# Variable Compleja

# Notas del curso Variable Compleja 1

## Unidad 1

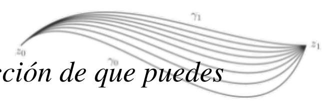
**Autor:** Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

**Instituto:** Facultad de Ciencias UNAM

**Fecha:** May. 2, 2021

**Versión:** 4.1

**Bio**: Semestre 2022-1



*La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.*

# Índice general

**1. Unidad 1. Introducción** **1**

1.1. Proyección Estereografica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

1.2. Punto al infinito . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

1.3. Esfera de Riemann . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

1.4. Proyección estereografica . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 1

Capítulo 1 Problemas para pensar . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

# Capítulo 1 Unidad 1. Introducción

## 1.1 Proyección Estereografica

Teniendo resuelto el problema de extraer raíces en el sistema de números complejos, todavía nos queda otro problema con el aritmética real, la de no poder dividir por cero.

## 1.2 Punto al infinito

Para resolver esto, ampliamos el plano complejo por un elemento ideal, el **punto en infinito**, que se denota por $\infty$ y se supone que satisface

$$\frac{1}{0} = \infty, \quad \frac{1}{\infty} = 0$$

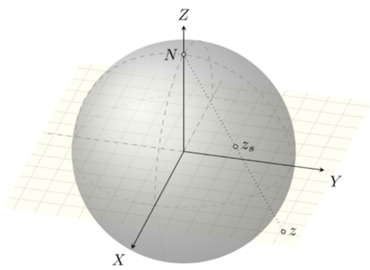
El nombre está motivado por la observación de que el punto $\frac{1}{z}$ se mueve más y más lejos (hasta infinito) cuando z se acerca a cero (y viceversa). La unión de el plano complejo C con el punto en el infinito se llama **plano complejo extendido** y se denota por $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

## 1.3 Esfera de Riemann

Un modelo que representa el **plano extendido** lo constituye la **esfera unitaria** $S^2$ en $\mathbb{R}^3$, esto es:

$$\mathbb{S}^2 = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}$$

Si $N = (0, 0, 1)$, podemos identificar $S^2 \setminus \{N\}$ con $\mathbb{R}^2$ donde identificamos $\mathbb{R}^2$ con el plano $\{(x_1, x_2, 0) \;\big|\; x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2\}$, y el punto N con el punto al infinito



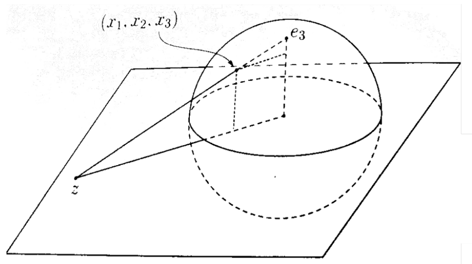

## 1.4 Proyección estereografica

La esfera unitaria

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 = 1\}$$

llamada **esfera de Riemann** es el modelo requerido para incluir el punto al infinito.
Para asociar cada punto $z$ del plano complejo $\mathbb{C}$ con un punto $(x_1, x_2, x_3)$ de $S^2$ usamos la siguiente idea.

1. Se toma un punto $e_3 = (0, 0, 1) \in S^2$ y desde $e_3$ se proyecta una línea hacia un punto cualquiera $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$. Esta línea cruza el plano complejo en un único punto z



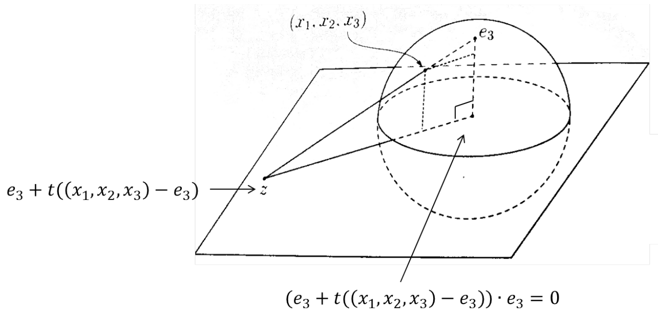

2. Vamos a busca la asociación del punto $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$ al punto $(u, v)$ en el plano que representaría al punto $z = u + iv \in \mathbb{C}$

(a) La recta de $e_3$ al punto $(x_1, x_2, x_3)$ se puede parametrizar

$$e_3 + t((x_1, x_2, x_3) - e_3), \quad t \in \mathbb{R}$$

(b) Para esta recta existe un valor t para el cual

$$[e_3 + t((x_1, x_2, x_3) - e_3)] \cdot e_3 = 0$$




es decir

$$\begin{aligned}
[e_3 + t((x_1, x_2, x_3) - e_3)] \cdot e_3 = 0 \;\Rightarrow\; & [(0,0,1) + t((x_1, x_2, x_3) - (0,0,1))] \cdot (0,0,1) = 0 \\
\Rightarrow\; & [tx_1, tx_2, 1 + t(x_3 - 1)] \cdot (0,0,1) = 0 \\
\Rightarrow\; & 1 + t(x_3 - 1) = 0 \\
\Rightarrow\; & t = \frac{1}{1 - x_3}
\end{aligned}$$

(c) Con este valor de t buscamos el punto z del plano complejo asociado al punto $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$, se tiene entonces

$$\begin{aligned}
e_3 + \frac{1}{1 - x_3}((x_1, x_2, x_3) - e_3) &= e_3 + \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, \frac{x_3 - 1}{1 - x_3}\right) \\
&= (0,0,1) + \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, \frac{x_3 - 1}{1 - x_3}\right) \\
&= \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0\right)
\end{aligned}$$

(d) Podemos entonces definir la función $\pi : S^2 - \{e_3\} \to \mathbb{C}$ como

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0\right)$$

3. Ahora vamos a encontrar una asociación del punto $z = \pi(P) = u + iv = \dfrac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}$ del plano complejo al punto $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$, para esto se tiene

(a) $z = \pi(x_1, x_2, x_3)$

(b) $x_1^2 + x_2^2 + x_2^2 = 1$

(c) Entonces

$$|z|^2 = \left|\frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}\right|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}$$

por lo tanto

$$|z|^2 = \frac{1 + x_3}{1 - x_3} \Rightarrow \boxed{x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}}$$

Por otro lado

$$z + \overline{z} = \left(\frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3}\right) + \left(\frac{x_1}{1 - x_3} - i\frac{x_2}{1 - x_3}\right)$$

$$\Rightarrow z + \overline{z} = \frac{2x_1}{1 - x_3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_1 = \frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}}$$

finalmente

$$z - \overline{z} = \left(\frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3}\right) - \left(\frac{x_1}{1 - x_3} - i\frac{x_2}{1 - x_3}\right)$$

$$\Rightarrow z - \overline{z} = \frac{2ix_2}{1 - x_3}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_2 = \frac{z - \overline{z}}{i(|z|^2 + 1)}}$$

por tanto la función $\pi^{-1} : \mathbb{C} \to S^2 - \{e_3\}$ esta dada por

$$\pi^{-1}(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \overline{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)$$

En resumen La función $\pi : S^2 - \{e_3\} \to \mathbb{C}$ definida como

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i\frac{x_2}{1 - x_3}$$

La función $\pi^{-1} : \mathbb{C} \to S^2 - \{e_3\}$ dada por

$$\pi^{-1}(z) = \left(\frac{z + \overline{z}}{|z|^2 + 1}, \frac{z - \overline{z}}{i(|z|^2 + 1)}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)$$

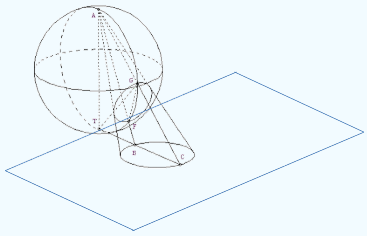
Al hacer corresponder $\infty$ con el polo $e_3$ y con las funciones $\pi$ y $\pi^{-1}$ se obtiene una biyección de $S^2$ con $\mathbb{C}$. A esta biyección se le llama **proyección estereográfica.**

Podemos notar además que, bajo la proyección estereográfica, los puntos del ecuador corresponden a la circunferencia unitaria con centro en el origen, el hemisferio sur corresponde a los puntos en el interior de la circunferencia, y el hemisferio norte a los puntos en el exterior de la circunferencia. En particular, la reflexión en el círculo unitario corresponde a reflejar con respecto al plano que pasa por el ecuador.

A continuación algunas propiedades de la **proyección estereografica**:

**Proposición 1.1**

*Bajo la proyección estereográfica, rectas en $\mathbb{C}$ y círculos en $\mathbb{C}$ se transforman en rectas y círculos en $S^2$ y viceversa*



**Demostración** Primero probaremos que un círculo en la esfera $S^2$ se transforma en una recta o un círculo en el plano. Un círculo en la esfera $S^2$ es intersección de un plano con la esfera, por los que sus puntos satisfacen una ecuación de la forma

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

Por lo tanto, este círculo es la imagen bajo la proyección estereográfica de un conjunto cuyos puntos satisfacen la siguiente ecuación en el plano

$$a\left(\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}\right) + b\left(\frac{z-\overline{z}}{i(|z|^2+1)}\right) + c\left(\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\right) = d$$

escribiendo $z = x + iy$, se obtiene

$$2ax + 2by + c(x^2+y^2-1) = d(x^2+y^2+1) \quad (1)$$

que es la ecuación de una recta o un círculo en el plano, dependiendo si $c = d$ ó $c \neq d$.
Si ocurriera en $(1)$ que $c = d$ entonces se tiene la ecuación de una recta.

$$2ax + 2by = c + d$$

Si ocurriera en $(1)$ que $c \neq d$ podemos completar cuadrados y obtenemos

$$\left(x + \frac{a}{c-d}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{c-d}\right)^2 = k$$

donde $k = \left(\dfrac{d+c}{c-d}\right) + \left(\dfrac{a}{c-d}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{c-d}\right)^2$.
Por lo tanto $(1)$ representa la ecuación de una recta o un círculo.
Por otro lado, una recta en el plano está definida

$$ax + by = c$$

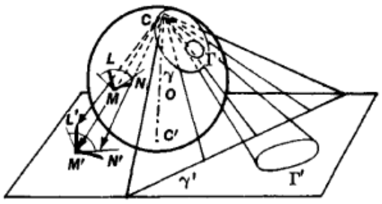
Estos puntos bajo la proyección estereográfica son llevados al conjunto de puntos en la esfera definidos por la ecuación

$$a\left(\frac{x_1}{1-x_3}\right) + b\left(\frac{x_2}{1-x_3}\right) = c$$

$$\Rightarrow\ ax_1 + bx_2 = c(1-x_3)$$

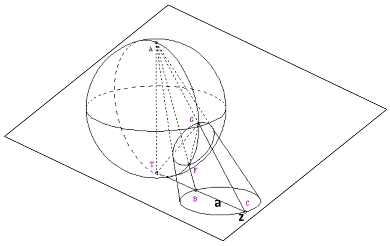
$$\Rightarrow\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = c$$

los cuales estan contenidos en la intersección de un plano y la esfera, es decir se trata de un círculo.
Se tiene también que $(0, 0, 1)$ satisface dicha ecuación, entonces éste círculo pasa por el polo norte




Finalmente un círculo en el plano está definido por

$$|z-a| = r$$




a partir de esta espresión se tiene

$$|z-a|^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \ (z-a)\overline{(z-a)} = r^2$$

$$\Rightarrow \ (z-a)(\overline{z}-\overline{a}) = r^2$$

$$\Rightarrow \ z\overline{z} - z\overline{a} - a\overline{z} + a\overline{a} = r^2$$

$$\Rightarrow \ |z|^2 - z\overline{a} - a\overline{z} + |a|^2 = r^2$$

Ahora bien

$$x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \ \Rightarrow \ |z|^2 = \frac{1+x_3}{1-x_3}$$

y también

$$\begin{pmatrix} a = a_1 + ia_2 \\ z = x + iy \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ Re(a\overline{z}) = \frac{a\overline{z} + \overline{a}z}{2} \ \Rightarrow \ 2Re(a\overline{z}) = a\overline{z} + \overline{a}z$$

de acuerdo a lo anterior

$$|z|^2 - z\overline{a} - a\overline{z} + |a|^2 = r^2 \ \Rightarrow \ \frac{1+x_3}{1-x_3} - 2Re(a\overline{z}) = r^2 - |a|^2$$

y como $Re(a\overline{z}) = a_1x + a_2y$ entonces

$$\frac{1+x_3}{1-x_3} - 2Re(a\overline{z}) = r^2 - |a|^2$$

$$\Rightarrow \ \frac{1+x_3}{1-x_3} - 2(a_1x + a_2y) = r^2 - |a|^2$$

$$\Rightarrow \ \frac{1+x_3}{1-x_3} - 2(a_1x - 2a_2y) = r^2 - |a|^2$$

de la función $\pi$ se tiene

$$\pi(x_1,x_2,x_3) = \underbrace{\frac{x_1}{1-x_3}}_{x} + i\underbrace{\frac{x_2}{1-x_3}}_{y}$$

según lo anterior

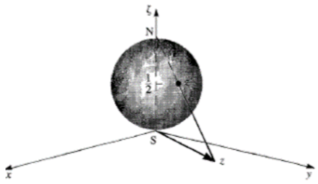
$$\frac{1+x_3}{1-x_3} - 2(a_1x - 2a_2y) = r^2 - |a|^2$$

$$\Rightarrow \frac{1+x_3}{1-x_3} - 2a_1\left(\frac{x_1}{1-x_3}\right) - 2a_2\left(\frac{x_2}{1-x_3}\right) = r^2 - |a|^2$$
$$\Rightarrow 1 + x_3 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 = (r^2 - |a|^2)(1 - x_3)$$

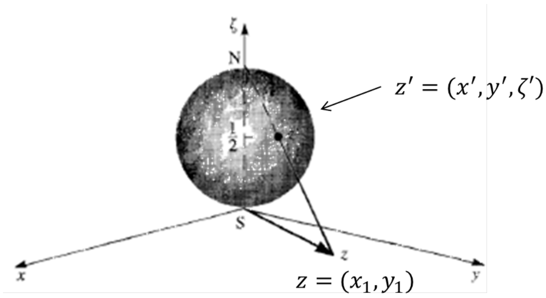
estos puntos están contenidos en un plano y por lo tanto constituyen un círculo en la esfera. ■

## Capítulo 1  Problemas para pensar

1. Cuando todos los puntos del círculo unitario $|z| = 1$ se proyectan estereográficamente sobre el esfera de la figura, ¿dónde se encuentran?



2. En la misma figura ¿Dónde se proyectan todos los puntos dentro del círculo unitario?
3. En la misma figura ¿Dónde se proyectan todos los puntos fuera del círculo unitario?
4. Si $z = x_1 + iy_1$ como se ve en la figura




y si $z'$ (proyección de z sobre la esfera) tiene coordenadas $z' = (x', y', \zeta')$ demuestre algebraicamente que

$$x' = x_1\left(1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2 + y_1^2 + 1}\right), \quad y' = y_1\left(1 - \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2 + y_1^2 + 1}\right), \quad \zeta' = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2 + y_1^2 + 1}$$