VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

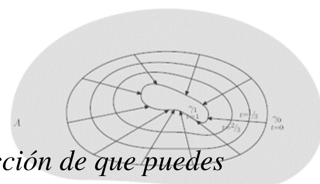
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 3. Integración Compleja

1.1 Más sobre el Teorema integral de Cauchy

Teorema 1.1 (Teorema de Liouville)

Sea f una función entera y acotada. Entonces f es constante. ♡

Como consecuencia del **teorema de Liouville**, tenemos el

Teorema 1.2 (Teorema fundamental del álgebra)

Todo polinomio de grado mayor o igual a 1, con coeficientes en $\mathbb{C}$, tiene al menos una raíz en $\mathbb{C}$. ♡

Demostración Sea $P(z)$ un polinomio como en el enunciado del teorema, y supongamos que P no tiene raíces, es decir, que $P(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Entonces la función $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ es analítica en $\mathbb{C}$. Veremos que f también es acotada. Puesto que el grado de P(z) es mayor o igual a 1, tenemos que $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, de modo que si fijamos $\epsilon > 0$, por definición de límite tenemos que existe $R > 0$ tal que $|f(z)| < \epsilon$ para todo $|z| > R$. Por otro lado, como el disco cerrado $|z| \leq R$ es compacto, $|f(z)|$ alcanza su máximo M ahí, de modo que si elegimos $M' = \max\{\epsilon, M\}$, tenemos que $|f(z)| \leq M'$ para todo $z \in \mathbb{C}$; por tanto, f es entera y acotada. Por el teorema de Liouville, f es constante, por tanto también P es constante, lo cual contradice el hecho de que el grado de P es mayor o igual a 1. ■

Ejemplo 1.1 Muestre que $z^n - z_0^n$ puede expresarse en la forma $z^n - z_0^n = (z - z_0)R(z)$, donde

$$R(z) = z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + z_0^2 z^{n-3} + \cdots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1}$$

es un polinomio de grado $n - 1$ en z.

Solución *Notemos que*

$$zR_{n-1} = z^n + z_0 z^{n-1} + z_0^2 z^{n-2} + \cdots + z z_0^{n-1}$$

$$z_0 R_{n-1} = z_0 z^{n-1} + z_0^2 z^{n-2} + \cdots + z_0^n$$

Por lo que

$$zR_{n-1} - z_0 R_{n-1} = (z - z_0)R_{n-1} = z^n - z_0^n$$

■

Ejemplo 1.2 Si z_0 es la raíz de $p(z) = 0$ que da el teorema fundamental, explique por qué se puede escribir

$$p(z) = a_n(z^n - z_0^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - z_0^{n-1}) + \cdots + a_1(z^n - z_0^n)$$

Solución *Vamos a considerar la expresión $p(z) - p(z_0)$ y obtenemos*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$
$$p(z_0) = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_0$$

Como z_0 es raíz entonces $p(z_0) = 0$ y por lo tanto

$$p(z) = p(z) - 0 = p(z) - p(z_0) = a_n(z^n - z_0^n) + a_{n-1}(z^{n-1} - z_0^{n-1}) + \cdots + a_1(z - z_0)$$

■

Una consecuencia más de la fórmula integral de Cauchy. Recordemos la condición

$$\lim_{w \to z_0} f(w)(w - z_0) = 0$$

que pedimos en el lema de Goursat.

Definición 1.1 (Singularidad removible)

Sean A un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, $z_0 \in A$ y $f : A \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una función analítica. Decimos que z_0 es una singularidad removible de f si y sólo si

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = 0$$

♣

Proposición 1.1 (Sobre singularidades removibles)

Sean A un conjunto abierto en $\mathbb{C}$, $z_0 \in A$ y $f : A \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ una función analítica. z_0 es una singularidad removible de f si y sólo si existe una función analítica $\widetilde{f} : A \to \mathbb{C}$ tal que $\widetilde{f}(z) = f(z)$ para todo $z \in A \setminus \{z_0\}$

♠

Demostración Si existe una función analítica $\widetilde{f} : A \to \mathbb{C}$ tal que $\widetilde{f}(z) = f(z)$ para todo $z \in A \setminus \{z_0\}$, entonces en particular $\widetilde{f}$ es continua en z_0 y por tanto

$$\lim_{z \to z_0} f(z)(z - z:0) = \lim_{z \to z_0} \widetilde{f}(z)(z - z:0) = 0$$

Por otro lado, si se cumple la condición sobre el límite, podemos definir $\widetilde{f}(z)$ como

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} dz;$$

sabemos que $\widetilde{f}$ es analítica y que de hecho es igual a $f(z)$ en todo punto donde ésta última esté definida, debido a la fórmula integral de Cauchy. ■

1.2 Principio del módulo máximo

Una de las consecuencias más sorprendentes y poderosas de la fórmula integral de Cauchy es el *teorema del módulo máximo*, también llamado el *principio del módulo máximo*. Éste establece que si f es una función analítica en una región A y no es constante, entonces $|f|$ no puede tener un máximo local en el interior de A (puede alcanzar un máximo sólo en la frontera de A).

Proposición 1.2 (Propiedad del valor medio)

Sea f analítica en el interior y sobre un círculo de radio r y centro z_0. Entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

♠

Demostración Por la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

donde $\gamma(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Pero por la definición de la integral

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} re^{i\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

■

La propiedad del valor medio se usará para establecer

Teorema 1.3

Sean A una región de $\mathbb{C}$ y $f : A \to \mathbb{C}$ una función analítica. si el módulo $|f(z)|$ alcanza su máximo en un punto $z_0 \in A$, entonces f es constante. ♡

Demostración Primero mostraremos que f es constante en un disco (abierto) con centro en z_0. Sea A' un disco de este tipo, tal que $A' \subset A$. Según la propiedad del valor medio

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(z_0 + re^{it})\, dt$$

lo que implica

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |f(z_0 + re^{it})|\, dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |f(z_0)|\, dt = |f(z_0)|$$

pero entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} |f(z_0| - |f(z_0 + re^{it})|\, dt = 0$$

Como el integrando es continuo y mayor o igual a 0, tenemos que $|f(z_0| = |f(z_0 + re^{it})|$. Puesto que esto vale para cualquier $r > 0$, siempre que la circunferencia esté contenida en A', tenemos que $|f(z)|$ es constante en A'. Recordemos que esto y el hecho de que f es analítica implican que f es constante en A'. Procediendo de manera análoga con cualquier punto z tal que $f(z) = f(z_0)$, tenemos que el conjunto

$$\{z \in A' \mid f(z) = f(z_0)\}$$

es abierto en A. Pero también este conjunto es cerrado en A, pues es justamente la imagen de un conjunto cerrado bajo una función continua; explícitamente, este conjunto es $f^{-1}(f(z_0))$. Como además es no vacío (pues z_0 está en él), la conexidad de A implica que es igual a todo A, lo que implica que f es constante en A. ■

Corolario 1.1

Sean A una región acotada de $\mathbb{C}$, $f : \overline{A} \to \mathbb{C}$ una función tal que es analítica en A y continua en la frontera ∂A de A. Entonces el módulo $|f(z)|$ de f alcanza su máximo en algún punto de ∂A. ♡

Demostración Como f es continua en el compacto $\overline{A}$, $|f(z)|$ alcanza su máximo en algún punto de $\overline{A}$. Si lo alcanza en un punto de ∂A no hay nada que demostrar. Supongamos que $|f(z)|$ alcanza su máximo en un punto $z_0 \in A$. Por el resultado anterior, f es constante en A. Por continuidad, f es constante en $\overline{A}$, de modo que $|f(z)|$ alcanza su máximo en algún punto (de hecho, en todos los puntos) de ∂A. ■

Ejemplo 1.3 Encuentre el máximo de $|\cos z|$ en $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Solución *Se tiene que* $\cos\ z$ *es una función entera, y entonces se puede aplicar el principio del módulo máximo, el cual dice que el máximo ocurre en la frontera del cuadrado.*

Ahora usando que

$$\cos\ z = \cos(x + iy) = \cos\ x \cos(iy) + i \operatorname{sen}\ x \operatorname{sen}(iy) = \cos\ x \cosh\ y - i \operatorname{sen}\ x \operatorname{senh}\ y$$

se tiene que

$$\begin{aligned} |\cos\ z|^2 &= \cos^2 x \cosh^2\ y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y \\ &= \cos^2 x \cosh^2\ y + (1 - \cos^2 x) \operatorname{senh}^2\ y \\ &= \cos^2 x(\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y) + \operatorname{senh}^2 y \\ &= \cos^2 x + \operatorname{senh}^2 y \end{aligned}$$

Tenemos entonces

- *En la frontera* $y = 0$, $|\cos\ z|^2$ *tiene como máximo 1.*
- *Para* $x = 0$ *el máximo es* $1 + \operatorname{senh}^2(2\pi)$, *ya que* $\operatorname{senh}^2 y$ *crece con y.*
- *Para* $x = 2\pi$ *el máximo es otra vez* $1 + \operatorname{senh}^2(2\pi)$.
- *Para* $y = 2\pi$ *el máximo es otra vez* $1 + \operatorname{senh}^2(2\pi)$.

Así, el máximo de $|\cos\ z|^2$ *ocurre en* $x = 0$, $x = 2\pi$ *y* $y = 2\pi$ *es* $1 + \operatorname{senh}^2(2\pi) = \cosh^2(2\pi)$. *Por lo tanto, el máximo de* $|\cos\ z|$ *en* $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ *es* $\cosh(2\pi)$. ■

Ejemplo 1.4 Encontrar el máximo valor de $|z^2 + 2z - 3|$ en el disco $\overline{B}(0, 1)$

Solución *Claramente* $z^2 + 2z - 3$ *es analítica en el disco* $B(0, 1)$ *y continua en el disco* $\overline{B}(0, 1)$. *Por el teorem del módulo máximo, el valor máximo de* $|z^2 + 2z - 3|$ *ocurre en la frontera del disco, es decir, en el círculo* $|z| = 1$. *Parametrizando el círculo con* $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, *tenemos*

$$\begin{aligned} |z^2 + 2z - 3|^2 &= (z^2 + 2z - 3)\overline{(z^2 + 2z - 3)} \\ &= (e^{2it} + 2e^{it} - 3)((e^{-2it} + 2e^{-it} - 3)) \\ &= 14 - 6\cos 2t - 8\cos t \end{aligned}$$

La función $14 - 6\cos 2t - 8\cos t$ *alcanza su máximo cuando* $t = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$. *Por tanto, el valor máximo de* $|z^2 + 2z - 3|$ *es* $\frac{8}{\sqrt{3}}$ ■

El principio del módulo máximo se puede ver como un teorema que caracteriza a ciertas funciones analíticas, a saber, a las funciones constantes.

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Muestre que para $|z| < R$, la transformación
$$T : z \to \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z_0} z}$$
envía el disco abierto de radio R, en forma uno a uno y sobre, en el disco de radio 1 y envía z_0 al origen.