Tarea 3

Prof. Rafael Barbachano Aydte. Marcos Mazari

October 13, 2013

1. Considere un lenguaje con igualdad tal que únicamente tiene una letra relacional P de aridad 2. Demuestre que si $\Omega \equiv \Psi$ y Ω es finito, entonces $\Omega \cong \Psi$. (1 pt)

2. Sea Ω una estructura y h una función tal que ran h=$\mid \Omega \mid$. Muestre que hay una estructura Ψ tal que h es un homomorfismo de Ψ sobre Ω. (1 pt)

3. Sea h un monomorfismo de Ω en Ψ y tales que $\mid \Psi \mid \cap \mid \Omega \mid = \emptyset$. Muestre que hay una estructura Υ isomorfa a Ψ tal que Ω es subestructura de Υ. (1 pt)

4. Una fórmula universal $\forall_1$ tiene la forma $\forall x_1 ... \forall x_n \theta$ donde θ es libre. Análogamente una fórmula existencial $\exists_1$ tiene la forma $\exists x_1 ... \exists x_n \theta$ donde θ es libre. Sea $\Omega \subseteq \Psi$ y s: $N \rightarrow \mid \Omega \mid$, muestre lo siguiente :

   (a) Si $\Omega \models \alpha$ [s] y α es existencial entonces $\Psi \models \alpha$ [s]. (.75 pts)

   (b) Si $\Psi \models \alpha$ [s] y α es universal entonces $\Omega \models \alpha$ [s].(.25 pts)

   (c) Usando estos hechos demuestre que si P es una letra proposicional entonces el enunciado $\exists x P(x)$ no es equivalente a un enunciado universal, y que $\forall x P(x)$ no es equivalente a uno existencial. (.5 pts)

5. Una fórmula $\exists_2$ tiene la forma $\exists x_1 ... \exists x_n \varphi$ donde ϕ es universal. Muestre lo siguiente:

(a) Dado un enunciado $\beta \in \exists_2$ en un lenguaje que no contenga funciones ni constantes muestre que si $\Omega \models \beta$ entonces existe una subestructura finita que es modelo de β. (.75 pts)

(b) De un contraejemplo de por qué la condición y sobre constantes y funciones es necesaria,i.e., dé un ρ y $\beta \in \exists_2$ tal que exista un modelo de β y tal que no haya ninguna subestrcutura finita de éste que sea modelo de β. (.25 pts)

(c) Usando (a) conlcuya que dado P una relación binaria, no existe un enunciado en $\exists_2$ que sea lógicamente equivalente a $\forall x \exists y P(x, y)$. (.5 pts)

6. Demuestre que $(Q, <) \equiv (R, <)$. Para ello realice lo siguiente (sino se realiza lo que sigue y se obtiene el resultado se obtendrán todos los punto de los incisos):

   (a) Demuestre que si T es completa sii dados cualesquiera dos modelos estos son elementalmente equivalentes. (.75 pts)

   (b) Decimos que una teoría es $\aleph_0$ categórica si todos los modelos numerables de T son ismorfos. Ahora demuestre que si T es $\aleph_0$ categórica entonces T es completa (hint: Lowëheim-Skolem e iniciso anterior). (.75 pts)

   (c) Dé los axiomas en primer orden de los ordenes lineales, densos y sin extremos. (.1 pts)

   (d) Demuestre que cualesquiera dos ordenes lineales numerables densos sin extremos son isomorfos (este resultado es más conjuntista por lo tanto vale +.5 sobre la calificacón).

   (e) Concluya con ello lo que se pidió demostrar. (.4 pts)

7. En clase vimos que la teoría de grupos infinitos es EC_Δ, demuestre que la teoría de grupos finitos no es EC_Δ y con ello concluya que la teoría de grupos infinitos no es EC. (hint: teorema de compacidad).(1 pto)

8. Demuestre que si para todo $\Sigma \cup \alpha$ tenemos que ($\Sigma \models \alpha$ sii hay un $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, tal que Σ_0 finito y $\Sigma_0 \models \alpha$) implica el Teorema de Compacidad.(1 pto)

9. Sean $\Sigma_1\Sigma_2$ dos conjuntos de enunciados tal que no hay un modelo de ambos. Muestre que hay un enunciado α tal que $Mod(\Sigma_1) \subseteq Mod(\alpha)$ y $Mod(\Sigma_2) \subseteq Mod(\neg\alpha)$. (+1 pto sobre la calificación)