Variable Compleja

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 1

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 1. Introducción

1.1 Sucesiones

Definición 1.1 (Sucesiones en los números complejos)

Una sucesión compleja $\{z_n\}$ es una función cuyo dominio es el conjunto de números enteros positivos y cuyo rango es un subconjunto de los números complejos $\mathbb{C}$. en otras palabras, a cada número entero $n = 1, 2, ...$ le asignamos un único número complejo z_n ♣

Ejemplo 1.1 Considere la sucesión

$$\left(\frac{i^n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$$

Los primeros términos de la sucesión son:

$$\left(i, \frac{-1}{2}, \frac{-i}{3}, \frac{1}{4}, ...\right)$$

Comentario Tenga en cuenta que la indexación de una sucesión no tiene por qué comenzar necesariamente con $n = 1$. El punto es que los elementos de una sucesión están estrictamente ordenados, lo que en principio permite la indexación por números naturales.

El concepto de sucesiones convergentes en $\mathbb{C}$ es análogo al de sucesiones de números reales:

Definición 1.2

Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ converge a z_0 si para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que si $n > N$, entonces

$$|z_n - z_0| < \epsilon$$

esto se denota

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad o \quad z_n \to z_0$$

♣

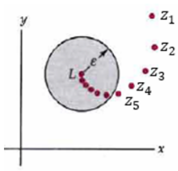
Ejemplo 1.2 Sea $z_n = \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$. Entonces $z_n \to 0$.

En efecto, tenemos que

$$|z_n - 0| = \left|\left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right| = \left|\frac{1}{|1+i|^n}\right| = \frac{1}{|\sqrt{2}|^n} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \leq \frac{1}{n} < \epsilon$$

la última desigualdad por la propiedad arquimediana de los numeros reales

De manera menos formal, una sucesión $\{z_n\}$ converge a L si los puntos z_n se acercan arbitrariamente a L cuando n se vuelve lo suficientemente grande.

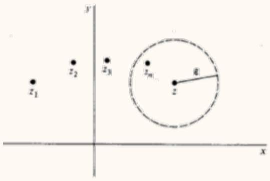


Si la sucesión $\{z_n\}$ no converge, se dice que $\{z_n\}$ diverge o que $\{z_n\}$ es una sucesión divergente.

Teorema 1.1

Supongamos que $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ *y* $z = x + iy$*. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$



si y sólo si

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

♡

Demostración Según la definición, para cada $\epsilon > 0$ existe un entero positivo N tal que

$$|\,(x_n - x) + i(y_n - y)\,| < \epsilon \;\; siempre\ que \;\; n > N$$

ahora

$$|x_n - x| \leq |\,(x_n - x) + i(y_n - y)\,| \quad y \quad |y_n - y| \leq |\,(x_n - x) + i(y_n - y)\,|$$

Por tanto,

$$|x_n - x| < \epsilon \quad y \quad |y_n - y| < \epsilon \quad si \;\; n > N$$

es decir

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

Recíprocamente, sabemos que para cada número positivo ϵ existen enteros positivos n_1, n_2 tales que

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \;\; si \;\; n > n_1 \quad y \quad |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} \;\; si \;\; n > n_2$$

Por tanto, si N es el mayor de los dos enteros n_1 y n_2, entonces

$$|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2} \quad y \quad |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} \quad si \;\; n > N$$

Pero

$$|\,(x_n - x) + i(y_n - y)\,| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

luego

$$|z_n - z| < \epsilon \;\; si \;\; n > N$$

■

Teorema 1.2 (Unicidad)

Si z_n *es una sucesion de números complejos tal que* $z_n \to z_1$ *y* $z_n \to z_2$ *entonces* $z_1 = z_2$ ♡

Demostración Supongamos que $\epsilon > 0$. Entonces $\frac{\epsilon}{2} > 0$ y existe N_1 tal que

$$n \geq N_1 \;\Rightarrow\; |z_n - z_1| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.1}$$

existe N_2 tal que

$$n \geq N_2 \;\Rightarrow\; |z_n - z_2| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1.2}$$

Tomamos $n \geq \max(N_1, N_2)$. Entonces

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_n| + |z_2 - z_n| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

por lo tanto $z_1 = z_2$. ■

Definición 1.3 (Sucesión acotada)

Se dice que una sucesión $\{z_n\}$ es acotada si existe un número $M > 0$ tal que $|z_n| \leq M$ para todo valor de n. ♣

Ejemplo 1.3 Sea $z_n = \left(\frac{1}{1+i}\right)^n$. Entonces $\{z_n\}$ es acotada.
En efecto, tenemos que

$$|z_n| = \left|\left(\frac{1}{1+i}\right)^n\right| = \left|\frac{1}{|1+i|^n}\right| = \frac{1}{|\sqrt{2}|^n} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \leq \frac{1}{n} \leq 1$$

por lo tanto para todo n $|z_n| \leq 1$

Teorema 1.3 (Sucesión convergente es acotada)

Toda sucesión convergente es acotada ♡

Demostración Si $\{z_n\}$ converge a z_0, entonces, para $\epsilon = 1$, existe un número $N > 0$ correspondiente tal que todos los elementos de la sucesión, con excepción de $z_1, z_2, ..., z_N$, se encuentran dentro de la vecindad de z_0 de radio $\epsilon = 1$. Como el conjunto finito de números reales

$$\{|z_1|, |z_2|, ..., |z_N|, |z_0| + 1\}$$

tiene un máximo $M > 0$, y como para $n > N$, $|z_n| < |z_0| + 1$, se verifica que $|z_n| \leq M$ para todo n, o sea $\{z_n\}$ es acotada. ■

Teorema 1.4 (Álgebra de sucesiones)

Si las sucesiones $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son ambas convergentes, su suma, diferencia, producto y cociente (suponiendo que el límite del denominador no sea cero) son también convergentes. Además, se tiene

a) $\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n$

b) $\lim_{n\to\infty}(-z_n) = -\lim_{n\to\infty} z_n$

c) $\lim_{n\to\infty}(z_n \cdot w_n) = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{z_n}{w_n}\right) = \frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} w_n}, \ \textit{si} \ \lim_{n\to\infty} w_n \neq 0$ ♡

Demostración Tenemos que

a) En este caso. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0, \ \lim_{n\to\infty} w_n = w_0$. Como $z_n \to z_0$ y $w_n \to w_0$, existen números $N_0, \ N_1 > 0$ tales que

$$|z_n - z_0| < \frac{\epsilon}{2}, \ \textit{para } n > N_0$$

$$|w_n - w_0| < \frac{\epsilon}{2}, \ \textit{para } n > N_1$$

Tomando entonces como N el mayor de los dos números N_0 y N_1 se tiene

$$|(z_n + w_n) - (z_0 + w_0)| = |(z_n - z_0) + (w_n - w_0)| \leq |z_n - z_0| + |w_n - w_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

b) Puesto que $\{z_n\}$ converge a z_0, para $\epsilon > 0$ arbitrariamente pequeño existe un entero positivo N tal que

$|z_n - z_0| < \epsilon$ para todo $n > N$. Sin embargo

$$|(-z_n) - (-z_0)| = |-z_n + z_0| \ \ y \ \ por \ \ tanto \ \ |(-z_n) - (-z_0)| < \epsilon \ \ para \ \ n > N$$

es decir $\{-z_n\}$ converge a $-z_0$

c) Tenemos que para todo n

$$|z_n w_n - z_0 w_0| = |(z_n - z_0)w_n + z_0(w_n - w_0)| \leq |w_n|\,|z_n - z_0| + |z_0|\,|w_n - w_0|$$

Puesto que $\{w_n\}$ converge, es acotada. Entonces existe un número positivo K tal que $|w_n| < K$ para todo n. Si ϵ es un número positivo arbitrariamente pequeño, entonces, debido a que $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son convergentes, existen enteros positivos N_1 y N_2 tales que $|z_n - z_0| < \dfrac{\epsilon}{2K}$ para $n > N_1$ y $|w_n - w_0| < \dfrac{\epsilon}{2(|z_0| + 1)}$ para $n > N_2$. Por consiguiente, si $n > N_3 = \text{máx}(N_1, N_2)$, entonces

$$|z_n w_n - z_0 w_0| < k\frac{\epsilon}{2K} + \frac{|z_0|\epsilon}{2(|z_0| + 1)} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

En consecuencia, $\{z_n w_n\}$ converge a $z_0 w_0$

d) Puesto que $\left\{\dfrac{z_n}{w_n}\right\} = \left\{z_n \dfrac{1}{w_n}\right\}$, solamente necesitamos demostrar que $\left\{\dfrac{1}{w_n}\right\}$ converge a $\dfrac{1}{w_0}$; luego la sucesión $\left\{\dfrac{z_n}{w_n}\right\}$ convergerá a $\dfrac{z_0}{w_0}$ por el inciso anterior. Si $w_0 \neq 0$,

$$\left|\frac{1}{w_n} - \frac{1}{w_0}\right| = \left|\frac{w_0 - w_n}{w_n w_0}\right| \quad \forall\, n \ tal \ que \ \ w_n \neq 0$$

Como $w_0 \neq 0$, existe un N_1 tal que si $n > N_1$, entonces $|w_n - w_0| < \dfrac{1}{2}|w_0|$. Así,

$$|w_0| = |w_n - w_0 - w_n| \leq |w_n - w_0| + |w_n| < \frac{1}{2}|w_0| + |w_n| \quad \forall\, n > N_1$$

o sea, $|w_n| > \dfrac{1}{2}|w_0| > 0$ para todo $n > N_1$. Por tanto,

$$\left|\frac{1}{w_n} - \frac{1}{w_0}\right| < \frac{|w_n - w_0|}{\frac{1}{2}|w_0|^2} \quad \forall\, n > N_1$$

Para cualquier número positivo arbitrariamente pequeño ϵ existe un N_2 tal que para todo $n > N_2$, $|w_n - w_0| < \dfrac{1}{2}|w_0|^2\epsilon$. Si $N = \text{máx}(N_1, N_2)$, entonces

$$\left|\frac{1}{w_n} - \frac{1}{w_0}\right| < \frac{|w_n - w_0|}{\frac{1}{2}|w_0|^2} < \frac{\frac{1}{2}|w_0|^2\epsilon}{\frac{1}{2}|w_0|^2} = \epsilon \; \forall\, n > N$$

Por consiguiente, $\dfrac{1}{w_n}$ converge a $\dfrac{1}{w_0}$ si $w_0 \neq 0$. Entonces, por el inciso anterior, $\left\{\dfrac{z_n}{w_n}\right\}$ converge a $\dfrac{z_0}{w_0}$ si $w_0 \neq 0$

■

Definición 1.4 (Subsucesión)

Dada una sucesión $\{z_n\}$ y otra de números enteros positivos k_n $(n = 1, 2, ...)$ tales que $k_1 < k_2 < ... < k_n < ...$ entonces la sucesión $\{z'_n\} = \{z_{k_n}\}$ se llama una subsucesión de $\{z_n\}$. ♣

Teorema 1.5 (Sucesiones acotadas y subsucesiones)

Cada sucesión acotada de números complejos contiene una subsucesión convergente. ♡

Demostración Sea $z_n = x_n + iy_n$, con $|z_n| \leq M$. Entonces $|x_n| \leq M$ y $|y_n| \leq M$. Sabemos que en números reales, $\{x_n\}$ contiene una subsucesión monótona $\{x_{n_k}\}$. Tal subsusección $\{x_{n_k}\}$ converge. Ahora considere la subsucesión correspondiente $\{y_{n_k}\}$ de $\{y_n\}$. Esta contiene una subsucesión convergente $\{y_{n_k}\}$. La subsucesión

$$z_{n_k} = x_{n_k} + iy_{n_k}$$

es una subsucesión convergente de $\{z_n\}$, y esto completa la demostración. ■

Definición 1.5 (Punto de acumulación)

*Un número $\{z_0\}$ se llama **punto de acumulación** de una sucesión $\{z_n\}$ si cada vecindad de z_0 contiene un número infinito de elementos de la sucesión, es decir, para cada $\epsilon > 0$ hay un número infinito de z_n tales que*

$$|z_n - z_0| < \epsilon$$

♣

Teorema 1.6 (Puntos de acumulación y subsucesiones)

Si z_0 es un punto de acumulación de una sucesión $\{z_n\}$, existe una subsucesión $\{z'_n\}$ tal que $z'_n \to z_0$ ♡

Demostración Como por cada $\epsilon > 0$ existe un número infinito de valores de n para los cuales $|z_n - z0| < \epsilon$, entonces para $\epsilon = 1$ existe un $n = k_1$ tal que $|z_{k_1} - z_0| < 1$. Asimismo para $\epsilon = \frac{1}{2}$ existe un $n = k_2 > k_1$ tal que $|z_{k_2} - z_0| < \epsilon = \frac{1}{2}$. En general para $\epsilon = \frac{1}{n}$ existe un $k_n > k_{n-1}$ tal que $|z_{k_n} - z_0|\epsilon = \frac{1}{n}$. De esto se deduce que la subsucesión $z'_n = z_{k_n}$ convergente a cero, ya que dado $\epsilon > 0$ y tomando como N un número entero positivo tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$, se obtiene

$$|z'_n - z_0| < \epsilon \;\; para \;\; n > N$$

■

Teorema 1.7 (Conjuntos infinitos y puntos de acumulación)

Todo conjunto infinito y acotado en el plano complejo posee por lo menos un punto de acumulación. ♡

Demostración Elija cualquier sucesión de puntos distintos en el conjunto. Según el teorema, esta sucesión contiene una subsucesión convergente; y límite de esta subsucesión convergente es un punto límite del conjunto. Esto completa la prueba. ■

Comentario Todo límite de una sucesión es un punto de acumulación de dicha sucesión; sin embargo el recíproco no es cierto, como lo es, por ejemplo, en el caso de la sucesión $z_n = (-1)^n$, la cual posee dos puntos de acumulación y ningún punto límite.

Definición 1.6 (Sucesiones de Cauchy)

Una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe N tal que

$$si \;\; n, m > N, \;\; entonces \;\; |z_n - z_m| < \epsilon$$

♣

Teorema 1.8 (Criterio de Cauchy sobre convergencia de sucesiones)

Una sucesión $\{z_n\}$ es convergente si, y sólo si, $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy ♡

Demostración Supongamos en primer lugar que $\{z_n\}$. Como

$$z_m - z_n = (z_m - z_0) + (z_0 - z_n)$$

se tiene

$$|z_m - z_n| \leq |z_m - z_0| + |z_n - z_0|$$

Por lo tanto, si

$$|z_m - z_0| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |z_n - z_0| < \frac{\epsilon}{2}$$

para $m > N$, $n > N$, se obtiene $|z_m - z_n| < \epsilon$ para para $m > N$, $n > N$,o sea que $\{z_n\}$ es una sucesión de Cauchy.

Viceversa, sea $\{z_n\}$ una sucesión de Cauchy y N un entero positivo, tal que

$$|z_m - z_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad para \quad m > N, \quad n > N$$

Como

$$|z_n| - |z_m| \leq |z_n - z_m| = |z_m - z_n|$$

se obtiene para $m = N + 1$

$$|z_n| \leq |z_m| + \frac{\epsilon}{2} \; para \;\; todo \;\; n > N$$

De esto resulta que la sucesión $\{z_n\}$, para $n > N$, es una sucesión acotada. Esta sucesión posee, un punto de acumulación z_0, de modo que para un cierto $p > N$

$$|z_p - z_0| < \frac{\epsilon}{2}$$

Por consiguiente

$$|z_n - z_0| \leq |z_n - z_p| + |z_p - z_0| < \epsilon \;\; \forall \, n > N$$

o sea que $\{z_n\}$ converge a z_0. ■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Determine si la sucesión converge ó diverge a infinito

$$z_n = \begin{cases} \frac{-2i}{n} & si \; n \; es \; par \\ \frac{2i}{n+1} & si \; n \; es \; impar \end{cases}$$