una región acotada de $\mathbb{C}$, $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ una función, continua en $\overline{U}$, analítica en U y $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{U}$. Entonces $|f(z)|$ alcanza su mínimo en la frontera de U.

♡

Demostración Sea $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$. Es claro que g está bien definida y es analítica, de modo que por el principio del módulo máximo, $|g(z)|$ alcanza su máximo en ∂U. Pero entonces tenemos que $|f(z)| = \dfrac{1}{|g(z)|}$ alcanza su mínimo en ∂U.■

Podemos utilizar los principios del máximo y mínimo para funciones armónicas para obtener resultados acerca de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales.

Supongamos que $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ es continua en $\overline{U}$ y armónica en U, donde U es una región acotada de $\mathbb{C}$. Supongamos además que $u = 0$ en la frontera de U; entonces

- Por el principio del máximo, $u \leq 0$ en $\overline{U}$.
- Por el principio del mínimo, $u \geq 0$ en $\overline{U}$.

Por lo tanto, $u = 0$ en U.

Corolario 1.1

Sean $U \subset \mathbb{C}$ abierto y acotado, $u1, u2 : \overline{U} \to \mathbb{R}$ continuas en $\overline{U}$ y armónicas en U. Si $u_1(z) = u_2(z)$ para todo $z \in \partial U$, entonces $u_1(z) = u_2(z)$ para todo $z \in U$.

♡

Parafraseando este resultado, vemos que si existe una solución $u : U \to \mathbb{R}$ al problema con condiciones iniciales

$$\begin{cases} \Delta u & = 0 \\ u(z) & = u_0(z), \quad \textit{para todo } z \in \partial U \end{cases}$$

donde $u_0 : \partial U \to \mathbb{R}$ es una función dada, entonces dicha solución es única.

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Sea u armónica en la región acotada y continua en $\overline{A}$. Entonces muestre que u alcanza su mínimo únicamente en $fr(A)$, a menos que u sea constante