VARIABLE COMPLEJA

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 1

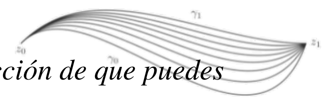
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

1. Unidad 1. Introducción **1**

1.1. Regiones del plano complejo 1

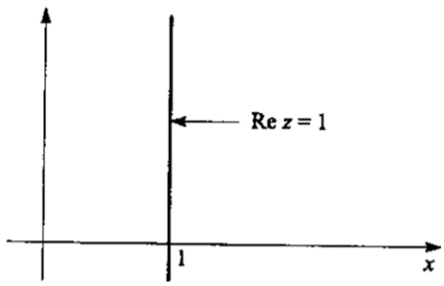
Capítulo 1 Problemas para pensar 5

Capítulo 1 Unidad 1. Introducción

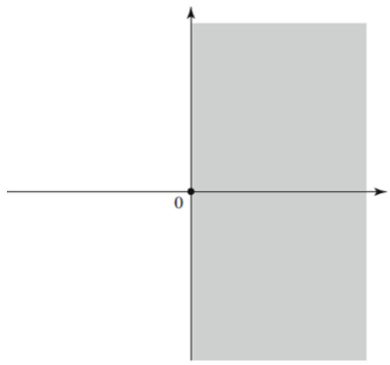
1.1 Regiones del plano complejo

En esta parte veremos como las ecuaciones y desigualdades en los números complejos, pueden representarse por medio de curvas y áreas en el plano.

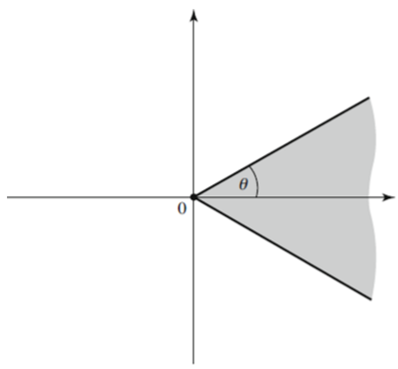
Ejemplo 1.1 Consideremos la ecuación $Re(z) = 1$. Si la reescribimos en términos de x e y, tendremos $Re(x + iy) = 1$, esto es, $x = 1$. En el plano complejo, el lugar geométrico de los puntos que satisfacen la expresión $x = l$ es la recta vertical infinita que se muestra en la figura



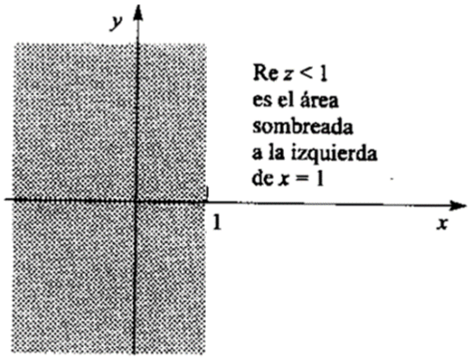
Ejemplo 1.2 El conjunto de puntos dado por la ecuación $Re(z) > 0$ está representado geométricamente por el semiplano derecho.



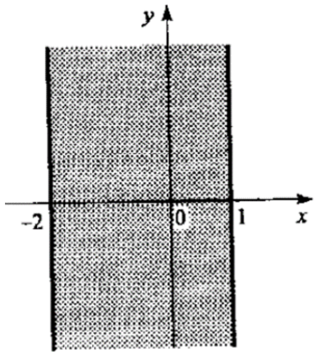
Ejemplo 1.3 El conjunto de puntos en el plano complejo $\{z : -\theta < \arg z < \theta\}$ es un sector angular.



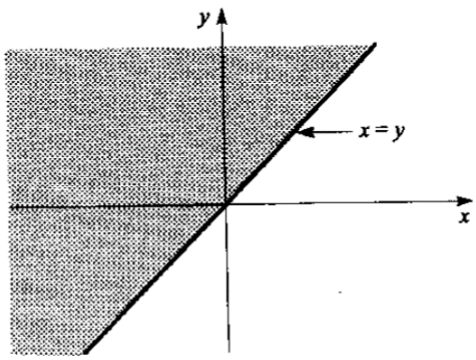
Ejemplo 1.4 Consideremos ahora la desigualdad $Re(z) < l$, que equivale a $x < l$. Los puntos que satisfacen esta desigualdad deben estar en la región t que se encuentra a la izquierda de la recta de la figura



Ejemplo 1.5 De modo similar, la doble desigualdad $-2 \leq Re(z) \leq 1$, que equivale a $-2 \leq x \leq 1$, corresponde a los puntos que están entre y sobre las rectas verticales $x = -2$ y $x = l$. Por lo tanto, $-2 \leq Re(z) \leq 1$ define la franja infinita que aparece en la figura



Ejemplo 1.6 Consideremos la desigualdad $Re(z) \leq Im(z)$. Esto implica que $x \leq y$. El signo de igualdad es válido para $x = y$, es decir, para los puntos de la recta infinita que se muestra en la figura



La desigualdad $Re(z) < Im(z)$ describe los puntos que satisfacen $x < y$, esto es, los puntos que se encuentran a la izquierda de la recta a 45 que aparece en la figura. Así, $Re(z) \leq Im(z)$ representa el área sombreada de la figura, incluyendo la frontera $x = y$.

La descripción de círculos y sus interiores es particularmente importante y fácil de efectuar.

Definición 1.1 (Distancia entre números complejos)

Sean $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ dos números complejos, la distancia entre z_1 y z_2 se denota $|z_1 - z_2|$ y se define de la siguiente manera

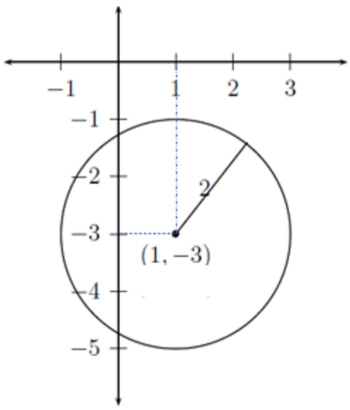
$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

♣

esta distancia nos permite describir curvas y regiones en el plano cartesiano.

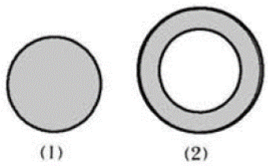
Ejemplo 1.7 La ecuación $|z-1+3i|=2$, representa una circunferencia con centro en $z_0=1-3i$ y radio $r=2$. Usando la definición anterior

$$\begin{aligned} |z-1+3i|=2 &\Rightarrow |x+iy-1+3i|=2 \\ &\Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+3)^2}=2 \\ &\Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=2^2 \end{aligned}$$

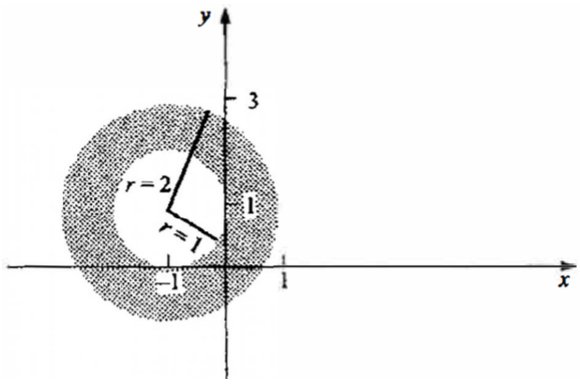


Con frecuencia es necesario limitarse a considerar los puntos z de alguna región del plano. En la Figura se muestran algunos ejemplos de regiones corrientes:

- El disco $|z-z_0|<\rho$, que es el interior del círculo de centro z_o y radio ρ
- El anillo o corona circular $\rho_1<|z-z_0|<\rho_2$ de centro en z_0, radio interior ρ_1 y radio exterior ρ_2;



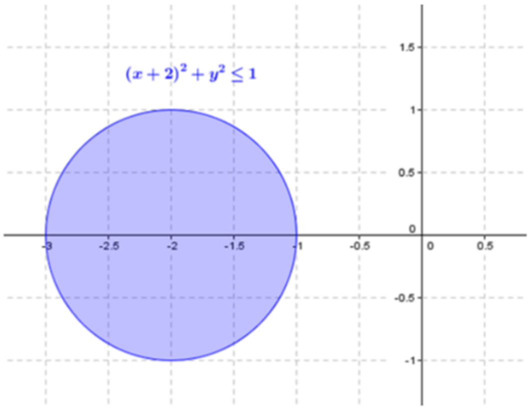
Ejemplo 1.8 ¿Qué región describe la desigualdad $1<|z+1-i|<2$?
En este caso esta desigualdad puede expresarse en la forma $\rho_1<|z-z_0|<\rho_2$, donde $\rho_1=1$, $\rho_2=2$, $z_0=-1+i$. La región correspondiente es el área sombreada que se encuentra entre los círculos mostrados en la figura, pero que excluye los círculos propiamente dichos.



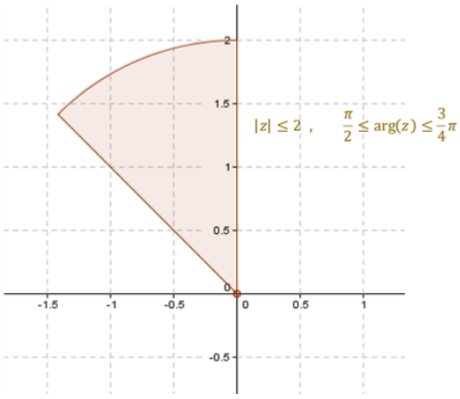
Ejemplo 1.9 Hallar la región del plano complejo determinada por: $\{z\in\mathbb{C} \mid |z+2|\leq 1\}$.

En este caso si $z = x + iy$ resulta

$$\begin{aligned} |z+2| \leq 1 &\Rightarrow |x+iy+2| \leq 1 \\ &\Rightarrow |(x+2)+iy| \leq 1 \\ &\Rightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2} \leq 1 \\ &\Rightarrow (x+2)^2+y^2 \leq 1 \end{aligned}$$



Ejemplo 1.10 Hallar la región del plano complejo determinada por: $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| \leq 2,\ \frac{\pi}{2} \leq arg(z) \leq \frac{3\pi}{4} \right\}$. Esta región está definida utilizando la expresión trigonométrica de un número complejo. $|z| \leq 2$ quiere decir que el módulo debe ser menor o igual a 2, y la otra condición establece que el argumento está entre $\frac{\pi}{2}$, y $\frac{3\pi}{4}$



Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Describe con palabras o un bosquejo la porción del plano complejo correspondiente a las siguientes ecuaciones o desigualdades.
   - $Re(z) > Im(z+i)$
   - $-1 < Re(z) \leq Im(z+i)$
   - $|z-2i| \geq 2$