Variable Compleja

Notas del curso Variable Compleja 1

Unidad 2

Autor: Esteban Rubén Hurtado Cruz & Ofelia Cepeda Camargo & Selma Fernanda Espinosa Guevara

Instituto: Facultad de Ciencias UNAM

Fecha: May. 2, 2021

Versión: 4.1

Bio: Semestre 2022-1

La magia está en el trabajo, en el esfuerzo, en la confianza y en la convicción de que puedes lograr todo lo que te propongas.

Índice general

Capítulo 1 Unidad 2. Funciones de Variable Compleja

1.1 Funciones trigonométricas

La extensión de la función exponencial al plano complejo sugiere un modo de extender las definiciones de las funciones trigonométricas seno y coseno. Tenemos que

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i\frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \\ &= 1 + iz - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) \\ &= \cos z + i \operatorname{sen} z \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} e^{-iz} &= \cos(-z) + i \operatorname{sen}(-z) \\ &= \cos(z) - i \operatorname{sen}(z) \end{aligned}$$

lo cual implica

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos\ z \ \Rightarrow\ \cos\ z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

De manera análoga

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i \operatorname{sen}\ z \ \Rightarrow\ \operatorname{sen}\ z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Como e^{iz} está definida para cualquier $z \in \mathbb{C}$, podemos definir

Definición 1.1 (Funciones trigonométricas complejas)

Para cualquier número complejo z

$$\operatorname{sen}\ z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad y \quad \cos\ z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

♣

Notamos que si z es real, estas definiciones coinciden con las definiciones usuales de seno y coseno.

Proposición 1.1 (Propiedades de las funciones trigonométricas)

Tenemos que

1. $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$
2. $\operatorname{sen}(z + w) = \operatorname{sen}\ z \cos\ w + \cos\ z \operatorname{sen}\ w$

♠

Demostración Tenemos que

1. $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} = 1$
2. En este caso se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\ z \cos\ w + \cos z \operatorname{sen}\ w &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \cdot \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \cdot \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \\ &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{4i} + \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{4i} \\ &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \operatorname{sen}(z + w) \end{aligned}$$

■

✍ **Ejercicio 1.1** Probar que sen $z = 0$ si y sólo si $z = k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$

Solución *Si* $z = k\pi$, *entonces* sen $z = 0$. *Ahora supongamos que* sen $z = 0$. *Tenemos entonces que*

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Rightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Rightarrow iz = -iz + 2k\pi i$$

por lo que $z = k\pi$ *con* $k \in \mathbb{Z}$

Por tanto, los únicos ceros de sen z son sus ceros reales. Lo mismo ocurre con la función $\cos\ z$ es decir

$$\cos\ z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

donde $k \in \mathbb{Z}$

✍ **Ejercicio 1.2** Pruebe que $\cos(z + 2\pi) = \cos\ z$

Solución *Tenemos que*

$$\begin{aligned}\cos(z + 2\pi) &= \frac{1}{2}\left(e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}\right)\\ &= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})\\ &= \cos\ z\end{aligned}$$

✍ **Ejercicio 1.3** Muestre que sen $2\theta = 2$ sen $\theta \cos\theta$ y $\cos\ 2\theta = \cos^2\theta -$ sen$^2\theta$

Solución $e^{2i\theta} = e^{i\theta}e^{i\theta}$, *entonces*

$$\cos\ 2\theta + i\,\text{sen}\ 2\theta = (\cos\ \theta + i\,\text{sen}\ \theta)^2 = \cos^2\theta - \text{sen}^2\,\theta + 2i\,\text{sen}\,\theta\cos\theta$$

al igualar partes reales e imaginarias obtenemos el resultado

Las demás funciones trigonométricas de argumentos complejos se definen por analogía con las funciones de argumento real, esto es,

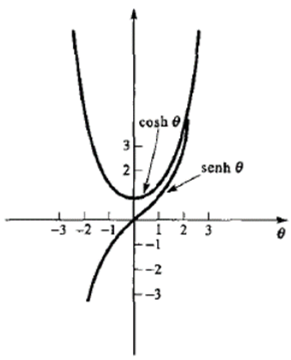
$$\tan\ z = \frac{\text{sen}\ z}{\cos\ z} = \frac{1}{\cot\ z}, \quad \sec\ z = \frac{1}{\cos\ z}, \quad \csc\ z = \frac{1}{\text{sen}\ z}$$

1.2 Mapeo de la función seno complejo

Recordando el seno y el coseno hiperbólico de un argumento real θ definidos por las siguientes ecuaciones

$$\text{senh}\ \theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

$$\cosh\ \theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$



Es interesante que las funciones complejas seno y coseno se relacionan con las funciones trigonométricas hiperbólicas reales, esto es, si $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\text{sen}\ i\theta = \frac{e^{i(i\theta)} - e^{-i(i\theta)}}{2i} = \frac{e^{-\theta} - e^{\theta}}{2i} = i\left(\frac{e^{\theta} - e^{\theta}}{2}\right) = i\ \text{senh}\ \theta$$

De manera análoga se puede ver que $\cosh\ \theta = \cos\ i\theta$.

Para analizar la geometría de la función $f(z) =$ sen z, veamos primero cuál es la imagen bajo esta función de las rectas verticales y horizontales, para esto tenemos que

$$\operatorname{sen}\ z = \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen}\ x\cos\ iy + \operatorname{sen}\ iy\cos\ x = \operatorname{sen}\ x\cosh\ y + i\operatorname{senh}\ y\cos\ x = u+iv$$

donde

$$u = \operatorname{sen}\ x\cosh\ y \ \Rightarrow\ u^2 = \operatorname{sen}^2 x\cosh^2 y \ \Rightarrow\ \frac{u^2}{\cosh^2 y} = \operatorname{sen}^2 x$$

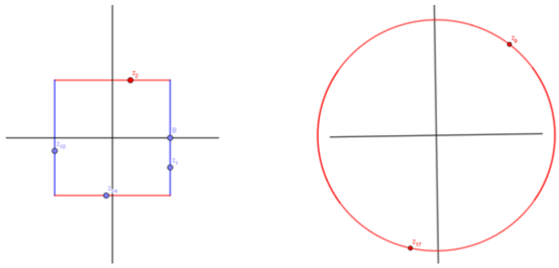
$$v = \operatorname{senh}\ y\cos\ x \ \Rightarrow\ v^2 = \operatorname{senh}^2\ y\cos^2\ x \ \Rightarrow\ \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2} = \cos^2\ x$$

Al sumar

$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 y} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2\ x = 1$$

En consecuencia, los puntos de la imagen de la recta $Im\ z = y$, $y \neq 0$ cumplen la ecuación de la elipse

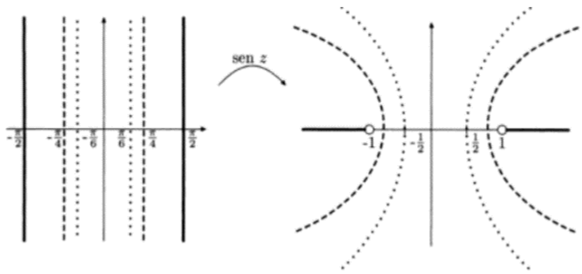
$$\frac{u^2}{\cosh^2 y} + \frac{v^2}{\operatorname{senh}^2 y} = 1$$



También la imagen de la recta vertical $Re\ z = x$, $x \neq \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ satisface

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = \cosh^2 y - \operatorname{senh}^2\ y = 1$$

y por tanto constituye la rama de una hipérbola



1.3 Funciones hiperbólicas complejas

Estrechamente relacionado con las funciones trigonométricas $\cos z$ y $\operatorname{sen} z$ son las funciones hiperbólicas $\cosh z$ y $\sinh z$, llamadas coseno hiperbólico y el seno hiperbólico, respectivamente, y definido por las fórmulas

$$\operatorname{senh}\ z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} \qquad y \qquad \cosh\ z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Proposición 1.2 (Propiedades de las funciones hiperbólicas complejas)

Para $z \in \mathbb{C}$ se satisface

1. $\cosh^2\ z - \sinh^2\ z = 1$
2. $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$
3. $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$

4. $\sinh(x+iy) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$
5. $\cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$

Demostración

1. Tenemos que

$$\begin{aligned}\cosh^2\ z - \sinh^2\ z &= \left(\frac{e^z+e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^z-e^{-z}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2z}+2+e^{-2z}}{4} - \frac{e^{2z}-2+e^{-2z}}{4} \\ &= \frac{4}{4} = 1\end{aligned}$$

2. Sea $A = \sinh(z_1+z_2)$, entonces

$$\begin{aligned}A &= \frac{e^{z_1+z_2}-e^{-(z_1+z_2)}}{2} = \frac{2e^{z_1+z_2}-2e^{-(z_1+z_2)}}{2\cdot 2} \\ &= \frac{e^{z_1+z_2}-e^{-z_1+z_2}+e^{z_1-z_2}-e^{-(z_1+z_2)}}{4} + \\ &\frac{e^{z_1+z_2}+e^{-z_1+z_2}-e^{z_1-z_2}-e^{-(z_1+z_2)}}{4} \\ &= \frac{e^{z_1+z_2}-e^{-z_1+z_2}+e^{z_1-z_2}-e^{-(z_1+z_2)}}{4} + \\ &\frac{e^{z_1+z_2}+e^{-z_1+z_2}-e^{z_1-z_2}-e^{-(z_1-z_2)}}{4} \\ &= \left(\frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2}\right) \\ &= \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2\end{aligned}$$

3. Sea $B = \cosh(z_1+z_2)$, entonces

$$\begin{aligned}B &= \frac{e^{z_1+z_2}+e^{-(z_1+z_2)}}{2} = \frac{2e^{z_1+z_2}+2e^{-(z_1+z_2)}}{2\cdot 2} \\ &= \frac{e^{z_1+z_2}+e^{-z_1+z_2}+e^{z_1-z_2}+e^{-(z_1+z_2)}}{4} + \\ &\frac{e^{z_1+z_2}-e^{-z_1+z_2}-e^{z_1-z_2}+e^{-(z_1+z_2)}}{4} \\ &= \frac{e^{z_1+z_2}+e^{-z_1+z_2}+e^{z_1-z_2}+e^{-(z_1+z_2)}}{4} + \\ &\frac{e^{z_1+z_2}-e^{-z_1+z_2}-e^{z_1-z_2}+e^{-(z_1-z_2)}}{4} \\ &= \left(\frac{e^{z_1}+e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2}+e^{-z_2}}{2}\right) + \left(\frac{e^{z_1}-e^{-z_1}}{2}\right)\left(\frac{e^{z_2}-e^{-z_2}}{2}\right) \\ &= \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2\end{aligned}$$

4. Usando la parte 2, se tiene que $\operatorname{senh}(x+iy) = \operatorname{senh} x \cosh iy + \cosh x \operatorname{senh} iy$ y utilizando que $\cosh iy = \cos y$ y $\operatorname{senh} iy = i \operatorname{sen} y$ se puede concluir que $\operatorname{senh}(x+iy) = \operatorname{senh} x \cos y + i \cosh x \operatorname{sen} y$.
5. Usando la parte 3, se tiene que $\cosh(x+iy) = \cosh x \cosh iy + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} iy$, entonces $\cosh(x+iy) = \cosh x \cos y + i \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$.

■

Capítulo 1 Problemas para pensar

1. Exprese en la forma $x + iy$
   - e^{3-i}
   - $\cos(2 + 3i)$
2. ¿Cuál es la imagen de líneas horizontales y verticales bajo el mapeo $f(z) = \cos z$