VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

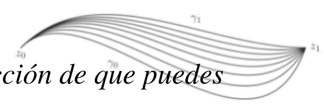
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 2. Funciones de Variable Compleja

1.1 Ejemplos y propiedades de las Transformaciones de Möbius

Ejemplo 1.1 Encuéntrese una transformación de Möbius que mapee el círculo $|z - i| = 1$ en el círculo $|w - 1| = 2$.

Solución *Si consideramos la sucesión de transformaciones*

- *Traslación* $\zeta = z - i$
- *Homotecia* $\omega = 2\zeta$
- *Traslación* $w = \omega + 1$

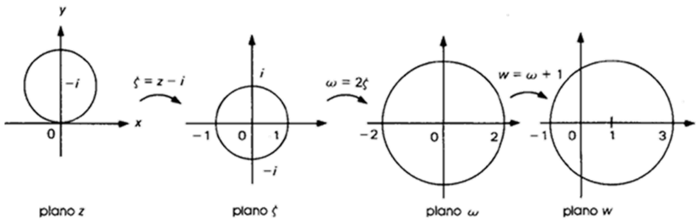
La composición de estos tres mapeos es

$$w = \omega + 1 = 2\zeta + 1 = 2(z - i) + 1$$

o sea

$$w = 2z + (1 - 2i)$$

y esta transformación mapea $|z - i| = 1$ *en* $|w - 1| = 2$



Geométricamente, es claro que traslaciones y rotaciones lleva círculos a círculos. Revisaremos la transformación $T(z) = \dfrac{1}{z}$

Proposición 1.1 (Transformación $T(z) = \dfrac{1}{z}$)

La transformación $z \to \dfrac{1}{z}$ *manda al conjunto de rectas y circunferencias en rectas y circunferencias* ♠

Demostración Bajo la inversión, el círculo $|z - z_0| = r$ satisface

$$\begin{aligned} 0 = |z - z_0|^2 - r^2 &= |z|^2 - 2Re(\overline{z}z_0) - r^2 \\ &= \frac{1}{|w|^2} + \left(|z|^2 - r^2\right) - \frac{2}{|w|^2}Re(z_0 w) \end{aligned}$$

Si $|z_0| = r$, indicando que el círculo pasa por el origen, se obtiene la ecuación

$$0 = \frac{1 - 2Re(z_0 w)}{|w|^2} \tag{1.1}$$

de donde resulta la recta $Re(z_0 w) = \dfrac{1}{2}$.

Si $|z_0| \neq 0$, el origen no pertenece al círculo, así que al multiplicar

$$0 = \frac{1}{|w|^2} + \left(|z|^2 - r^2\right) - \frac{2}{|w|^2}Re(z_0 w)\left(\frac{|w|^2}{|z_0|^2 - r^2}\right)$$

se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{|z_0|^2 - r^2} + |w|^2 - \frac{2}{|z_0|^2 - r^2} Re(z_0 w) \\ &= \left| w - \frac{z_0}{|z_0|^2 - r^2} \right|^2 - \frac{r^2}{(|z_0|^2 - r^2)^2} \end{aligned}$$

un círculo. Al invertir los pasos que condujeron a la ecuación $(1{,}1)$, se sigue que las rectas se mapean en círculos que pasan por el origen. ■

Puesto que cualquier transformación de Möbius es una composición de estas transformaciones, se tiene el siguiente resultado

Proposición 1.2 (Propiedad de las transformaciones de Möbius)

Toda transformación de Möbius manda rectas y circunferencias en rectas y circunferencias ♠

✍ **Ejercicio 1.1** Hallar una transformación de Möbius $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que mande a los puntos z_1, z_2, z_3 en los puntos w_1, w_2, w_3 respectivamente.

Solución *Necesitamos una transformación de Möbius*

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad con \;\; ad - bc \neq 0$$

que satisfaga

$$w_1 = \frac{az_1 + b}{cz_1 + d}, \quad w_2 = \frac{az_2 + b}{cz_2 + d}, \quad w_3 = \frac{az_3 + b}{cz_3 + d}$$

hacemos las diferencias

$$w - w_1 = \frac{az + b}{cz + d} - \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} = \frac{(cz_1 + d)(az + b) - (az_1 + b)(cz + d)}{(cz + d)(cz_1 + d)} = \frac{(ad - bc)(z - z_1)}{(cz + d)(cz_1 + d)}$$

$$w - w_3 = \frac{az_3 + b}{cz_3 + d} - \frac{az_3 + b}{cz_3 + d} = \frac{(cz_3 + d)(az + b) - (az_3 + b)(cz + d)}{(cz + d)(cz_3 + d)} = \frac{(ad - bc)(z - z_3)}{(cz + d)(cz_3 + d)}$$

$$w_2 - w_1 = \frac{(ad - bc)(z_2 - z_1)}{(cz_2 + d)(cz_1 + d)}$$

$$w_2 - w_3 = \frac{(ad - bc)(z_2 - z_3)}{(cz_2 + d)(cz_3 + d)}$$

Tenemos entonces

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \frac{(z - z_1)(z_2 - z_3)}{(z - z_3)(z_2 - z_1)}$$

y se va despejando w en términos de z.

Podemos definir entonces

$$\frac{(w - w_1)(w_2 - w_3)}{(w - w_3)(w_2 - w_1)} = \begin{cases} \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} & si \quad z_1, z_2, z_1 \in \mathbb{C} \\ \frac{z_2-z_3}{z-z_3} & si \quad z_1 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z-z_3} & si \quad z_2 = \infty \\ \frac{z-z_1}{z_2-z_1} & si \quad z_3 = \infty \end{cases}$$

■

✍ **Ejercicio 1.2** Hallar una transformación de Möbius $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que mande a los puntos $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty$ en los puntos $w_1 = -1, w_2 = -i, w_3 = 1$ respectivamente.

Solución *Usando lo anterior*

$$\frac{(w + 1)(-i - 1)}{(w - 1)(-i + 1)} = \frac{z - 0}{1 - 0}$$

$$\Rightarrow \frac{w+1}{w-1}(-i) = z$$

$$\Rightarrow \frac{w+1}{w-1} = zi$$

$$\Rightarrow w+1 = zi(w-1)$$

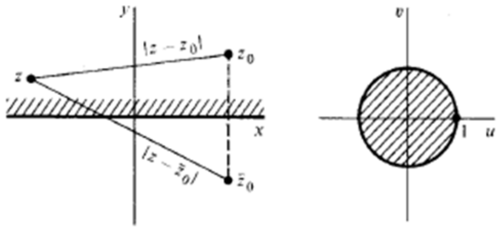
$$\Rightarrow w+1 = wzi - zi$$

$$\Rightarrow w - wiz = -1 - zi$$

$$\Rightarrow w(1-iz) = -1 - iz$$

$$\Rightarrow w = \frac{-1-iz}{1-iz} = \frac{-1-iz}{1-iz}\left(\frac{i}{i}\right) = \frac{z-i}{z+i}$$

Esta transformación de hecho manda la recta real en el circulo unitario y el interior del circulo unitario en el semiplano.



Definición 1.1 (Razón cruzada)

La transformación

$$T(z) = \frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

y que se puede denotar $T(z) = (z; z_1, z_2, z_3)$ *la llamaremos* ***razón cruzada*** *de los números complejos* z, z_1, z_2, z_3 ♣

Proposición 1.3 (Propiedades de la razón cruzada)

La razón cruzada $(z; z_1, z_2, z_3)$ *es un número real si y sólo si los números* $z; z_1, z_2, z_3$ *están en una misma circunferencia (o recta)* ♠

Demostración Si se piensa en la razón cruzada como una transformación de Möbius T. Se tiene que $z; z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$ si´y sólo si $T(z)$ está en la recta que pasa por $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = \infty$. Como T es invertible y su inversa es también una transformación de Möbius, lo anterior pasa si y sólo si z está en la circunferencia (o recta) que pasa por z_1, z_2, z_3. ■

Proposición 1.4 (Propiedad de la razón cruzada)

Toda transformación de Möbius preserva la razón cruzada. ♠

Demostración Sea T una transformación de Möbius; queremos ver que

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3))$$

pero observemos que el lado derecho de esta ecuación es nuevamente una transformación de Möbius, que cumple

$$\begin{aligned}(T(z_1); T(z_1), T(z_2), T(z_3)) &= 0\\ (T(z_2); T(z_1), T(z_2), T(z_3)) &= 1\\ (T(z_3); T(z_1), T(z_2), T(z_3)) &= \infty\end{aligned}$$

el resultado se sigue entonces por unicidad. ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Hallar una transformación de Möbius $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que mande a los puntos $z_1 = -1, z_2 = 1, z_3 = 2$ en los puntos $w_1 = 0, w_2 = -1, w_3 = -3$ respectivamente.