Variable Compleja

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 1

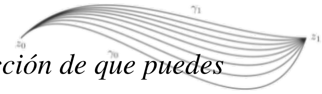
Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1



La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 1. Introducción

1.1 Series

Dada una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos, se puede considerar una nueva sucesión $\{S_n\}$, llamada sucesión de las sumas parciales de los z_n, definida en la forma siguiente

$$\begin{aligned} S_1 &= z_1 \\ S_2 &= z_1 + z_2 \\ &\cdots \\ S_n &= z_1 + z_2 + \cdots + z_n \end{aligned}$$

Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un número S, entonces se escribe

$$S = \sum_{1}^{\infty} z_n \quad o \quad S = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

y la serie $\sum_{1}^{\infty} z_n$ se dice convergente. S se llama la suma de la serie $\sum_{1}^{\infty} z_n$. Si la sucesión $\{S_n\}$ de las sumas parciales diverge, se dice que la serie $\sum_{1}^{\infty} z_n$ es divergente.

Si se tiene una sucesión $\{z_n\}$, $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$, entonces se define

$$\sum_{0}^{\infty} z_n = z_0 + \sum_{1}^{\infty} z_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n + \cdots$$

$\sum_{0}^{\infty} z_n$ no es otra cosa que el límite de $\{S_n\}$, $S_n = z_0 + z_1 + \cdots + z_n$ $(n = 0, 1, 2, 3, ...)$

$$\sum_{1}^{\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} z_n$$

Definición 1.1 (Series Geométricas)

Una serie geométrica es cualquier serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} az^{k-1} = a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1} + \cdots \tag{1.1}$$

♣

el n-ésimo término de la sucesión de sumas parciales es

$$S_n = a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1}$$

Cuando una serie infinita es una serie geométrica, siempre es posible encontrar una fórmula para S_n. Para comprobar por qué esto es así, se multiplica S_n por z,

$$zS_n = az + az^2 + az^3 + \cdots + az^n$$

y se resta este resultado a S_n. Se eliminan todos los términos excepto el primer término en S_n y el último término de zS_n

$$\begin{aligned} S_n - zS_n &= (a + az + az^2 + az^3 + \cdots + az^{n-1}) - (az + az^2 + az^3 + \cdots + az^{n-1} + az^n) \\ &= a - az^n \end{aligned}$$

Tenemos entonces
$$S_n(1-z) = a(1-z^n) \;\Rightarrow\; S_n = \frac{a(1-z^n)}{1-z}$$
Ahora $z^n \to 0$ conforme $n \to \infty$ siempre que $|z| < 1$, y así
$$S_n \to \frac{a}{1-z}$$
En otras palabras, para $|z| < 1$, la suma de una serie geométrica es
$$\boxed{\frac{a}{1-z} = a + az + az^2 + \cdots + az^{n-1} + \cdots}$$

Ejemplo 1.1 La serie infinita
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^k}{5^k} = \frac{1+2i}{5} + \frac{(1+2i)^2}{5^2} + \frac{(1+2i)^3}{5^3} + \cdots$$
es una serie geométrica de la forma $(1{,}1)$ con $a = \frac{1}{5}(1+2i)$ y $z = \frac{1}{5}(1+2i)$. Ya que $|z| = \frac{\sqrt{5}}{5} < 1$, la serie es convergente y su suma está dada por
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^k}{5^k} = \frac{\frac{1+2i}{5}}{1 - \frac{1+2i}{5}} = \frac{1+2i}{4-2i} = \frac{1}{2}i$$

Teorema 1.1 (Una condición necesaria de la convergencia)

Si $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ *converge, entonces* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

Demostración Sea L la suma de la serie. Entonces, $S_n \to L$ y $S_{n-1} \to L$ cuando $n \to \infty$. Al tomar el límite de ambos lados de $S_n - S_{n-1} = z_n$ cuando $n \to \infty$ se obtiene la conclusión deseada. ■

Comentario La contrapuesta del resultado anterior es la conocida prueba del n-ésimo término para la divergencia de una serie infinita

Teorema 1.2 (Prueba del n-ésimo término para la divergencia)

Si $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$, *entonces,* $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ *diverge.*

Ejemplo 1.2 La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ik+5)}{k}$ diverge ya que $z_n = \frac{(in+5)}{n} \to i \neq 0$ conforme $n \to \infty$. La serie geométrica $(1{,}1)$ diverge si $|z| \geq 1$ porque aún en el caso de que $\lim_{n\to\infty} |z^n|$ exista, el límite no es cero.

Teorema 1.3 (Propiedades de las Series)

Sean $\sum_{1}^{\infty} z_n$ *y* $\sum_{1}^{\infty} w_n$ *dos series convergentes. Entonces*

a) $\sum_{1}^{\infty}(z_n + w_n) = \sum_{1}^{\infty} z_n + \sum_{1}^{\infty} w_n$

b) *Si a es una constante* $\sum_{1}^{\infty}(az_n) = a\sum_{1}^{\infty} z_n$

Demostración Aplicamos los resultados de sucesiones de números complejos a las sucesiones de sumas parciales

a) $\sum_{1}^{n}(z_n + w_n) = \sum_{1}^{n} z_n + \sum_{1}^{n} w_n$ por lo que

$$\begin{aligned}\sum_{1}^{\infty}(z_n + w_n) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n}(z_n + w_n)\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{1}^{n} z_n + \sum_{1}^{n} w_n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n} z_n + \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n} w_n\\ &= \sum_{1}^{\infty} z_n + \sum_{1}^{\infty} w_n\end{aligned}$$

b) $\sum_{1}^{n}(az_n) = a\sum_{1}^{n} z_n$ por lo que

$$\begin{aligned}\sum_{1}^{\infty} az_n &= \lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n} az_n\\ &= a\lim_{n\to\infty}\sum_{1}^{n} z_n\\ &= a\sum_{1}^{\infty} z_n\end{aligned}$$

■

Teorema 1.4 (Condición necesaria y suficiente de convergencia de una serie)

Condición necesaria y suficiente para que una serie $\sum_{1}^{\infty} z_n$ *converja es que, para todo* $\epsilon > 0$*, haya un entero* $N > 0$ *tal que:*

$$|S_m - S_n| = |z_{n+1} + \cdots + z_m| < \epsilon \quad \textit{para } \ m > n > N$$

♡

Demostración El teorema dice precisamente que la sucesión de las sumas parciales $\{S_n\}$ converge si, y sólo si, $\{S_n\}$ es una sucesión de Cauchy, y esto no es otra cosa que el criterio de Cauchy relativo a sucesiones. ■

Teorema 1.5 (Condición necesaria de convergencia de series)

Condición necesaria (aunque no suficiente) para que la serie $\sum_{1} \infty z_n$ *sea convergencte es que*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$$

♡

Demostración Como $z_n = S_n - Sn - 1$, se tiene

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

■

Definición 1.2 (Series absolutamente convergentes)

Una serie $\sum_{1}^{\infty} z_n$ *se llama absolutamente convergente si* $\sum_{1}^{\infty} |z_n|$ *converge*

♣

Teorema 1.6 (Convergencia absoluta y convergencia de series)

Toda serie absolutamente convergente es convergente

♡

Demostración Como $\sum_{1}^{\infty} |z_n|$ converge, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $N > 0$ tal que

$$|z_{n+1}| + \cdots + |z_m| < \epsilon \ \ para \ \ m > n > N$$

lo anterior por el criterio de Cauchy. Por consiguiente

$$|z_{n+1} + \cdots + z_m| \leq |z_{n+1}| + \cdots + |z_m| < \epsilon \ \ para \ \ m > n > N$$

lo cual, implica la convegencia de $\sum_{1}^{\infty} z_n$. ■

Ejemplo 1.3 La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k^2}$ es absolutamente convergente ya que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{i^k}{k^2}\right|$ es igual a la serie real convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Teorema 1.7 (Criterio de la razón)

Supongamos que $\sum_{1}^{\infty} z_n$ *es una serie de términos complejos distintos de cero tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$$

a) Si $L < 1$*, entonces la serie converge absolutamente.*

b) Si $L > 1$ *ó* $L = \infty$*, entonces la serie diverge*

c) Si $L = 1$*, la prueba no es concluyente*

♡

Comentario La demostración del criterio de la razón es similar a la de su contraparte real

Teorema 1.8 (Criterio de la raíz)

Supongamos que $\sum_{1}^{\infty} z_n$ *es una serie de términos complejos, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$$

a) Si $L < 1$*, entonces la serie converge absolutamente.*

b) Si $L > 1$ *ó* $L = \infty$*, entonces la serie diverge*

c) Si $L = 1$*, la prueba no es concluyente*

♡

Demostración Tenemos

1. Si $L < 1$, elegimos un r tal que $L < r < 1$. Entonces tenemos que para valores grandes de n $|z_n|^{\frac{1}{n}} < r$. Esto es

$$|z_n| < r^n \quad para \; n > N$$

La convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ se sigue de la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} r^n, \;\; si|r| < 1$

2. Si $L > 1$, entonces $|z_n|^{\frac{1}{n}} > 1$ para infinitos valores de n. Pero entonces $|z_n| > 1$. Por eso, $z_n \not\to 0$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ no converge

■

Capítulo 1 Ejercicio

1. Suponga que $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$. Muestre que $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{z}_n = \overline{S}$