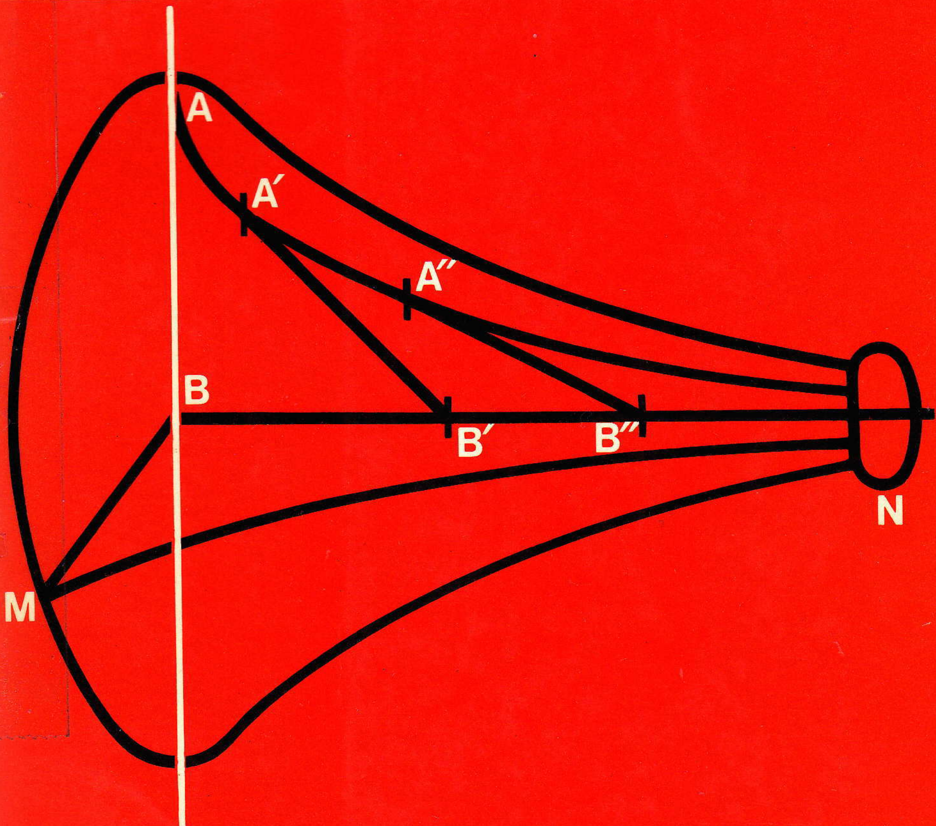
Alberto Dou

fundamentos de la matemática



nueva colección labor

"La matemática es la ciencia por excelencia, podríamos decir que es la única ciencia verdaderamente tal por lo singulares que son, respecto de cualquier otra, sus cualidades de universalidad y necesidad." Esta definición escuetamente lapidaria del autor de esta obra, subraya cabalmente la importancia del conocimiento matemático, y es la primera y mejor presentación de este libro. La segunda consistirá simplemente en añadir que la obra de Alberto Dou, profesor de eminente autoridad en la materia, tiene un carácter general introductorio accesible a todo lector de una normal educación de grado medio, donde quedan perfectamente expuestas todas las bases sobre las que se ha desarrollado y desarrolla la matemática, descritas con gran rigor y claridad didáctica y según las más modernas concepciones que la rigen.

Nuestra época, de profundas transformaciones, abre ante el hombre espacios nuevos que exigen su necesario y cabal conocimiento. Los hombres de nuestro tiempo se asoman a un panorama de una riqueza y complejidad crecientes, que les invita —mejor diríamos: les obliga— a trabar conocimiento directo y motivado con aquellos de sus aspectos que más les solicitan.

Ofrecer esta panorámica profundizada y abierta del saber humano, presentada conforme a las últimas adquisiciones de cada una de sus disciplinas, ya sean las clásicas, como aquellas más recientes que marcan el enriquecimiento actual de nuestro conocimiento, tal es la necesidad que viene a cumplir este empeño editorial.

La **nueva colección labor** pone en manos del público cultivado textos de la mayor autoridad y calidad, pulcramente editados.

Sus volúmenes son un instrumento de estudio y de consulta que forman la indispensable biblioteca del hombre contemporáneo.

fundamentos de la matemática

12 figuras

editorial labor, s. a.

Alberto Dou, S. J.

fundamentos de la matemática

Alejandro Garcíadiego D.

nueva colección labor

...n Antonio Torroja Miret

Depósito legal: B. 39 939 - 1970 Printed in Spain
Talleres Gráficos Ibero-Americanos, S. A. Provenza, 86 Barcelona

Indice de materias

La matemática, como una expresión de la mente humana, refleja la voluntad activa, la razón contemplativa y el deseo de perfección estética. Sus elementos básicos son lógica e intuición, análisis y construcción, generalidad y particularidad.
Courant - Robbins
¿Qué es la matemática?

Introducción

1. La verdad matemática

Las verdades teológicas son oscuras, las filosóficas son discutibles, las históricas dependen del poder e influencia de los gobiernos contemporáneos y las políticas están basadas en principios harto dudosos. Las verdades de la biología, incluyendo la medicina, son casi meramente empíricas y las de las ciencias sociales, económicas y psicológicas están basadas en la estadística y en el mejor de los casos representan una más o menos válida probabilidad. Incluso las verdades fisicoquímicas dejan mucho que desear: carecen de rigor y no pueden dar más que una buena aproximación, aunque si no somos demasiado exigentes ofrecen a menudo una aproximación que satisface completamente nuestros deseos.

Las verdades matemáticas son de verdad absoluta porque son necesarias y universales.

Parece, pues, que sólo las ciencias matemáticas ofrecen verdades que por un lado no son nada triviales y por otro alcanzan el ideal de verdad absoluta que el más exigente científico puede apetecer. Es obvio, en efecto, que los teoremas que actualmente se publican en las revistas de investigación matemática nada tienen de trivial, pues sólo para entender el contenido de los asertos que se enuncian se requieren largos años de estudios especializados posteriores a la graduación y nada digamos de la mucho mayor dificultad y profundidad que a menudo requieren sus demostraciones. También parecen alcanzar las verdades matemáticas el ideal de la verdad científica absoluta, pues en el orden de la necesidad y universalidad, las máximas cualidades de toda ciencia, al parecer nada dejan que desear.

En este texto nos proponemos analizar precisamente el valor de esta verdad matemática estudiando los fundamentos sobre los que se basa. ¿Cuál es el verdadero contenido del teorema de Pitágoras: «el cuadrado de la hipotenusa es la suma de los cuadrados de los catetos»? Dicho de una manera refleja: cuando decimos que el teorema de Pitágoras es «verdadero», ¿qué quiere decir ahí verdadero?

Los trabajos sobre los fundamentos de la matemática hechos en los últimos cien años han logrado hacer más patente la dificultad de establecer cuáles son los niveles de verdad implicados, cuáles son los objetos a los que corresponde esa verdad y cuáles son los medios por los que se llega a establecer epistemológicamente tal nivel de verdad para tal objeto. La existencia de estas dificultades, puesta de manifiesto precisamente gracias al progreso de la matemática, nos hace ya cautos y pone en duda nuestra convicción acerca de la absolutez de las verdades matemáticas. En efecto, la opinión más común actualmente entre los cultivadores de las matemáticas, de la lógica matemática, de los fundamentos de la matemática o de la filosofía de las matemáticas es que tal verdad absoluta no existe para el hombre ni siquiera en las matemáticas, pues tanto las condiciones de su universalidad como las de su necesidad resultan hoy día confusas.

Parece que podemos considerar la situación actual como un momento histórico en la evolución de la noción de verdad matemática. Parece surgir la conclusión de que no sólo hasta ahora la noción de verdad matemática ha sido algo histórico, dependiente de la mentalidad contemporánea, sino que ello será siempre así. Parece ser esencial a la noción de verdad matemática la progresiva situación alcanzada por la matemática misma, y quizá también la situación alcanzada por la filosofía y la ontología, todas las cuales no parecen tender con el tiempo hacia algo acabado, incontrovertible y cerrado en sí mismo, sino posiblemente están sumergidas en un proceso dinámico siempre abierto.

Hemos apuntado lo que hoy día constituye quizá la más importante adquisición sobre la esencia de la fundamentación de las matemáticas: su historicidad radical. Citemos brevemente otras importantes cualidades de la matemática, que a lo largo de este trabajo aparecerán más o menos justificadas.

2. El rigor matemático

La matemática es la ciencia por excelencia, podríamos decir que es la única ciencia verdaderamente tal por lo singulares que son, respecto de cualquier otra ciencia, sus cualidades de universalidad y necesidad. Precisamente por esta razón se ha visto con frecuencia en la matemática la ciencia fundamental que permea todas las demás ciencias, las cuales aparecen tales en la misma medida que están matematizadas. Ya se entiende, por tanto, que entendemos que la lógica es posterior a la matemática, si es que no se identifica con una parte de ésta; consideramos la matemática en un sentido amplio, que incluye no sólo la matemática clásica, sino también todas las adquisiciones que los matemáticos de los últimos cien años han hecho para fundamentar la matemática clásica.

Ya así, matemática quiere decir ciencia por excelencia, según su origen griego.

Las matemáticas constituyen o tejen la estructura formal de todas las demás ciencias, en cuanto éstas son ciencia en un sentido muy estricto, es decir, están impregnadas de una armazón logicodeductiva.

La lógica hace de sirvienta de la matemática.

Estas cualidades de necesidad y universalidad derivan del rigor con que en las matemáticas se aplica el método estrictamente racional deductivo; la misma nota de rigor es característica de la matemática. Un estudiante que haya terminado su licenciatura en matemáticas y más aún si ha hecho una tesis doctoral tiene un conocimiento experimental de lo que constituye una auténtica demostración matemática. Por el contrario, continuamente aparecen personas, que no se excluye que sean inteligentes y agudas, pero que carecen de formación matemática, que pretenden haber logrado una demostración matemática de la cuadratura del círculo o de la trisección de un ángulo arbitrario, problemas de los cuales se ha dado una demostración matemática de su irresolubilidad; es notable que estas seudodemostraciones son frecuentes, pues casi todos los años llega a la Real Academia de Ciencias alguna de ellas, siempre con un *eureka* de su autor.

El matemático profesional posee *ipso facto* una noción experimental de lo que es el método matemático y esta noción es suficiente para su trabajo. Pero si se le pregunta por una explicación razonada, puede muy bien ser, y ello es frecuente, que sea incapaz de dar tal explicación. Incluso los que dan unas primeras explicaciones, si son urgidos y se extienden en algo más largas justificaciones discreparán pronto y discreparán de muy diversas maneras y en aspectos muy fundamentales. Veremos que a los griegos hay que atribuir la clara noción de método matemático en cuanto racional; pero no es hasta G. Frege, D. Hilbert, y J. Brouwer, a fines del siglo pasado, que se da una explicación suficientemente satisfactoria de la naturaleza de esta racionalidad del método matemático. En cuanto a los fundamentos en que se basa esta explicación satisfactoria, siguen siendo controvertidos y dependen en parte de los diversos sistemas filosóficos.

3. La intuición y la creación

Las matemáticas que figuran en los libros de texto aparecen al estudiante como algo cerrado y acabado, algo definitivamente definitivo. Antes de estudiar el teorema de Pitágoras podía haber cierta curiosidad o interés por saber si el cuadrado de un lado de un triángulo es mayor o menor que la suma de los cuadrados de los otros dos; después de conocer el teorema, la curiosidad y el interés han desaparecido necesariamente. El teorema es algo definitivo; es algo muerto y que mata la posible anterior curiosidad. Apenas se puede imaginar nada más esquelético que una demostración matemática; los *Elementos* de Euclides, muchas teorías del siglo pasado, no pocos textos actuales con su extraordinaria aridez, con su indiscutibilidad, sobre todo por su carácter de algo decisivo y eterno, no pueden menos de aparecer ante muchos como gigantescos cementerios donde están enterradas la pasión e incluso la intuición.

A pesar de estas apariencias una de las notas más propias de la matemática de todos los tiempos y en particular de la actual es su exigencia extraordinaria de intuición y creatividad. Los libros de J. Hadamard, G. Polya, H. Poincaré, R. Courant muestran la enorme importancia de la imaginación e intuición en la investigación matemática; una demostración convierte una flor en fruto, pero ello no sucede sin que simultáneamente y en virtud a menudo del mismo proceso de maduración surjan nuevas flores y despunten yemas que pueden originar incluso nuevas ramas de la matemática. La demostración escrita, terminada, definitiva mata la curiosidad previa, pero en compensación despierta nuevas sugerencias y conjeturas de modo que la periferia del árbol de la matemática, es decir, lo que constituye la frontera del saber matemático aumenta rápidamente a lo largo de la historia y especialmente en los tres últimos siglos.

A menos que se disocie completamente la enseñanza sistemática de la matemática de su motivación y de su origen histórico, cosa que es factible en nuestra disciplina y a menudo imposible en otras, incluso para el estudiante tiene que aparecer la asimilación de los teoremas como algo vivo en perpetua evolución y lleno del más acuciante interés intelectual.

Además, el mismo proceso de demostración de un teorema no deja de tener gran valor en sí mismo. Si bien es verdad que destruye la previa expectación, también lo es que la demostración tiene en sí misma un valor próximo o coincidente con el valor estético, como de un proceso que transforma los datos amorfos de partida en la estructura cristalina del resultado. La demostración más que un esqueleto es un cristal y está ahí, para que en contacto con una facultad intelectiva proporcionada sea capaz de activarla y satisfacerla originándose un goce profundamente humano.

Observación

Las páginas que siguen arrojarán luz sobre los puntos que acabamos de mencionar y en particular sobre la noción de verdad matemática. Sin duda otros problemas y cuestiones son también interesantes, pero nos parece que ésta es la más importante. El presente texto tiene un mero carácter de introducción y está escrito en un nivel elemental que nos parece ha de ser accesible, al menos en sus líneas fundamentales, a todo bachiller. Algunas páginas serán mejor comprendidas por aquellos que hayan cursado geometría y análisis en la Universidad; por ejemplo, al suponer conocidos los conceptos de curvatura y compacidad en el capítulo 2 de la primera parte. El formalismo parece ser hoy día la teoría de fundamentos que cuenta con mayor número de adeptos, y por ello se le ha dedicado una mayor atención. En particular el capítulo 3 de la segunda parte requiera quizá para una comprensión suficiente cierta familiaridad con la matemática y con la lógica del cálculo de predicados.

primera parte

Desarrollo histórico del método matemático

1

El período griego

1. El hecho

En el siglo VI a. de J.C. aparecen en el mundo griego —Grecia, la costa de Asia Menor, la Magna Grecia al sur de Italia, y más tarde, en el siglo III a. de J.C., la gran ciudad de Alejandría— un grupo de hombres que no sólo se dedican a la ciencia por razones de tipo técnico, por ejemplo, resolviendo problemas de astronomía y de agrimensura con miras prácticas y concretas, sino que cultivan la ciencia por sí misma y empiezan a construir un cuerpo de doctrina abstracta, con un contenido nada trivial y con un método que confiere a las verdades halladas unos caracteres de necesidad y universalidad totalmente desconocidos hasta entonces.

Según Proclo (410-485), «Tales fue el primero que, habiendo estado en Egipto, introdujo esa doctrina [de la geometría] en Grecia. El mismo realizó varios descubrimientos y encaminó a sus sucesores hacia otros; algunas cuestiones las resolvió en forma general, otras estaban más dirigidas hacia las aplicaciones» [7].[1]

Entre los principales autores de ese cuerpo de doctrina mencionemos solamente unos pocos muy importantes: Pitágoras y su escuela con la contribución del célebre teorema y la primera demostración de irresolubilidad; a saber, que la diagonal del cua-

[1] Estas cifras remiten a las correspondientes de la Bibliografía situada al final de cada capítulo.

drado carece de medida, es decir, que no hay ningún número (racional, los únicos entonces conocidos) que mida su longitud.

Heráclito de Efeso (540?-481? a. de J.C.) comenta: «Pitágoras el hijo de Mnesarjos, sacó su información de todo el mundo y después que hubo rebuscado en todos los escritos, transformó todo ello en ciencia propia, charlatanería e impostura» [1]. A veinticinco siglos de distancia tenemos la convicción de que algunos resultados de Pitágoras o de su escuela no fueron charlatanería, sino profundos y de una trascendencia que entonces no podían ni muy remotamente sospechar: de aquellos primeros balbuceos geométricos desciende en línea directa toda la moderna técnica.

Hipócrates de Quío (470? a. de J.C.) llevó a cabo la cuadratura de algunas lúnulas y compuso los primeros Elementos de Geometría. El más importante de todos los matemáticos griegos es probablemente Eudoxo (408-335 a. de J.C.), quien aporta dos contribuciones de profundo alcance y enorme trascendencia: una teoría de las proporciones aplicables a números irracionales, basada en una definición de igualdad y desigualdad precursora de las cortaduras de Dedekind; y el procedimiento de exhaución que constituye la primera técnica matemáticamente rigurosa de un algoritmo infinito y que resulta extraordinariamente fecundo en el cálculo exacto de áreas y volúmenes. Mencionemos finalmente a Euclides (365?-275? a. de J.C.), el autor de los *Elementos*, quien «ordenó varios trabajos de Eudoxo, mejoró los de Teeteto y dio además demostraciones indiscutibles de todo aquello que sus predecesores no habían demostrado con el rigor necesario [...] Euclides era de opiniones platónicas y estaba familiarizado con la filosofía del Maestro [...]. Son de admirar especialmente sus Elementos de Geometría por el orden que reina en ellos, por la elección de los teoremas y de los problemas considerados como fundamentales, puesto que no ha incluido todos aquellos que estaba en condiciones de dar, sino únicamente aquellos capaces de funcionar como elementos, y también por la variedad de los raciocinios» (Proclo) [7]. Para juzgar de la profundidad científica de los griegos, alcanzada paso a paso con un rigor superior al propio de los matemáticos de los últimos siglos y únicamente superado en los últimos cien años, basta considerar los teoremas de Pitágoras y Eudoxo ya mencionados e incorporados en los *Elementos* y algún otro ejemplo que mencionamos a continuación. El libro IX termina con la fórmula $2^{n-1}(2^n - 1)$ que da números perfectos pares cuando $2^n - 1$ sea primo; la resolución de las ecuaciones bicuadradas en el libro X; el teorema primero del libro X de sabor totalmente moderno y su aplicación a la creación y construcción del número π en el libro XII; el cálculo de los volúmenes de las figuras elementales; finalmente la construcción de los poliedros regulares convexos en el libro XIII y último de los *Elementos*.

No hace falta que prosigamos con otros nombres como Arquímedes (287?-212 a. de J.C.) o Apolonio (260?-200? a. de J.C.). El somero análisis histórico de la composición de los *Elementos* de Euclides que hemos descrito basta para nuestro objeto, que no era otro que mostrar que el cuerpo de verdades logrado en unos cuatro o cinco siglos por los matemáticos griegos nada tiene de trivial y es, que sepamos, el primero en la historia de la humanidad.

Descrito el hecho histórico de la aparición de una matemática pasemos ahora a analizar sus fundamentos.

Los fundamentos de la matemática griega

2. El método propio

El primer elemento fundamental y primera determinación de la esencia del método matemático desde su creación por los griegos hay que ponerlo en esa manera típica y peculiar de llevar el razonamiento, de carácter exclusivamente inteligible, que obliga al asentimiento de unas verdades atemporales, fuera del espacio y extrañamente universales. La raíz última del método matemático parece, pues, que hay que ponerla en la aplicación de esa actividad típica y peculiar de la inteligencia. La comprensión refleja de lo que es el método matemático se traduce, por tanto, en una comprensión de cómo comprendemos las verdades matemáticas, es decir, en una comprensión de cómo ejercitamos esa actividad típica y peculiar de nuestra inteligencia. Para conocer directamente el método matemático con conocimiento propio e inmediato de su esencia es necesaria la vivencia consciente de esa actividad típica y peculiar que hemos mencionado; las características y descripciones que de ella demos son insuficientes para definirla en su sentido propio, y parece que lo más que puede hacerse para darla a conocer a una persona humana discente es provocar su vivencia consciente haciendo que oiga o vea la expresión oral o escrita de esa misma vivencia en la persona docente. Para un conocimiento propio del método matemático parece, pues, imprescindible la vivencia o experiencia personal de su ejercicio; análogamente a como sucede con el conocimiento propio del color rojo, para lo cual las descripciones o definiciones son insuficientes y se requiere la vivencia o experiencia personal de la visión del rojo.

3. Las entidades matemáticas

Esa actividad típica y peculiar de que venimos hablando no parece se distinga, por razón de la facultad humana de que procede, de la espontánea actividad racional del hombre aplicada al manejo ordinario y cotidiano de las cosas sensibles; pero para que pueda hablarse de método matemático hay que requerir que el resultado logrado sea algo no trivial, algo que forme un sistema de verdades profundo, coherente e interesante. Ahora bien, todo esto parece que se dio en culturas anteriores a la griega. Así, por ejemplo, los babilonios y egipcios habían resuelto numerosas ecuaciones algebraicas de segundo grado, lo que no puede considerarse en esa época un problema trivial. Pero en el hecho de la matemática griega juntamente con esa actividad típica y peculiar hay otro elemento, correlato del anterior, como objeto correlato de un sujeto, y que es también esencial al método matemático desde entonces, y es la típica y peculiar entidad de los objetos matemáticos, es decir, de los objetos que crea o sobre los que recae la típica y peculiar actividad propia del ejercicio o realización de la matemática.

En adelante a esa actividad peculiar y típica repetidamente mencionada la llamaremos simplemente razonamiento o razonar matemático, y a esas entidades típicas y peculiares que le corresponden las llamaremos simplemente entidades u objetos matemáticos. Esos objetos aparecen espontáneamente en nuestra mente como si súbitamente fueran descubiertos o creados por ella, sin relación con el tiempo ni con el espacio, con una extraña y simultánea universalidad e individualidad, abstractos y con una precisión asombrosa de modo que distinguimos perfecta y claramente entre el polígono regular convexo inscrito en la circunferencia de radio unidad y con 123 456 lados del mismo polígono con 123 457 lados; todo ello en evidente oposición a los objetos del mundo sensible que nos son familiares a través de nuestros sentidos. Los objetos matemáticos surgen súbitamente, sin que obste una a veces larga y angustiosa búsqueda y gestación.

4. Testimonio de Platón

Los griegos no sólo crearon una matemática extensa, coherente y profunda, sino que además fueron plenamente conscientes del razonar matemático y de sus objetos, y filosofaron sobre ello con agudeza y penetración. Para probarlo bastará que aduzcamos, entre otros muchos textos existentes, los siguientes, tomados del diálogo de Platón, *La República:*

SÓCRATES. Veamos ahora cómo se ha de dividir la especie inteligible.

GLAUCÓN. ¿De qué modo?

S. De suerte que una parte de esta división encierre las imágenes intelectuales, que obligan al alma cuando de ella se sirve, a proceder en sus pesquisas partiendo de ciertas suposiciones, no para subir al principio, sino para bajar a las conclusiones más remotas y que la otra nos ofrezca las ideas puras por cuyo medio el alma sin ayuda de ninguna imagen, partiendo de una suposición, se remonte por el raciocinio hasta un principio independiente de toda suposición.

G. No entiendo bien lo que quieres decir.

S. Lo entenderás luego; todo esto se aclarará por lo que sigue. No ignoras, creo, que los geómetras, aritméticos y otros tales, suponen dos especies de números, el uno par y el otro impar, diferentes figuras y tres especies de ángulos, y así de lo demás conforme a su método; que, mirando después estas suposiciones como otros tantos principios ciertos y evidentes de los cuales no se dignan dar razón, ni a sí mismos, ni a los otros, parten de estas hipótesis, y, por una serie no interrumpida, descienden de proposición en proposición, hasta que llegan a aquella que tenían designio de demostrar.

G. Sé muy bien todo esto.

S. Sabes también que se valen para esto de figuras visibles y que les aplican sus raciocinios, aunque es cierto que no piensan en ellas, sino en otras figuras representadas por éstas. Por ejemplo: no es el cuadrado, ni su diagonal como está sobre el papel, lo que tienen presente, sino el cuadrado cual es en sí mismo con su diagonal. Otro tanto digo de las otras figuras, sean planas o sólidas, que hacen sombra y se retratan en las aguas. Los geómetras se aprovechan de ellas como de otras tantas imágenes, que les sirven para conocer las verdaderas figuras, que no pueden verse de otro modo que con el pensamiento.

G. Dices verdad.

S. Ve, pues, aquí la primera clase de especies inteligibles. El alma para lograr conocerlas, se ve obligada a servirse de suposiciones, no para llegar a un primer principio, porque no puede subir más allá de las suposiciones que ha hecho, sino empleando las imágenes terrestres y sensibles que no conoce sino por la opinión, y suponiendo que son claras y evidentes para ella, las emplea para el conocimiento de las verdaderas figuras.

G. Bien veo que el método de que hablas es el de la geometría y de las otras ciencias de esta naturaleza.

Sigue el coloquio VII que empieza con la alegoría de la caverna y según la cual las entidades matemáticas gozan al parecer, según Platón, de una objetividad extraordinaria y con una existencia independiente. Más adelante hacia el centro del mismo coloquio VII se dice:

SÓCRATES. Y si les preguntase [a los cultivadores de la aritmética y de la ciencia del cálculo]: hombres raros, ¿de qué números habláis? ¿Dónde están esas unidades tales como las suponéis, tan perfectamente iguales entre sí, que no haya entre ellas la menor diferencia, y que no estén compuestas de parte alguna? Mi amado Glaucón, ¿qué piensas que me responderían?

GLAUCÓN. Creo que responderían que ellos hablan de aquellos números que no están sujetos a los sentidos y que no pueden manejarse de otro modo que con el pensamiento.

S. Por tanto, ves, querido amigo, que no podemos absolutamente pasarnos sin esta ciencia, pues que juzgamos que ella obliga al alma a servirse del entendimiento para conocer la verdad.

G. Es cierto que tiene admirable virtud para producir este efecto.

S. ¿Has observado también que los que tienen el espíritu calculador son muy despiertos, por decirlo así, para todas las ciencias, y que, aun los espíritus tardos, cuando se instruyen y ejercitan con el cálculo, sacan a lo menos esta ventaja de adquirir más facilidad y penetración para todo lo demás?

G. Ello es tal como dices.

S. Y, al cabo, creo que con dificultad encontrarás muchas ciencias que cuesten más de aprender y de sondear que ésta.

G. Ciertamente.

S. Por todas estas razones no debemos despreciarla, sino pedir que se dediquen a ella, desde luego, los que nazcan con buenos ingenios.

G. Convengo en ello.

S. Dejémosla, pues, aparte y veamos si la ciencia que a ésta sigue, nos conviene o no.

G. ¿Qué ciencia? ¿Por fortuna sería la geometría?

S. Ella misma. Nadie que tenga la menor tintura de geometría nos negará que el objeto de esta ciencia es directamente contrario a los discursos que de ella tienen los que la manejan.

G. ¿Cómo es esto?

S. El lenguaje de que se valen es muy ridículo, aunque no pueden dejar de usarlo. No hablan sino de cuadrar, prolongar, añadir y así por este orden, como si hiciesen algo y todas sus operaciones se dirigiesen a la práctica, siendo así que en la realidad esta ciencia termina en la especulación.

G. Tienes razón en todo.

S. ¿Convienes aún en otra cosa?

G. ¿En cuál?

S. En que termina en la especulación de lo que es siempre, y no en la de lo que nace y perece con el tiempo.

G. No tengo dificultad en concederlo; porque la geometría tiene por objeto el conocimiento de lo que siempre es [6].

Otros aspectos de los fundamentos de la matemática griega

5. Introducción

Deduciremos estos aspectos analizando la estructura del libro fundamental, los *Elementos* de Euclides [4], y confirmaremos su interpretación con un texto de Aristóteles.

En el número anterior hemos dicho que lo esencial del método matemático estriba en el razonamiento matemático que se aplica a los objetos matemáticos y ello no de una manera trivial o esporádica, sino constituyendo un sistema de verdades coherente, profundo e interesante. Este sistema de verdades, en cuanto formuladas y estereotipadas, puede considerarse como la cristalización del razonamiento matemático.

En torno a la tesis anterior surgen inmediatamente multitud de preguntas: *a*) ¿Cómo debe desarrollarse tal razonamiento? ¿Está sujeto a regla o reglas? *b*) ¿Cómo debe o puede iniciarse? *c*) ¿Cuáles son los criterios de coherencia, de profundidad y de valoración del interés?, y sin duda varias preguntas más que omitimos ahora porque nos parecen prematuras, pero que saltarán espontáneamente más adelante.

6. Carácter necesario de las verdades matemáticas

El razonamiento matemático debe ser llevado de tal modo que engendre convicción en el que lo ejercita, que obligue al asentimiento y engendre una certeza necesaria en el sujeto. Más aún, parece que su expresión externa escrita u oral ha de ser posible y ha de ser capaz de engendrar en el lector u oyente verdaderamente humano (y quizás debidamente iniciado) el mismo tipo de asentimiento necesario que tiene en su autor. Todo esto se da, y en un grado que asombra, en los *Elementos*.

Esta prestancia de convicción, o cogencia al asentimiento puede a veces ser hipotética, en el sentido de que puede apoyarse en proposiciones que no sean absolutamente convincentes. Pero entonces es necesario especificar previamente esas proposiciones y señalar que el sistema de verdades que se construye está basado en la admisión —más o menos necesaria, más o menos convenida— de esas proposiciones que no se imponen necesariamente por sí mismas. Estas proposiciones pueden ser de dos clases: la primera incluye aquellas proposiciones o principios o axiomas generales, o «nociones comunes» que se considera que afectan a todo razonar, sin especificación de un sistema parcial de verdades; la segunda incluye aquellas proposiciones, principios o «postulados» que se considera que afectan exclusivamente a la disciplina, ciencia, teoría o sistema de verdades que se especifica.

En los Elementos de Geometría se dan ambas clases de proposiciones y están catalogadas al comienzo mismo del texto, antes del enunciado y demostración del primer teorema del primer libro. Ejemplos de la primera clase son las κοιναι εννοιαι o nociones comunes o axiomas generales; al parecer son cinco:

1. Cosas iguales a una tercera son iguales entre sí.
2. Si a cosas iguales se añaden cosas iguales, los totales son iguales.
3. Si a cosas iguales se sustraen cosas iguales, las diferencias son iguales.

[7] 4. Cosas que pueden llevarse a ser congruentes son iguales.
[8] 5. El todo es mayor que su parte.

Ejemplos de la segunda clase son los αιτεματα o postulados o axiomas particulares. Son los cinco siguientes:

1. Por dos puntos distintos pasa una única recta.
2. Un segmento rectilíneo puede ser siempre prolongado.
3. Hay una única circunferencia con un centro y un diámetro dados.
4. Todos los ángulos rectos son iguales.
5. Si una secante corta a dos rectas formando a un lado ángulos interiores cuya suma es menor de dos rectos, las dos rectas suficientemente prolongadas se cortan en este mismo lado.

7. El comienzo del razonamiento matemático

En el párrafo anterior hemos analizado el razonamiento matemático. Para que en absoluto éste pueda actualizarse hace falta que se disponga de una manera u otra, o porque se encuentren o porque se suministren de antemano, de un mínimo de objetos matemáticos. Surge así el problema del origen de las entidades matemáticas, en particular de las fundamentales o primi-

tivas. Es decir, de aquellas que no son el término de un razonamiento matemático, sino que parece deben ser un requisito para el comienzo mismo de todo el discurso matemático. Es obvio que es ésta una delicada cuestión que recurrirá una y otra vez en todo intento de fundamentación de la matemática.

La solución dada a esta cuestión por Euclides en sus *Elementos* es la de suministrar de antemano una colección de entidades matemáticas. La manera de suministrarlas es por los *οροι*, o definiciones, o términos, o quizás mejor descripciones que han de excitar en la mente del lector la idea u objeto matemático, cuya definición exacta debía de aparecer a los griegos como imposible o inefable. Se encuentran veintitrés definiciones en el mismísimo comienzo del primer libro y luego otros grupos en el comienzo de cada libro, excepto en el libro X donde se dan definiciones tres veces, y excepto los dos últimos en los que no se dan definiciones.

He aquí algunos ejemplos de *οροι*:

Al comienzo del libro primero:

«1. Un punto es aquello que no tiene partes.
2. Una línea es una longitud sin anchura.
3. Las extremidades de una línea son puntos.
4. Una recta es una línea que yace por igual respecto de todos sus puntos.»

Siguen definiciones de superficie, plano, ángulo y sus clases, círculos, triángulos y cuadriláteros y sus clases y finalmente

«23. Rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano, por más que se las prolongue en ambos sentidos nunca se encuentran.»

Al comienzo del libro V la definición cuarta dice:

«4. Se dice que dos magnitudes forman razón cuando cada una admite un múltiplo que es mayor que la otra.»

Al comienzo del libro X se dan cuatro definiciones que introducen los términos de «conmensurable» e «inconmensurable», y los de «racional» e «irracional», tanto para segmentos rectilíneos como para cuadrados. Al comienzo del libro XI están las 28 últimas definiciones de los *Elementos* y las cuatro finales definen el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro.

8. Coherencia y profundidad de los Elementos

En vano se buscará en los *Elementos* criterios sobre la coherencia, profundidad e interés de los mismos Elementos. Evidentemente estas preguntas se formulan a un nivel superior y las respuestas irán apareciendo a lo largo de este texto. Con todo, podemos afirmar que el sistema de 465 asertos, teoremas o construcciones que constituyen los *Elementos* goza de todas estas cualidades en un grado extraordinario que difícilmente puede encarecerse como merece. Pondérese, por ejemplo, lo que representa de rigor y de finura matemática el hecho de que se postule el quinto postulado y no se dé de él ninguna de las infinitas demostraciones (falsas) que se han dado a lo largo de los siglos. Considérese asimismo la profundidad de los teoremas y las bellezas de las demostraciones y construcciones que antes hemos mencionado.

Actualmente, en toda cuestión relativa a los fundamentos de la matemática, parece indispensable hacer referencia a la lógica. Al fin y al cabo la lógica se ocupa de la estructura de las proposiciones y de las reglas del razonamiento deductivo. Ahora bien, en los *Elementos* no hay ninguna referencia a la lógica. Ello no debe extrañar, pues los *Elementos* son un texto matemático, no un texto sobre la filosofía o los fundamentos de la matemática; numerosos textos sobre cuestiones filosóficas de la matemática se encuentran en Platón y Aristóteles, pero no en Euclides. A pesar de ello, si no una referencia refleja a la lógica como ciencia, parece que por lo menos debería darse en los *Elementos* una estructura lógica de hecho y referencias a las reglas de inferencia lógica. Y en efecto, la estructura de los *Elementos* es de hecho extraordinariamente lógica, en el sentido moderno de la palabra; más aún, si se compara los *Elementos* con un sistema formal, por ejemplo, el de la teoría de números formal, parece puede establecerse una correspondencia entre las definiciones, postulados y nociones generales de los *Elementos* con los términos, axiomas generales del cálculo de predicados y axiomas particulares de la teoría de números formales. Respecto de las reglas de inferencia lógica, éstas efectivamente se echan de menos en los *Elementos*, aunque no en otros escritos de Euclides; la razón de ello es que probablemente en tiempo de Euclides, al revés de lo que sucede con frecuencia actualmente, la lógica con sus reglas de inferencia se consideraba más bien como un producto espontáneo de la matemática y no como un requisito para ella.

9. Testimonio de Aristóteles

Alguna de las palabras que hemos empleado en la precedente descripción de la estructura de los *Elementos* constituyen una interpretación. Que ésta se adapta a la mente de Euclides nos parece que puede confirmarse de una manera especial con el siguiente texto de Aristóteles:

Toda ciencia demostrativa tiene que ver con tres cosas: 1) Las cosas que se supone que existen, a saber, la materia de la ciencia de que se trate, cuyas principales propiedades ha de investigar dicha ciencia. 2) Los así llamados axiomas generales, que son la fuente primaria de toda demostración, y 3) Las propiedades, respecto de las cuales, todo lo que se supone es el significado de los respectivos términos empleados. Sin embargo, no hay razón alguna para que algunas ciencias no prescindan de algunas de estas cosas. Así no hay necesidad alguna de suponer la materia a tratar si es manifiesto que existe (pues no es igualmente claro que existan los números y que el frío y el calor existen); y respecto de las propiedades no es necesario hacer suposición alguna acerca del significado de los términos si ello es claro: así en los axiomas generales nada hay que suponer acerca del significado de sustraer cosas iguales de cosas iguales, porque es bien sabido. Pero ello no obsta para que sea verdad que hay tres cosas bien distintas, la materia a tratar en las demostraciones, las cosas demostradas y las cosas por las que hay que empezar [4].

10. Observaciones

Naturalmente que como toda obra humana, sujeta a la ley de la historia, la matemática griega y en particular los *Elementos* tienen sus insuficiencias. He aquí algunas.

a) Los defectos más graves son quizás los cometidos por razón de las definiciones. Así por ejemplo la definición de recta, que hemos citado textualmente, parece que conviene igualmente a una circunferencia, a ciertos tipos de espirales y a la hélice. Aunque hay que tener en cuenta que los matemáticos griegos son plenamente conscientes de que el lenguaje que emplean especialmente en las definiciones es «ridículo», como lo califica Platón en un texto que hemos citado. Los verdaderos objetos matemáticos son solamente sugeridos, o «iluminados», como dice Aristóteles [4], mediante las figuras que se hacen, y es claro que lo que Aristóteles dice de las figuras se puede referir también a las definiciones. Con todo, no por ello deja de ser verdad que la manera como se introducen los objetos matemáticos deja algunas veces insatisfecho, especialmente a la mente moderna después de las contribuciones de D. Hilbert (1862-1943).

b) La distribución entre «postulados» y «nociones comunes» dista mucho de ser clara. Y lo que es peor, algunas definiciones tienen al parecer carácter de postulados. Así, por ejemplo, la citada definición cuarta al comienzo del libro V es equivalente al actualmente llamado «postulado de Arquímedes» y sabemos hoy día que existen geometrías no arquimedianas.

c) La lista de los postulados, es decir, de aquellas proposiciones primitivas necesarias para empezar la geometría, es totalmente insuficiente. Así, por ejemplo, en la mismísima primera proposición de los *Elementos* se supone que dos circunferencias, cada una pasando por el centro de la otra, se cortan, sin que esto pueda deducirse matemáticamente de la lista de postulados y axiomas previos. Manifiestamente, como señaló Pasch (1843-1931), maestro de Hilbert, faltan postulados de orden. Es verdad que Aristóteles en el texto citado nos dice que lo que es evidente no hace falta postularlo; pero entonces no se ve que estos postulados empleados sin haber sido expresamente mencionados, sean más evidentes que los postulados 2.º y 4.º que se dan y que hemos citado.

d) Incluso en el orden de razonamiento tan admirable en todo el texto de los *Elementos*, no deja de haber algún error. Así, por ejemplo, la proposición 16 del libro I dice: «En todo triángulo, si se prolonga uno de los lados, el ángulo exterior es mayor que cualquiera de los ángulos interiores adyacentes al lado opuesto». Esta proposición no puede demostrarse a partir de los postulados previamente establecidos, y la falsedad de la demostración que da Euclides deriva de una excesiva confianza en la intuición geométrica de la infinitud de la longitud de la recta.

Bibliografía

1 Blaschke, W., *Griechische und Anschauliche Geometrie*. Munich. Verlag von R. Oldenbourg, 1953.

2 Bourbaki, N., *Eléments d'histoire des Mathématiques*. París. Hermann, 1960.

3 Eves y Newsom, *An Introduction to the Foundations & Fundamental concepts of Mathematics*. Nueva York. Rinehart & Company, Inc., 1959.

4 Heath, T. L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Nueva York. Dover Publications, Inc., 1956.

5 Kneebone, G. T., *Mathematical Logic and the Foundations of Mathematics*. Londres. D. Van Nostrand Company Limited, 1963.

6 Platón, *La República*. Madrid. Sociedad Española de Librería.

7 Rey Pastor, J., y Babini, J., *Historia de la Matemática*. Buenos Aires. Espasa Calpe, S. A., 1951.

8 Van der Waerden, B. L., *Science Awakening*. Traducción al inglés por A. Dresden. Groninga. Erven P. Noordhoff, 1954.

9 Wedberg, A., *Platon's Philosophy of Mathematics*. Estocolmo. Almquist y Wiksell, 1955.

10 Wussing, H., *Mathematik in der Antike*. Leipzig. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1962.

2

De J. Saccheri a B. Riemann (1773-1854)

1. Historia del quinto postulado de Euclides

En el capítulo anterior hemos citado textualmente la definición de paralelas que da Euclides y su quinto postulado. Este es de tal naturaleza, que parece ha de responder a una manera de ser de la geometría del espacio físico en que vivimos, y por tanto, parece ha de seguirse que no ha de haber necesidad de que se postule, sino que ha de poderse demostrar partiendo de los demás postulados, a saber, de los explícitos de Euclides mismo, juntamente con otros que implícitamente supone Euclides y que son del todo evidentes. En otras palabras, el quinto postulado parece que debiera ser un teorema que debería poderse demostrar partiendo de los postulados explícitos de Euclides y de las veintiocho primeras proposiciones del libro primero de los *Elementos*, los cuales son demostrados sin emplear el quinto postulado. Así lo pensaron eminentes matemáticos a lo largo de todos los siglos, hasta hace poco más de un siglo en que los matemáticos empezaron a sospechar que el tal postulado era independiente de los demás, y hace menos de un siglo se dio la primera demostración matemática, o mejor metamatemática, de que, efectivamente, era imposible demostrar el quinto postulado sin suponer algo que fuera equivalente al postulado que quería demostrarse.

La primera presunta demostración del 5.º postulado, que es profunda y ha llegado hasta nosotros, se debe al sistematizador de la astronomía griega, Tolomeo (siglo II d. de J.C.). La demostración dada por Tolomeo nos es conocida por Proclo, quien después de señalar la insuficiencia de la demostración de Tolomeo da su propia demostración del 5.º postulado. Pero en ésta, Proclo supone que toda recta que corte a una de dos rectas paralelas debe cortar también a la otra, y esta hipótesis es esencialmente equivalente al 5.º postulado que se pretende demostrar. Citemos otra profunda pretendida demostración de Nashiraddin (1201-1272), famoso matemático persa traductor de los *Elementos* de Euclides; y finalmente, de los anteriores a Saccheri, citemos al célebre autor de la *Arithmetica infinitorum* Juan Wallis (1616-1703), quien muestra que suponiendo que existan figuras semejantes, no iguales, se puede demostrar el 5.º postulado.

Jerónimo Saccheri (1667-1733)

2. El método de Saccheri

Un paso importante hacia el esclarecimiento de la cuestión sobre la independencia del 5.º postulado fue el dado por el matemático jesuita, profesor de Lógica en Turín y luego de Matemáticas en la universidad de Pavía, Jerónimo Saccheri, con la publicación de su libro *Euclides ab omni naevo vindicatus*, o sea, «Euclides vindicado de todo error», publicado en 1733, es decir, el mismo año de la muerte de su autor. Por ser extraordinariamente ilustrativo no sólo de las dificultades que plantea el 5.º postulado, sino también de las de la fundamentación de las matemáticas y en particular de la fuerza de la intuición y de la tradición, expondremos con algún detalle la obra de Saccheri y la de Euclides a la que se refiere.

Saccheri parte del cuadrilátero birrectángulo isósceles o cuadrilátero de Saccheri, aunque esta figura había sido ya considerada

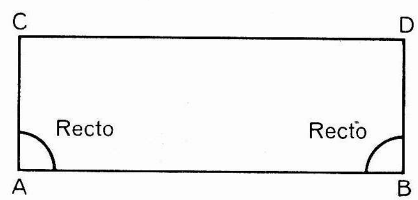


Fig. 1

anteriormente por C. Clavio. Este cuadrilátero (fig. 1) está formado por un segmento AB, las dos perpendiculares AC y BD a AB, y tomando BD igual a AC. Demuestra en primer lugar que los ángulos del cuadrilátero en C y D son iguales y plantea las tres hipótesis posibles de que sean ambos rectos, obtusos o agudos.

Parece que Saccheri, sea en virtud de su propia casi demostración, sea por la fuerza de una tradición bimilenaria jamás puesta en entredicho, está convencido de que la única hipótesis racionalmente coherente es la del ángulo recto, equivalente al 5.º postulado de Euclides. Consecuentemente toda su argumentación va dirigida a excluir mediante reducción al absurdo las dos hipótesis del ángulo obtuso y agudo. Esta argumentación contiene XXXIII proposiciones al estilo de los *Elementos* y ocupa toda la primera parte (de las dos que tiene) del primer libro (de los dos que tiene) de *Euclides ab omni naevo vindicatus*. Si exceptuamos la proposición XXXIII y última, que comentaremos más adelante, toda la argumentación de Saccheri no desmerece en nada de Euclides mismo por la profundidad y rigor de las demostraciones. El librito de Saccheri constituye, sin que llegara a reconocerlo su autor, el primer tratado de geometrías no euclídeas, con unos treinta teoremas, muchos de ellos nada triviales en verdad.

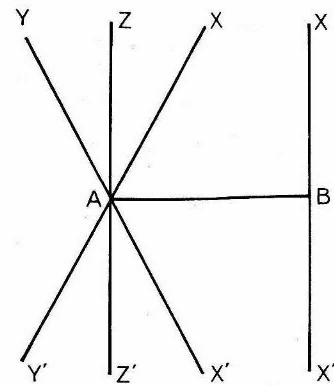


Fig. 2

Uno de los resultados más profundos de nuestro autor es el llamado teorema de Saccheri que enunciamos fundiendo las proposiciones XXIII y XXV: «Dos rectas situadas en un mismo plano o tienen una perpendicular común, o se cortan a distancia finita o son asintóticas entre sí». Otro teorema es la proposición XXXII: «En la hipótesis del ángulo agudo existe un ángulo XAB (fig. 2), tal que AX no encuentra a BX perpendicular a AB; toda oblicua comprendida en el ángulo XAB encuentra a BX; toda oblicua que forme con AB un ángulo agudo mayor que XAB o un ángulo recto, tiene con BX una perpendicular común a distancia finita» [12].

3. Paralogismos de Euclides y Saccheri

Veamos con algún detalle cuáles son los paralogismos que llevan a Saccheri a la exclusión de las hipótesis del ángulo obtuso y agudo, hipótesis que andando el tiempo deberían conducir a la creación de las geometrías elementales elíptica e hiperbólica respectivamente.

Nuestro autor elimina en principio la hipótesis del ángulo obtuso en la proposición XIII que dice: «En las hipótesis del ángulo recto y del ángulo obtuso el 5.º postulado de Euclides es verdadero» [12]. La demostración que sigue es correcta, pero se basa en la proposición 17 del libro primero de Euclides, quien a su vez la ha demostrado independientemente del 5.º postulado. Ahora bien, esa proposición 17 depende de la 16 que Euclides enuncia así: «Si en un triángulo ABC se prolonga un lado BC hasta D, el ángulo exterior ACD es mayor que cualquiera de los ángulos interiores y opuestos al C» [12].

Demostración (fig. 3): El autor de los *Elementos* toma el punto medio E de AC y luego prolonga BE y toma EF = BE. Los triángulos ABE y CFE son iguales, de donde el ángulo EAB es igual al ECF y *se sigue* que el ángulo ECD es mayor que el BAE, como se quería demostrar. De la proposición 16 así demostrada el mismo Euclides deduce correcta y fácilmente en la proposición 27 la existencia de paralelas con sólo tomar dos rectas que sean cortadas por una secante de modo que formen ángulos internos de un mismo lado que sumen dos rectos.

Ahora bien, en la demostración que acabamos de reproducir hemos subrayado las palabras *se sigue* porque constituyen un paralogismo. En efecto, en ningún sitio se ha postulado, por lo menos explícitamente, que la recta tenga que ser de longitud infi-

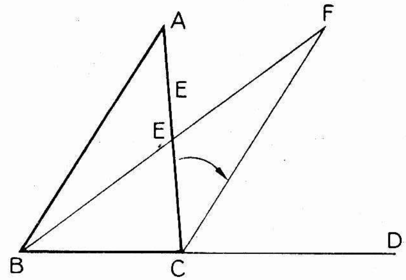


Fig. 3

nita. Supongamos que sea de longitud finita y sea ésta π. Sea BE (figura 4), mayor que $\pi/2$. Entonces es claro que cuando B se mueve sobre el segmento dibujado BE hacia E, el punto E se mueve conservando la distancia constante al punto móvil B hasta llegar a un punto tal como F. En la figura 3 el triángulo ECF tiene en efecto el ángulo ECF menor que el ACD como quiere Euclides, pero en el caso presente el mismo ángulo ECF es mayor que el ACD. De donde la proposición 16 de Euclides resulta falsa en ese caso. Parece se podría todavía justificar a Euclides añadiendo que supone un «plano» en el que no sea posible que un punto móvil sobre una recta pueda volver sobre sí mismo sin cambiar nunca el sentido del movimiento. Pero esta suposición debería haber sido especificada, precisamente porque ahora vemos que

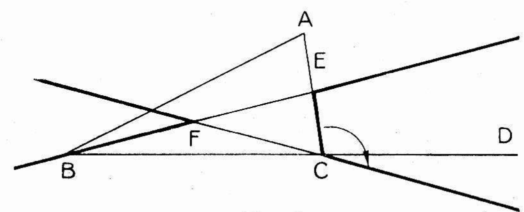


Fig. 4

tiene un pleno posible sentido físico; y podía haber sido especificada de muy diversas maneras: así como el 5.º postulado excluye la posibilidad de dos paralelas por un punto a una recta, se podía haber postulado la existencia de una paralela y entonces la geometría elíptica quedaba ya excluida. O bien se podía haber especificado en términos de suma de ángulos de un triángulo o de «curvatura», pero esa noción es totalmente ajena a Euclides y será fruto precisamente de la temática de los siglos XVIII y XIX que ahora estamos tratando. Obsérvese que en el plano elíptico, el de la longitud de recta finita, nada hay de paso por el infinito o puntos en el infinito, pues todo está a distancia finita; naturalmente hay una diferencia profunda entre ambos «planos»: el euclídeo no es compacto, mientras que el elíptico lo es.

Observemos finalmente, para corresponder a la alusión hecha en la sección 1, que la primera vez que Euclides comete el paralogismo de suponer la recta de longitud infinita es en la proposición 12 del libro primero que dice: «Trazar por un punto dado Z fuera de la recta dada AB, una perpendicular a la misma» (figuras 5 y 6).

Euclides toma un punto D al otro lado de Z respecto de AB y da por supuesto que el círculo F de centro Z y radio CD corta a AB, pero esto no se sigue si ZD es mayor que la distancia máxima de Z a cualquier punto de AB. La circunferencia elíptica F, hablando euclídeamente puede ser la hipérbola FF′F″F‴F que no corta a AB.

Parece, pues, que cabe calificar el paralogismo de Euclides, de Saccheri y tantos otros, de extraordinariamente sutil y no ha sido esclarecido hasta después de la obra de Riemann. Tales paralogismos ilustran bien las dificultades de la fundamentación de la matemática y han motivado la desconfianza que los matemáticos sienten por la intuición física. Para una más completa exposición de la obra de Saccheri y de sus consecuencias me remito a mis artículos [13] y [14].

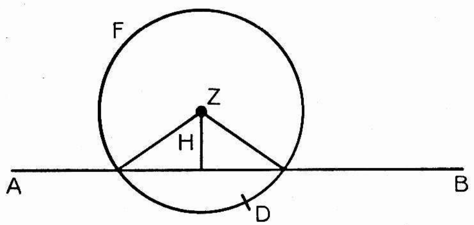


Fig. 5

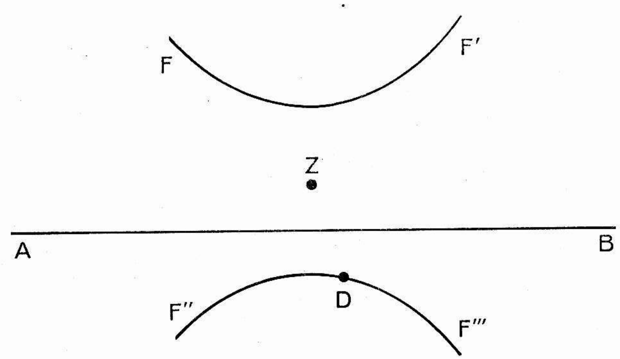


Fig. 6

Independencia del 5.º postulado

4. Nota histórica

En el proceso de esclarecimiento de los problemas acerca de la fundamentación de las matemáticas planteados por el 5.º postulado, otro paso importante lo dio Juan H. Lambert (1728-1777), quien establece la relación de proporcionalidad entre el defecto (o exceso) de la suma de los ángulos de un triángulo respecto de dos rectos en la hipótesis del ángulo agudo (u obtuso) y su área. Además sugiere la analogía de la geometría del ángulo agudo con la geometría sobre una esfera de radio imaginario. Pero parece que no es hasta alrededor de 1825 cuando surge con claridad y consistencia la idea de una geometría absoluta, o sea, prescindiendo del 5.º postulado. En la fecha mencionada Johann Bolyai (1802-1860) escribe a su padre Wolfgang, profesor de Matemáticas, filósofo y amigo de Gauss, que en cuanto pueda quiere escribir sobre la teoría de las paralelas y en la misma carta exclama: «De la nada he creado un nuevo y extraño universo» [5]. El padre envió el trabajo de su hijo a Carlos F. Gauss (1777-1855) y luego lo publicó en 1832 como un apéndice de su propia obra.

En el caso que estamos tratando, como en el caso del descubrimiento del cálculo infinitesimal en el siglo XVII y tantos otros, parece que el acervo de conocimientos y actitudes matemáticas se había desarrollado ya suficientemente y por así decirlo estaba maduro para que *casi espontáneamente* se desprendiera la idea fruto de las geometrías no euclídeas. Cuando Gauss recibió el trabajo de J. Bolyai ya había llegado por su propia cuenta a las más importantes ideas contenidas en el trabajo recibido. Así lo manifiesta por carta (fecha 27-1-1829) a Bessel añadiendo que no piensa publicar nada por largo tiempo y quizás nunca porque teme «la gritería de los beocios» [1]; los palurdos aludidos por Gauss son sin duda los filósofos kantianos, para quienes la geometría euclídea se derivaba necesariamente de la forma trascendental de la sensibilidad. Todavía hay más, pues independientemente llegó a las mismas sustanciales conclusiones Nicolás I. Lobachevski (1793-1856), quien fue el primero en publicar (1829-1830) un desarrollo sistemático de la geometría del ángulo agudo en el Boletín de la Universidad de Kazán.

5. Modelos

En orden a explicar lo más importante de toda esta problemática de las geometrías elementales desde el punto de vista de los fundamentos, vamos a exponer nuevamente los postulados en que se basan, tomándolos de D. Hilbert (1862-1943) en su obra *Fundamentos de la Geometría* (1899) [8] y [9]. Por comodidad y sin perder nada de lo que nos interesa vamos a limitarlos a las geometrías planas, es decir, bidimensionales. Ayudará a la comprensión de lo que sigue el tener presente modelos de las geometrías del ángulo obtuso o elíptica y del ángulo agudo o hiperbólica. Estos modelos pueden realizarse en superficies sumergidas en el espacio euclídeo de tres dimensiones y dotadas, por tanto, de la métrica subordinada por el espacio euclídeo tridimensional en las superficies modelo. Para modelo de geometría elíptica tómese la superficie esférica de rado unidad, entendiendo por definición que un punto elíptico de esa geometría sobre la esfera («plano elíptico») está constituido por dos puntos (no ordenados) euclídeos diametralmente opuestos, y que las rectas elípticas son los círculos máximos euclídeos y, consiguientemente, la longitud de la recta

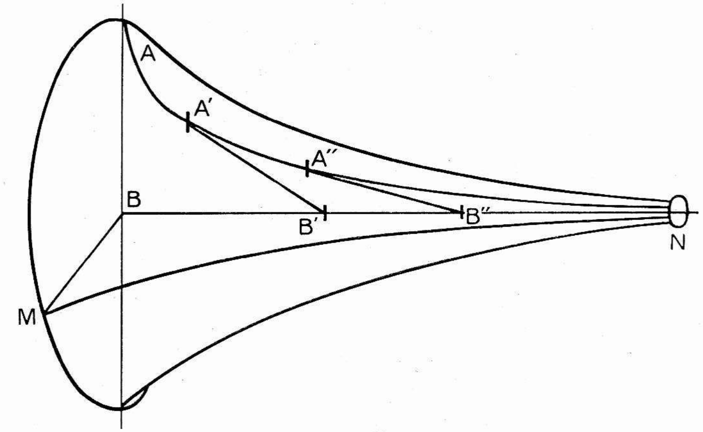


Fig. 7

elíptica es π. De modo que el plano elíptico se arrolla o envuelve perfecta y totalmente sobre una semiesfera con la condición de que se identifiquen los puntos diametralmente opuestos del círculo máximo que limita la semiesfera. Observemos de paso que en ese modelo la definición de punto discrepa, pero sólo desde un punto de vista descriptivo, de la definición de Euclides: «punto es aquello que no tiene partes».

Como modelo de la geometría hiperbólica «plana» tomamos la geometría euclídea sobre la seudoesfera, es decir, figura 7, la superficie de revolución engendrada por la tractriz al girar alrededor de su asíntota. La tractriz puede definirse como la curva que describe un perro A que persigue a otro B, cuando B se mueve en línea recta y A se conserva a una distancia AB $=$ k, constante; la asíntota o eje de revolución es la recta que recorre B. Un punto hiperbólico del «plano hiperbólico» se identifica con un punto de la seudoesfera, y la recta hiperbólica que pase por dos puntos P, Q con la geodésica o curva más corta que sobre la seudoesfera une P con Q. Una vez obtenida esta seudoesfera conviene considerarla como constando de infinitas hojas iguales y superpuestas, todas ellas cortadas primeramente a lo largo de un mismo meridiano y luego cada canto superior de cada una de ellas soldado

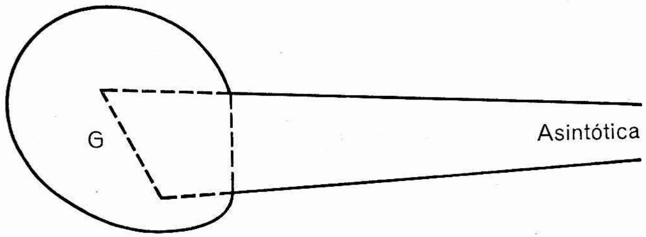


Fig. 8

con el canto inferior de la hoja siguiente, formando una sola superficie de infinitas hojas, de modo que dos rectas hiperbólicas (geodésicas) cualesquiera nunca puedan cortarse en más de un punto. El procedimiento para obtener esta superficie es enteramente análogo al que se emplea al construir las superficies de Riemann para uniformizar funciones de variable compleja, que de otra manera (es decir, en el plano complejo de una sola hoja) serían multiformes. Obsérvese con todo que en el plano hiperbólico toda recta es infinita en ambas direcciones, mientras que en el modelo construido de la seudoesfera los únicos segmentos que pueden prolongarse infinitamente son los segmentos de meridiano y aun éstos en sólo uno de los dos sentidos de la recta. Por tanto, el modelo construido es local, es decir, refleja sólo una parte de plano hiperbólico. Más concretamente, sea G un conjunto abierto del plano hiperbólico que pueda recubrirse mediante dos conjuntos C y T, tales que C sea hiperbólicamente acotado y T sea el interior de un triángulo que tenga a lo sumo un ángulo nulo (es decir, formado por dos rectas asintóticas); entonces puede tomarse un número finito suficientemente grande de hojas seudoesféricas para que el conjunto G pueda arrollarse totalmente sobre ellas, de manera que las rectas hiperbólicas sean congruentes con geodésicas y se conserven distancias y ángulos. Por ejemplo, si suponemos que el plano del papel es hiperbólico el interior G de la figura 8 puede envolverse sobre una seudoesfera.

6. Axiomatización de Hilbert

a) Hilbert divide los postulados de que pueden partir las geometrías elementales en cinco grupos. Al primer grupo pertenecen los postulados de incidencia, que se reducen a postular que por dos puntos pasa una única recta; toda recta contiene por lo menos dos puntos; y existen por lo menos tres puntos no alineados. Este grupo coincide con los formulados más o menos explícitamente por Euclides en sus *Elementos.* El mismo grupo de postulados de incidencia sirve también para definir la geometría hiperbólica y para la elíptica.

b) El segundo grupo lo constituyen los postulados de orden. Estos postulados faltan en los *Elementos* de Euclides y por lo que ya llevamos dicho es claro que no pueden ser los mismos para la geometría elíptica que para las otras dos, puesto que si tres puntos distintos están sobre una recta elíptica, por ser ésta de longitud finita (y cerrada como una circunferencia euclídea), resulta que cualquiera de ellos está entre los otros dos, lo que no sucede en las otras dos geometrías. Hilbert selecciona como suficientes e independientes para la geometría euclídea los siguientes: «Si hay tres puntos en una recta hay uno y sólo uno que esté entre los otros dos. Para todo par de puntos A y B, existe un punto C tal que B está entre A y C. Si una recta corta el lado de un triángulo, entonces o corta otro lado o pasa por el vértice opuesto (Axioma de Pasch)». Pueden tomarse estos mismos postulados para construir la geometría hiperbólica. Para la geometría elíptica se pueden tomar axiomas del todo análogos, pero que sean de separación de pares de puntos, de la misma manera que se hace en geometría proyectiva. Por ejemplo, en vez del primero puede tomarse: «Si hay cuatro puntos sobre una recta se pueden distribuir de manera única en dos pares de modo que cada par separe el otro». Para establecer el postulado de Pasch, puesto que dos puntos A y B determinan dos segmentos, es necesario definir el triángulo impidiendo que pueda tener ángulos superiores a dos rectos. Así ABC es un triángulo, pero A′B′C′ no lo es (figs. 9 y 10).

c) El tercer grupo lo constituyen los postulados de congruencia que análogamente a los del primer grupo están todos en los *Elementos* y sirven simultáneamente para las tres geometrías. En Euclides el sentido del postulado que establece la igualdad de figuras cuando son congruentes (Axioma 4), deja que desear, y Hilbert lo sustituye por la proposición cuarta del libro primero, que establece que, si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo

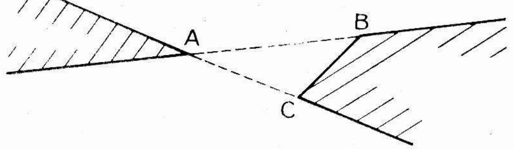


Fig. 9

comprendido iguales, entonces son iguales o sea congruentes. Este postulado o primer teorema de congruencia caracteriza las geometrías elementales frente a las geometrías rimanianas.

En efecto: considérense dos triángulos ABC y A′B′C′ en una misma superficie esférica de radio R y tales que los lados (tomados en el mismo orden dextrógiro) sean iguales: BC = B′C′ = a, CA = C′A′ = b, AB = A′B′ = c. Entonces el triángulo A′B′C′ puede ser deslizado sin deformarse y sin que nunca ninguno de sus puntos interiores se separe de la superficie esférica hasta coincidir con el triángulo ABC.

Gauss demostró que para que esto sea posible sobre una superficie sumergida en el espacio euclídeo de tres dimensiones, y para cualquier triángulo formado por geodésicas por muy pequeño que fuera, era condición necesaria y suficiente que la ahora llamada «curvatura de Gauss» fuera constante en todos los puntos de la superficie, lo cual sucede con la esfera, en cuyo caso además la curvatura de Gauss es positiva. Por tanto, hay infinitos planos elípticos caracterizados por el valor de su curvatura, de modo

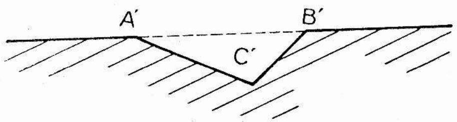


Fig. 10

que para que sus dominios en dos planos elípticos distintos puedan ser congruentes (igualdad de distancias y ángulos) es necesario que ambos planos tengan la misma curvatura.

Considérese ahora un toro o figura engendrada por una circunferencia que gira alrededor de una recta situada en su plano y que no la corta. Sean ABC y A′B′C′ dos triángulos geodésicos muy pequeños sobre la superficie torácica, el ABC en la parte convexa o exterior y A′B′C′ en la cóncava o interior. Sean AB y A′B′ de igual longitud y lo mismo AC y A′C′; además el ángulo BAC sea igual al B′A′C′. Es evidente que los dos triángulos *no* pueden ser iguales entre sí; el lado BC es convexo respecto de A, mientras que B′C′ es cóncavo respecto de A′; o de otro modo: si A″B″C″ es el triángulo plano tal que A″B″ = AB, A″C″ = AC, ángulo B″A″C″ = ángulo BAC, el triángulo ABC tiene un área mayor que A″B″C″, mientras que A′B′C′ tiene un área menor. El plano euclídeo queda caracterizado porque en él la curvatura de Gauss es nula en todos sus puntos. El plano hiperbólico tiene curvatura constante negativa y la seudoesfera tiene también curvatura constante negativa e igual a $-k^2$, siendo AB = k la distancia mencionada entre los dos perros.

d) El cuarto grupo de postulados (cambiando el orden de los dos últimos grupos dado por Hilbert) lo constituyen los de continuidad. Son dos: el postulado de Arquímedes, enunciado por Euclides en el comienzo del libro IV, y el postulado de continuidad de la recta, debido fundamentalmente a Dedekind, véase capítulo 3, aunque la idea clave se encuentra ya en Eudoxo y fue incorporada por Euclides en sus *Elementos* (libro V, Def. 4).

e) El último grupo lo constituye el único postulado de las paralelas equivalente al quinto postulado para el caso de la geometría euclídea. Resulta, pues, que si se dejan los postulados de orden en forma disyuntiva para que sean aptos para las tres clases de geometrías, entonces el postulado de las paralelas especifica las tres clases de geometrías elementales. Podría enunciarse así: «Por un punto fuera de una recta se pueden trazar infinitas paralelas (geometrías hiperbólicas), sólo una (euclídea) o ninguna (elípticas)». En particular se deduce que el quinto postulado de Euclides es independiente del conjunto de todos los demás postulados, es decir, que no puede ser demostrado a partir de ellos.

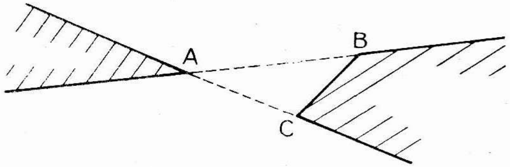


Fig. 9

comprendido iguales, entonces son iguales o sea congruentes. Este postulado o primer teorema de congruencia caracteriza las geometrías elementales frente a las geometrías rimanianas.

En efecto: considérense dos triángulos ABC y A'B'C' en una misma superficie esférica de radio R y tales que los lados (tomados en el mismo orden dextrógiro) sean iguales: BC = B'C' = a, CA = C'A' = b, AB = A'B' = c. Entonces el triángulo A'B'C' puede ser deslizado sin deformarse y sin que nunca ninguno de sus puntos interiores se separe de la superficie esférica hasta coincidir con el triángulo ABC.

Gauss demostró que para que esto sea posible sobre una superficie sumergida en el espacio euclídeo de tres dimensiones, y para cualquier triángulo formado por geodésicas por muy pequeño que fuera, era condición necesaria y suficiente que la ahora llamada «curvatura de Gauss» fuera constante en todos los puntos de la superficie, lo cual sucede con la esfera, en cuyo caso además la curvatura de Gauss es positiva. Por tanto, hay infinitos planos elípticos caracterizados por el valor de su curvatura, de modo

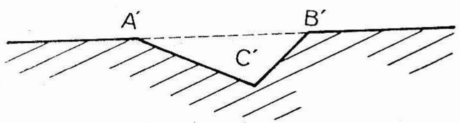


Fig. 10

que para que sus dominios en dos planos elípticos distintos puedan ser congruentes (igualdad de distancias y ángulos) es necesario que ambos planos tengan la misma curvatura.

Considérese ahora un toro o figura engendrada por una circunferencia que gira alrededor de una recta situada en su plano y que no la corta. Sean ABC y A'B'C' dos triángulos geodésicos muy pequeños sobre la superficie torácica, el ABC en la parte convexa o exterior y A'B'C' en la cóncava o interior. Sean AB y A'B' de igual longitud y lo mismo AC y A'C'; además el ángulo BAC sea igual al B'A'C'. Es evidente que los dos triángulos *no* pueden ser iguales entre sí; el lado BC es convexo respecto de A, mientras que B'C' es cóncavo respecto de A'; o de otro modo: si A''B''C'' es el triángulo plano tal que A''B'' = AB, A''C'' = AC, ángulo B''A''C'' = ángulo BAC, el triángulo ABC tiene un área mayor que A''B''C'', mientras que A'B'C' tiene un área menor. El plano euclídeo queda caracterizado porque en él la curvatura de Gauss es nula en todos sus puntos. El plano hiperbólico tiene curvatura constante negativa y la seudoesfera tiene también curvatura constante negativa e igual a $-k^2$, siendo AB = k la distancia mencionada entre los dos perros.

d) El cuarto grupo de postulados (cambiando el orden de los dos últimos grupos dado por Hilbert) lo constituyen los de continuidad. Son dos: el postulado de Arquímedes, enunciado por Euclides en el comienzo del libro IV, y el postulado de continuidad de la recta, debido fundamentalmente a Dedekind, véase capítulo 3, aunque la idea clave se encuentra ya en Eudoxo y fue incorporada por Euclides en sus *Elementos* (libro V, Def. 4).

e) El último grupo lo constituye el único postulado de las paralelas equivalente al quinto postulado para el caso de la geometría euclídea. Resulta, pues, que si se dejan los postulados de orden en forma disyuntiva para que sean aptos para las tres clases de geometrías, entonces el postulado de las paralelas especifica las tres clases de geometrías elementales. Podría enunciarse así: «Por un punto fuera de una recta se pueden trazar infinitas paralelas (geometrías hiperbólicas), sólo una (euclídea) o ninguna (elípticas)». En particular se deduce que el quinto postulado de Euclides es independiente del conjunto de todos los demás postulados, es decir, que no puede ser demostrado a partir de ellos.

Bernardo Riemann (1826-1866)

7. Geometrías rimanianas

Para terminar la exposición de este tema de la historia de los fundamentos hemos de referirnos a la obra de Riemann substancialmente incluida en su célebre tesis doctoral, a cuya lectura (1854) asistió Gauss casi octogenario, intitulada *Sobre las hipótesis en que se basa la geometría.* El gran mérito de Riemann está en haberse dado cuenta el primero de la enorme indeterminación o relatividad a que pueden estar sujetos nuestros compases cuando viajan, lo cual sería genialmente aprovechado medio siglo más tarde por Einstein para formular una mejor aproximación de nuestro espacio-tiempo físico, que la del modelo debido fundamentalmente a Galileo (1564-1642) y Newton (1641-1727), vigente hasta entonces. Sin entrar en detalles de la disertación rimaniana, vamos a exponer su aplicación a las geometrías elementales dando modelos de ellas realizados en el plano euclídeo.

Para el caso de las geometrías elípticas será fácil construir un modelo en el plano euclídeo (naturalmente con métrica no euclídea), teniendo en cuenta el modelo esférico antes mencionado, construido sobre una esfera e identificando cada par de puntos diametralmente opuestos con un punto elíptico. En efecto, bastará tomar como centro de proyección el centro O de la esfera y proyectar ésta sobre un plano P, tangente a la esfera en un punto Z, definiendo sobre el plano P la métrica siguiente: Sean (AA*), (BB*), (CC*) tres pares de puntos diametralmente opuestos sobre la esfera S y sean A′, B′, C′ los puntos donde OA, OB y OC cortan respectivamente el plano P (fig. 11).

Entonces la recta elíptica AB (círculo máximo) se proyecta sobre la recta elíptica A′B′ en el plano P, que coincide con la recta euclídea A′B′, pero con distinta métrica, pues por definición la distancia elíptica A′B′ es la longitud sobre la esfera del arco AB (o AB*, caso de que AB fuera mayor que π). Asimismo, por definición, el ángulo elíptico B′A′C′ es el ángulo euclídeo de los planos AOB y AOC. Obsérvese que para que P sea un modelo global de plano elíptico, hace falta unirle una recta en el infinito (euclídeo) del plano P como la recta del plano proyectivo, pero en el plano elíptico esa recta tiene todos sus puntos a distancia $\pi/2$ del punto Z del plano, y es perpendicular a todas y solas las rectas que pasan por Z.

Supongamos que D sea el pie de la perpendicular por Z a A′B′

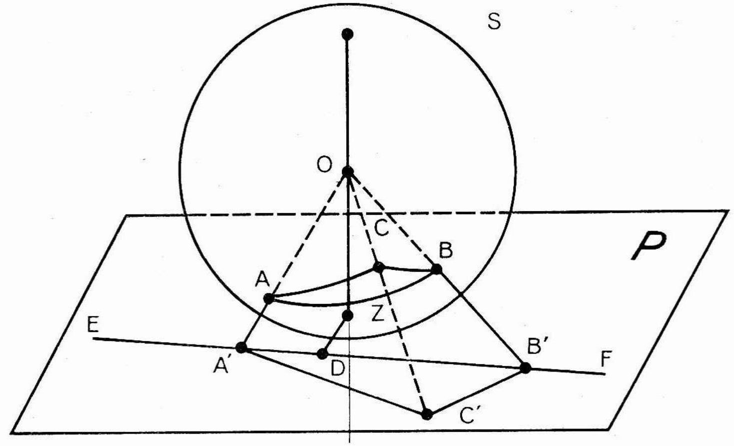


Fig. 11

y que un compás elíptico colocado inicialmente son sus dos puntas en D y B′ se mueve sobre la recta EF en dirección hacia F y conservando su apertura constante. Para un espectador euclídeo, el compás va abriéndose mientras se aleja de D hasta abrirse con una apertura infinita, en cuyo momento la punta que inicialmente estaba en B′ aparece por el lado E de la recta A′B′. Ahora bien, en realidad, no sabemos si los compases que manejamos de verdad con nuestras manos son elípticos o no, pero si lo fueran deberían aparecer a espectadores euclídeos ideales o imaginarios tan extraños como nos parece ahora el comportamiento descrito del compás elíptico. También es claro que el plano P con la métrica elíptica se acomodaría, envolvería o se arrollaría perfecta y totalmente sobre la mitad de la esfera S, dotada ésta de la métrica subordinada por el espacio euclíneo tridimensional, en el que está sumergida y suponiendo que se identificasen los puntos diametralmente opuestos del círculo límite.

Para construir un modelo global del plano hiperbólico consideremos en el conjunto de puntos del plano euclídeo los interiores a una cónica que para mayor sencillez supondremos es un círculo C. Expondremos un modelo (fig. 12) en el que las rectas hiperbólicas coinciden (consideradas como conjuntos de puntos) con las cuerdas euclídeas del círculo C. He aquí una idea de la geometría hiperbólica en ese modelo. La distancia hiperbólica entre dos puntos AB_H se define en términos de la distancia euclídea así:

$$AB_H = \frac{k}{2} \log \frac{NA \cdot BM}{MA \cdot BN}.$$

De modo que si un compás con puntas en A y B se mueve hacia N, el espectador euclídeo ve cómo va cerrándose, de modo que por muchos pasos que dé, nunca llega a N, o sea que la recta hiperbólica es infinita ($AB_H = BB'_H = B'B''_H = \ldots$).

Las rectas AB y PN son paralelas y asintóticas; las MN y PQ son también paralelas y tienen una perpendicular común AC que representa la mínima distancia entre las dos, y a partir de la cual

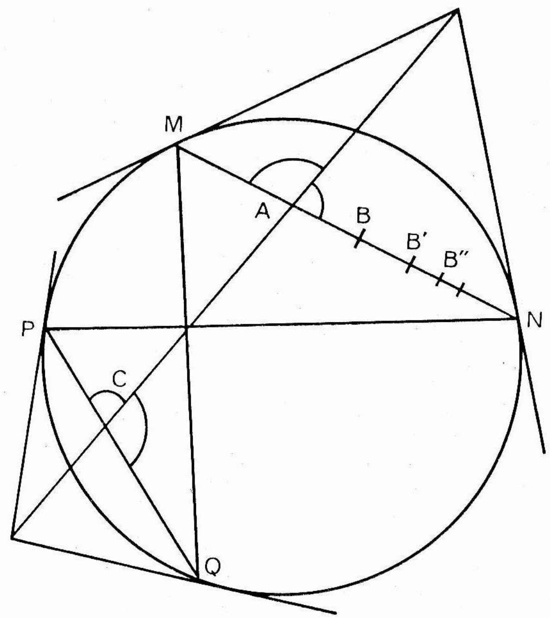


Fig. 12

las rectas divergen. Los cuatro ángulos señalados son cuatro ángulos rectos. El ángulo de dos rectas asintóticas es cero.

Hay otro importante modelo de plano hiperbólico debido a Poincaré (1854-1912), y que se obtiene por proyección estereográfica, desde el polo de una esfera y sobre el plano ecuatorial, de la semiesfera opuesta al centro de proyección. En este modelo los ángulos hiperbólicos coinciden con los euclídeos y las rectas hiperbólicas son arcos de circunferencias euclídeas ortogonales a la circunferencia ecuatorial C que limita en el plano euclídeo al plano hiperbólico. Este mismo modelo en vez de realizarlo en el interior de una circunferencia C, puede realizarse en el semiplano $y > 0$, en cuyo caso la métrica rimaniana viene dada muy simplemente por $ds^2 = (dx^2 + dy^2)/y^2$.

Es fácil conjeturar que el descubrimiento de Riemann, así como permite mediante métricas apropiadas dar al conjunto de puntos del plano euclídeo la estructura de una superficie de curvatura constante, igualmente se podrían realizar en el mismo plano las métricas correspondientes a otras superficies, cuya curvatura sea variable. Es claro que entonces estos «planos» rimanianos no satisfarán al último postulado del grupo de congruencia o primer teorema de congruencia y por tanto no serán geometrías elementales.

Consecuencias para la fundamentación de las matemáticas

8. Relatividad de la geometría

Las geometrías rimanianas han contribuido de una manera decisiva a despertar una actitud crítica acerca de la naturaleza de los objetos propios de la geometría en general y aún de toda la matemática. Evidentemente y al contrario de lo que pensó Kant la geometría euclídea tomada de un modo global y exclusivo, es decir, prescindiendo de las otras, no puede considerarse como conjunto de juicios sintéticos *a priori* impuestos por la mente en orden a la estructuración de toda la geometría.

He aquí cómo se expresa Gauss en carta a Bessel (1830):

Es mi íntima convicción que la ciencia del espacio se encuentra en una situación totalmente distinta que la ciencia de la cantidad en relación con nuestro conocimiento *a priori;* no podemos tener de la primera un conocimiento con aquella completa convicción de su necesidad (y consiguientemente también de su absoluta verdad) que es propia de la última; debemos conceder con humildad, que aun cuando el número sea un puro producto de nuestro espíritu, el espacio tiene también una realidad fuera de nuestro espíritu, cuyas leyes no podemos *a priori* prescribir completamente [1].

Para un análisis de este texto de Gauss véase el artículo de A. Dou [14]. Es curioso que medio siglo más tarde G. Frege llegara también a la conclusión de que la geometría y la aritmética son de naturaleza distinta por razones muy diversas de las de Gauss y con resultados ulteriores que parecen opuestos a los de Gauss; para Frege la geometría es efectivamente sintética *a priori*, mientras que la aritmética es analítica como la lógica, la cual es para Kant el modelo de todo razonamiento analítico. Hoy día no parece que pueda negarse que la geometría y la aritmética se encuentran en la misma situación por lo que se refiere a la naturaleza de los juicios que las constituyen, como ya habían expuesto los griegos y había explicado mejor Kant.

La relatividad del concepto de geometría, como consecuencia del trabajo de Riemann, ha llegado hasta tal punto que H. Poincaré pudo mantener que carece de sentido preguntar cuál geometría es la verdadera. Para confirmar esta afirmación ha tomado el espacio *euclídeo* interior a una esfera y lo ha estructurado con unas leyes físicas ideales, en virtud de las cuales un hipotético habitante de dicho espacio se vería forzado a creer que vive en un espacio regido por una geometría también elemental, pero *hiperbólica*.

9. Diferencia entre los Elementos y los Fundamentos

Llama la atención el contraste entre la simplicidad de los fundamentos de la geometría tal como vienen dados por Hilbert en sus axiomas, y la compleja problemática que suscitan las definiciones, postulados y axiomas de los *Elementos* de Euclides. Es obvio que hay un progreso extraordinario desde los *Elementos* a los *Fundamentos de la Geometría* por varias razones y en particular porque se han evitado las definiciones explícitas como explicaremos al tratar del Formalismo. Pero queremos llamar la atención sobre una diferencia fundamental entre la pretensión de Euclides y la de Hilbert.

En los *Fundamentos de Geometría* de Hilbert se incluye el postulado de continuidad tal como fue originalmente formulado

por Cantor y había sido antes perfectamente establecido por Dedekind. Ello significa que la pretensión de Hilbert se reduce a fundamentar la geometría elemental relativamente a la fundamentación del número real; la cual a su vez requiere ser fundamentada, y la obra de Dedekind consiste precisamente en esto, en la teoría del número natural. En la próxima y última sección de esta primera parte nos ocuparemos de esta aritmetización del análisis que aconteció durante el siglo XIX.

Muy diverso es el contenido de la obra de Euclides. Los *Elementos* son, en efecto, no sólo una geometría, sino también una aritmética e incluso un análisis matemático en cuanto introducen y aplican el método de exhaución; lo cual implica naturalmente una extraordinariamente mayor complejidad en la obra de Euclides que en la de Hilbert.

10. La geometría y el mundo físico

La demostración de la independencia del quinto postulado de Euclides contribuye poderosamente a la afirmación de una distinción entre el espacio físico y el espacio geométrico de los matemáticos. Sin duda hay ya en los griegos y muy particularmente en Platón una clara distinción entre la geometría y el conocimiento empírico de la realidad; y asimismo Kant reflexionando sobre el increíble renacimiento científico establece una diferencia radical entre la geometría de los juicios sintéticos *a priori* y el conocimiento empírico de la realidad mundana construido necesariamente *a posteriori*. Pero para todos ellos, como para Saccheri y al parecer incluso para Gauss en 1830 (véase el texto citado y cf. Taurinus en [1] y [6]), existe una correspondencia necesaria y biunívoca entre los teoremas de la geometría y las aplicaciones de éstos a la realidad del espacio en que vivimos. La creación de las geometrías elementales no euclídeas y sobre todo el famoso discurso (1854) de Riemann fuerzan definitivamente la independencia de la geometría de todo fundamento en el espacio de la física.

No es probable que nadie como Gauss haya vivido tan intensamente la independización de la geometría como parte de la matemática de la geometría como parte de las ciencias físicas. En su juventud intenta dar demostraciones del quinto postulado; demuestra por ejemplo que si existen triángulos de área tan grande como se quiera, entonces la geometría del ángulo agudo es imposible. Pero poco a poco se va afianzando en el convencimiento de que la geometría del ángulo agudo, con una constante k (que corresponde a la inversa de la curvatura) suficientemente grande, puede que sea la verdadera, es decir, la que corresponde a la realidad física. Apela incluso a la experimentación (medida de los ángulos de un triángulo, cuyos lados eran del orden de decenas de kilómetros) para salir de dudas, aunque sin éxito. Ya Saccheri un siglo antes había apelado a la experimentación de una manera análoga a la llevada a cabo por Gauss. En 1816 ha desarrollado ya una «antigeometría», pero no puede estar seguro de si es lógicamente coherente. Pero es claro que alrededor de 1820 Gauss se convence plenamente de que su geometría no euclídea carece de contradicción, y por consiguiente puede competir con la geometría de Euclides a ver cuál de las dos es la geometría verdadera. La gestación de ese convencimiento en Gauss es tanto más notable, cuanto que vive en un ambiente en el que por razones filosóficas se considera por todos absolutamente cierto que la geometría euclídea no sólo es la única verdadera, sino que cualquier otra no es ni siquiera concebible.

Después de Riemann la realidad existente será en principio totalmente incompetente para guiar la investigación geométrica. Los matemáticos del siglo XIX y aun del XX, como veremos en el próximo capítulo, se esforzarán por liberarse de la intuición que les conduce a tomar como matemático lo que es meramente físico. Buenos ejemplos de ello veremos en Dedekind, Frege y Peano. Los matemáticos se vuelven extraordinariamente cautos para evitar cometer paralogismos, como el cometido por Euclides en sus proposiciones I, 12 y I, 16, y que hemos descrito en la sección anterior.

11. El problema de la consistencia

La consecuencia más importante del nacimiento de las geometrías no euclídeas, en el orden de fundamentos, es sin duda la aparición del problema de la consistencia de la geometría y de la matemática toda.

Hasta entonces no había habido lugar ni de formular siquiera la posibilidad de contradicciones internas en la geometría euclídea. La coherencia de la geometría estaba asegurada por el espacio físico al que correspondía, y cuyo fundamento se encontraba en el mundo tal como existe, en el cual se daba y se da aún por

supuesto que no pueden existir contradicciones. Sólo después de Riemann cabe plantearse la posible falta de coherencia de los sistemas de verdades contenidos en la geometría.

Gauss y Riemann estaban convencidos de que las nuevas geometrías eran tan coherentes como la euclídea; aunque no fue hasta 1868 que E. Beltrami estableció rigurosamente este resultado valiéndose de los modelos de la esfera y de la seudoesfera. Alrededor de 1900 Hilbert reduce la coherencia lógica de la geometría euclídea a la de la aritmética. Surge el formalismo y la teoría de los sistemas formales con una clara dependencia de la manera como se ha llevado a cabo la fundamentación de las geometrías.

Ahora bien, el hecho de que la geometría se independice de la física traerá como consecuencia la independización de toda la matemática. Durante el período griego, el Medioevo, Kant y hasta Gauss inclusive la verdad de la matemática descansa en la verdad del mundo real. El descubrimiento de las geometrías no euclídeas llevará a tener que buscar la coherencia o consistencia interna de las matemáticas en unos nuevos fundamentos más profundos y abstractos.

El problema de la consistencia se hace pavoroso y la duda casi angustiosa con la aparición de las paradojas, de las que nos ocuparemos más adelante, al comienzo de la segunda parte. El estudio crítico de los fundamentos de la matemática, que se desarrolla con un esclarecimiento de las relaciones entre la lógica y la matemática, en el estudio de los sistemas formales y sus propiedades, en la dilucidación del papel que juega la intuición matemática y en otras muchas cuestiones de que nos ocuparemos en la segunda parte, tiene una raíz y un origen en la creación de las geometrías durante el período Saccheri-Riemann.

Bibliografía

1 BECKER, O., *Die Grundlagen der Mathematik.* Friburgo/Munich. Verlag Karl Albert, 1964.

2 BLASCHKE, W., *Einführung in die Differentialgeometrie.* Berlín. Springer-Verlag, 1950.

3 BLUMENTHAL, L. M., *A Modern View of Geometry,* San Francisco. W. H. Freeman and Co., 1961.

4 BONOLA, R., *La geometria non euclidea. Esposizione storicocritica del suo sviluppo.* Bolonia, 1906.

5 EVES y NEWSOM: cfr. [3], Bibliografía, parte primera, capítulo 1.

6 FANO, G., *Geometria non Euclidea.* Bolonia. Nicola Zanichelli, 1935.

7 HEATH, T. L., cfr. [4], Bibl., p. 1.ª, cap. 1.
8 HILBERT, D., *Fundamentos de la Geometría*. Madrid. Publicaciones de Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas, 1953.
9 HILBERT, D., y COHN-VOSSEN, S., *Anschauliche Geometrie*. Nueva York. Dover Publications, 1944.
10 LOBACHEVSKI, N., *Geometrical researches on the theory of parallels*. Nueva York. Dover Publications, Inc., 1951.
11 RIEMANN, B., Discurso sobre la hipótesis en que se basa la geometría. Publicado en español por Vidal Abascal, C. S. I. C.
12 SACCHERI, G., *L'Euclide emendato*. Milán. Ulrico Hoepli, 1904.
13 DOU, A., «Los paralogismos de Euclides y Saccheri en la teoría de paralelas», *Revista de la Real Academia de Ciencias*, Madrid, 61 (1967), 155-174.
14 — «Logical and historical remarks on Saccheri's geometry», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 11 (1970), 385-415.

3

Aritmetización del análisis

1. Introducción

Empleando una terminología escolástica, fundada en Aristóteles, podemos decir que los griegos desarrollaron la geometría o ciencia de la cantidad continua y la aritmética o ciencia de la cantidad discreta.

Esta última, gracias al genio matemático de los árabes y luego por obra de Tartaglia (1500-1557), Cardano (1501-1576) y otros italianos renacentistas y, finalmente, por obra de Vieta (1540-1603) con otros muchos, da origen al álgebra.

Frente a ella, Newton (1641-1727) y Leibniz (1646-1716), coronando la obra de sus precursores, Cavalieri (1598-1647), Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665), Wallis (1616-1703) y otros crean el cálculo infinitesimal, origen del moderno análisis matemático. Este surge potente y se desarrolla con exuberancia, pero no es hasta el siglo XIX cuando los matemáticos reflexionan sobre sus fundamentos y lo reconstruyen con todo rigor. Esta reflexión crítica caracteriza muy bien la historia matemática del siglo XIX, y su fruto ha sido resumido con el título de este capítulo.

La aritmetización del análisis la expresó Kronecker (1823-1891) en frase feliz: «Dios creó los números naturales, todo lo demás es obra de los hombres», aunque Kronecker negó validez a buena parte del análisis.

En realidad, como veremos, los fundamentos del análisis no se han reducido meramente a los de la aritmética, sino además a los mucho más problemáticos de la teoría de conjuntos.

2. La vuelta al rigor

Los trabajos de los creadores del análisis infinitesimal y de sus primeros cultivadores está basado en gran parte en profundas intuiciones que conducen eficazmente a la resolución de importantes y sorprendentemente nuevos problemas. El proceso deductivo que debería constituir la demostración matemática de estos resultados al estilo de Euclides, se echa de menos; más bien su existencia es intuida y adivinada. El obispo empirista Berkeley (1685-1753) critica duramente en su libro *The Analyst* (1734) el cálculo de fluxiones creado por Newton, hasta tal punto que después de un atento análisis del método de obtención y empleo de las sucesivas fluxiones, declara: «Todo esto parece ser una argumentación llena de contradicciones, de modo que en teología no sería permitida». La crítica de Berkeley es aguda y no carece de fundamento, pues hay que reconocer que la consideración de incrementos como cantidades infinitamente pequeñas a la par que constantes, deja mucho que desear desde el punto de vista estrictamente lógico; pero la certera y profunda intuición de los creadores del cálculo infinitesimal suplía la falta de rigor. Algo parecido podría decirse del empleo de series sin preocuparse de su convergencia, lo que naturalmente llevó a paradojas.

La vuelta al rigor en una matemática mucho más desarrollada que la griega, fue tarea compleja. Fue llevada a cabo por numerosos matemáticos simultáneamente, entre los cuales se destacan por su universalidad y profundidad A. L. Cauchy (1789-1857) y C. Weirstrass (1815-1897). He aquí cómo se expresa Cauchy en dos textos entresacados de su introducción al *Analyse Algébrique* (1821) [3]:

> En cuanto a los métodos he procurado darles todo el rigor que se exige en geometría, de modo que no se recurra jamás a razones tomadas de la generalidad del Algebra *(tirées de la généralité de l'Algèbre)*. Las razones de esta especie, aunque se admitan con bastante frecuencia, sobre todo en el paso de series convergentes a series divergentes, y de cantidades reales a expresiones imaginarias, no pueden ser consideradas, me parece, más que como inducciones apropiadas para poder prever algunas veces la verdad, pero que se acomodan poco a la tan alardeada exactitud de las ciencias matemáticas [...]. Es verdad que para permanecer siempre fiel a estos principios me he visto forzado a admitir proposiciones que de pronto quizá parezcan algo fuertes. Por ejemplo, enuncio en el capítulo VI, que *una serie divergente no tiene suma;* en el capítulo VII, que *una ecuación imaginaria es solamente la representación simbólica de dos ecuaciones entre cantidades reales* [...].

La noción de función continua y su estudio sistemático es en gran parte obra de Cauchy. Parece que fue el primero en «epsilonizar», es decir, en emplear la idea contenida en la frase: «para todo ε, $\varepsilon > 0$, existe un δ, tal que para todo x, $|x - a| < \delta$ se tiene $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$», en la definición de función continua, precisamente en el libro mencionado, siglo y medio después de la creación del cálculo infinitesimal. Cauchy es también el creador de las funciones de variable compleja, da numerosos criterios de convergencia para series y demuestra rigurosamente numerosos teoremas de existencia y unicidad para las soluciones de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales, tanto totales como en derivadas parciales.

Desde el punto de vista de los fundamentos ofrecen particular interés la creación de la recta real, que trataremos en la sección 4, y la evolución del concepto de función, que discutimos brevemente a continuación y con lo que terminaremos esta visión general del movimiento crítico del siglo XIX.

3. El concepto de función

Es obvio que la noción de función, hoy día estrictamente formal, está relacionada con la noción de curva. Los griegos construyen ya varias curvas planas y dividen los problemas geométricos en planos, para los que bastan la recta y la circunferencia, constituyendo así la parte más apreciada de la geometría; sólidos, para los que se requiere el uso de las cónicas; y curvilíneos, para los que se necesitan otras curvas más complicadas, cuyo trazado no puede ser exacto. Descartes (1596-1650) en el comienzo del libro segundo de su *Geometría* introduce las curvas algebraicas, justificando como deben ser admitidas en la geometría con el mismo derecho que las cónicas, y las distingue de las «mecánicas», que no pueden ser tratadas con rigor, porque no se conoce un procedimiento exacto de generación ni siquiera en teoría; asimismo, Descartes, y anteriormente Fermat, al referir las curvas a ejes coordenados crean los fundamentos de la geometría analítica estableciendo un puente entre la geometría y el álgebra.

La palabra función, y su concepto como correspondencia entre una variable dependiente y otra independiente, se elaboran a fines del siglo XVII y principios del XVIII, especialmente por obra de Juan Bernoulli (1667-1748) y de L. Euler (1707-1783), quien da la siguiente definición en *Introductio in Analysin infinitorum* (1748):

Una función de una cantidad variable es una expresión analítica co puesta arbitrariamente de aquella cantidad variable y números o cantidad constantes [8].

Esta definición es un tanto vaga, pues el modo «analítico» d obtención del valor de la función no está suficientemente pre sado. Mérito grande de Euler es el incluir expresamente las fu ciones implícitas además de las explícitas, así como la divisió entre uniformes y pluriformes. Respecto del modo de formació de la «expresión analítica» distingue perfectamente entre funcione algebraicas y no algebraicas que llama trascendentes, pero la c racterización de estas últimas es insuficiente.

Para determinar mejor lo que se podía entender por «expre sión analítica compuesta arbitrariamente» se apela entonces a l definición de curvas mediante una o varias propiedades. Se com prende la confusión que de ahí resulta si se considera la expresión analítica siguiente:

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{x^{2(n+1)} + \log(x^2) + 1}{x^{2n} + 1},$$

que equivale claramente a la definición siguiente:

$$\begin{aligned} f(x) &= \log(x^2) + 1, \quad \text{para} \quad |x| \leqslant 1 \\ f(x) &= x^2 \qquad\qquad\quad \text{para} \quad |x| \geqslant 1, \end{aligned}$$

que es trascendente en un trozo y algebraica en otro.

Es obvio que la noción de prolongación está implicada en l de definición de una función, cuando ésta se define por una d sus propiedades. La cuestión así planteada queda resuelta po Riemann para el caso de funciones regulares de variable compleja mediante la introducción del concepto de prolongación analítica a partir de un elemento de función y la introducción de las hoy lla madas superficies de Riemann.

Mucho más difícil resulta generalizar la noción de función para el caso de una variable real. La necesidad de tal generaliza ción surge al estudiar J. D'Alambert (1717-1783) el problema d las cuerdas vibrantes, cuyo movimiento se rige por la ecuación

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Existe una solución única de esta ecuación, cuando se han fijado previamente dos «curvas» iniciales «arbitrarias» (que corres

ponden a la situación inicial de la cuerda y a la velocidad de cada uno de sus puntos), que pueden ser dibujadas gráficamente sin que al parecer tengan que sujetarse a condición «analítica» alguna. J.-B. J. Fourier (1758-1830) llega a la conclusión de que «cualquier función» de una variable puede ser representada mediante una serie trigonométrica y G. Lejeune Dirichlet (1805-1859) precisa con todo rigor las condiciones, que ahora llevan su nombre, para que una serie de Fourier converja y represente en un intervalo acotado dado una función previa y arbitrariamente fijada. De este modo, Dirichlet llega a formular por primera vez el concepto moderno de una función $y = f(x)$ de una variable independiente en un intervalo $a \leqslant x \leqslant b$: Una cantidad *y* es función (uniforme) de una cantidad variable *x* en un intervalo, cuando a cada valor de *x* en este intervalo se le hace corresponder un único valor de *y*, que se representa por $y = f(x)$, y de manera que no haya que especificar *nada* acerca de la manera como se relacionan los diversos valores de *y*.

Esta definición de Dirichlet da lugar a dos objeciones. La primera es que, por su misma generalidad, es inútil, pues nada podrá decirse que sea válido para un conjunto de funciones tan arbitrariamente definido; pero esta idea no prevalece, y por el contrario, sigue manteniéndose la definición de Dirichlet, sólo que los matemáticos son en adelante conscientes de que para establecer teoremas será necesario considerar solamente grupos o conjuntos de funciones que gocen de ciertas propiedades. Así, por ejemplo, Cauchy se ocupó especialmente del conjunto de funciones que gocen de la importante propiedad de ser continuas.

He aquí cómo H. Hankel describe la situación en 1870:

De este modo ha surgido una sensible laguna en los conceptos fundamentales del análisis, la cual, aunque todos la pasan por alto en silencio, no por eso deja menos de existir. Lo demuestra una mirada incluso a los mejores textos de análisis. Uno define la función esencialmente siguiendo a Euler; el segundo requiere que *y* tiene que variar con *x* de acuerdo con una ley *(gesetzmässig)*, sin que se dé una explicación de este oscuro concepto; el tercero la define como Dirichlet; el cuarto no la define en absoluto. Pero todos derivan de su concepto consecuencias, que no están en él contenidas [1].

La segunda objeción a la definición de Dirichlet es más profunda y toca los fundamentos mismos del método matemático. Para los intuicionistas, como se comprenderá mejor más adelante, esta definición es ilusoria mientras no se dé un procedimiento ideal constructivo que permita obtener ideal pero efectivamente el valor de *y* correspondiente a cualquier valor de x, $a \leqslant x \leqslant b$.

Ahora bien, como los puntos del intervalo no son numerables, procedimiento no puede en general existir. He aquí cómo se presa E. Borel (1871-1956) acerca del conjunto de las funcio discontinuas de una variable real que toman únicamente los lores cero y uno:

> Este conjunto está lógicamente definido; pero me pregunto si tenemos él un concepto determinado. ¿Podemos verdaderamente comprender la discontinua de las funciones de una variable real? De hecho, para po dar una tal función es necesario dar su valor para todos los valores de variable real. Puesto que el conjunto de estos valores no es numerable, imposible dar un procedimiento que permita determinarlos todos, es decir, alcanzar cada uno de ellos en un tiempo limitado. Se comprende qué cla de dificultad se ofrece aquí; es mucho mayor que la dificultad análoga en caso de la definición del número irracional en su forma general [1].

4. El continuo real según Cantor y Weierstrass

Ya a principios del siglo XIX, B. Bolzano (1781-1848) estableció que todo conjunto acotado de puntos de una recta posee necesariamente un extremo superior y un extremo inferior. L. Kronecker (1823-1891) consideraba que la demostración de ese resultado era ilusoria, porque no suministraba medio alguno para la determinación efectiva de los extremos superior e inferior. La objeción de Kronecker parece tanto más justificada cuanto que la demostración de Bolzano tenía que apoyarse necesariamente en la intuición geométrica de la continuidad de los puntos de la recta, pues la noción del continuo o recta real no fue elaborada hasta mucho más tarde. Toda la obra de Cauchy que hemos descrito en el párrafo anterior tiene que adolecer del mismo paralogismo, de estar basada en la intuición de la continuidad o complitud de la recta real sin que ésta haya sido previamente elaborada o postulada.

G. Cantor (1845-1918) en los *Fundamentos de la teoría general de conjuntos* (1883) nos dice que al parecer fue C. Weierstrass (1815-1897) el primero en dar una definición rigurosa del número real en sus lecciones sobre funciones analíticas en la universidad de Berlín. Weierstrass considera series de términos racionales positivos y de suma acotada y establece entre ellas una relación de equivalencia, y las clases de equivalencia que resultan sirven para definir los números reales. «Es esencial poner de relieve que, en la generación del número real, las sumas de términos que hay que efectuar se extienden a sólo un número finito de números

racionales y no se presupone de antemano el número que se ha de definir como si fuera la suma de la serie infinita de partida; se cometería con ello una falta lógica, porque la definición de la suma sólo puede lograrse haciéndola igual al número real que necesariamente tiene que haber sido previamente definido. Creo que esta falta lógica, que el señor Weierstrass ha sido el primero en evitar, en tiempos anteriores fue comúnmente cometida y no fue notada por la razón de que pertenece a aquellos raros casos en los cuales verdaderas faltas no pueden causar ningún daño importante en el cálculo» [1].

Independientemente de esta definición de los números reales hecha por Weierstrass y también independiente de la de Dedekind, que mencionamos a continuación, Cantor dio a su vez una tercera introducción de los números reales, que exteriormente tiene cierto parecido con la de Weierstrass. Cantor compara los tres procedimientos y pone de relieve que en la definición de los números irracionales reales hay que emplear siempre un conjunto bien definido y numerable de infinitos números racionales.

5. El continuo real según Dedekind

R. Dedekind (1831-1916) publicó su definición de los números reales con el título *Continuidad y números irracionales* (1872) [4]. En ella introduce la hoy día familiar noción de cortadura, que permite llevar a cabo la compleción de la recta racional ordenada, obteniendo así la recta real. Esta publicación de Dedekind, aparte de su valor histórico, es de una claridad diáfana y se presta a sacar las conclusiones que interesan desde el punto de vista de los fundamentos. El contenido esencial de este trabajo lo elaboró en 1858.

Entresacamos de la introducción:

> En la consideración de una cantidad variable que se aproxima a su valor límite, y concretamente en la demostración del teorema de que «toda magnitud que continuamente crece permaneciendo acotada, ciertamente tiene que tender hacia un límite», acababa yo por recurrir a la evidencia geométrica. Todavía hoy considero tal apelación a la intuición geométrica en un primer curso de cálculo diferencial de una utilidad didáctica extraordinaria, incluso imprescindible cuando no se quiera perder demasiado tiempo. Pero nadie negará que este modo de introducir el cálculo diferencial no puede pretender ser científico.
>
> Se dice con frecuencia que el cálculo diferencial se ocupa de cantidades continuas, sin embargo, en ninguna parte se da una explicación de esta con-

tinuidad, e incluso las más rigurosas exposiciones del cálculo diferencial basan sus demostraciones no en la continuidad, sino que apelan más o menos conscientemente a representaciones geométricas, o bien se apoyan en teoremas, que nunca son demostrados mediante aritmética pura. A éstos pertenece el teorema antes mencionado... [1].

Luego pasa nuestro autor a comparar el conjunto R de los números racionales con los de una recta y llama la atención sobre la analogía entre ambos conjuntos. Esta analogía la concreta en tres puntos: 1.º Ambos son ordenados. 2.º Entre dos elementos cualesquiera del conjunto hay infinitos. 3.º Un elemento cualquiera del conjunto establece una «clasificación de todos los elementos del mismo conjunto en dos clases, tales que todo elemento de la primera es anterior a todo elemento de la segunda». Tal clasificación, en el caso del conjunto de los números racionales y sin que sea necesariamente debida a un número racional predeterminado, es lo que Dedekind llamará más adelante cortadura en el conjunto de los números racionales, la cual da lugar a la creación del número real. Precisamente el autor se propone en este momento cómo refinar R mediante la creación de nuevos números, de modo que el conjunto de los números adquiera la misma compleción *(Vollständigkeit)*, o como diremos equivalentemente, la misma continuidad *(Stetigkeit)* que la línea recta.

La precedente comparación del conjunto R de los números racionales con una recta nos ha llevado al conocimiento de la porosidad *(Lückenhaftigkeit)*, incompleción y discontinuidad del primero, mientras que a la recta le atribuimos compleción, carencia de huecos y continuidad. ¿Entonces en qué consiste propiamente esta continuidad? [1].

Dedekind encuentra la esencia de la continuidad en el recíproco del aserto contenido en la tercera analogía antes mencionada:

Si se clasifican todos los puntos de la recta en dos clases, de modo que todo punto de la primera esté a la izquierda de todo punto de la segunda, entonces existe un punto y sólo uno que produce esta clasificación en dos clases, esta división de la recta en dos trozos [1].

En adelante los matemáticos harán uso de esa definición de continuidad de la recta para postular el «postulado de continuidad» de la recta real, poniendo así de manifiesto una propiedad que había sido empleada durante más de veinte siglos, pero cuya esencia nunca había sido explicada en los términos más simples del conjunto de los números enteros (o racionales).

La asunción de esta propiedad de la recta no es más que un axioma y sólo por él reconocemos en la recta su continuidad, y nos hacemos conscientes de la misma [1].

Después de esta preparación sigue naturalmente la definición de cortadura y mediante ella establece la igualdad, ordenación, y operaciones aritméticas fundamentales de los números reales. Naturalmente se puede identificar el número real con la cortadura misma, pero Dedekind prefiere hablar de otra manera como indica esta respuesta suya a H. Weber (1888): «Somos linaje divino y poseemos sin duda fuerza creadora, no sólo en cosas materiales (trenes, telégrafos), sino muy especialmente en cosas espirituales. Es ésta la misma cuestión de la que tú dices, que el número irracional no es otra cosa en absoluto que la cortadura misma, mientras que yo prefiero crear algo nuevo (distinto de la cortadura), lo cual corresponde a la cortadura, y de lo cual digo que la cortadura lo produce, engendra» [1]. A continuación da varias razones para justificar esa manera de hablar, la cual parece implica cierta concepción filosófica de la noción de número y de los objetos matemáticos en general.

En otra carta de contestación a Lipschitz, Dedekind pone de manifiesto que la compleción de los números racionales, que ha efectuado, es algo esencialmente nuevo, que no se encuentra en los *Elementos* de Euclides, a pesar de que Euclides incorporó (libro V, definición 4) la doctrina de Eudoxo que permite efectivamente manejar números irracionales y está también perfectamente definido el número π. Los *Elementos* podrían conservarse íntegramente y con pleno sentido en un espacio que tuviera las mismas propiedades que el creado por Dedekind, excepto que fuera continuo.

6. Consecuencias

El resultado de la crítica de la matemática realizada durante el siglo XIX puede resumirse diciendo que los matemáticos lograron la aritmetización del análisis, lo cual puede entenderse en dos sentidos: primero, que liberaron el análisis de toda intuición geométrica. Así lo creemos hoy día, poniendo finalmente término a ese tipo de paralogismos de los que hemos dado ejemplos al tratar de Saccheri, Cantor y Dedekind.

El segundo sentido nos lo da con mayor exactitud un texto de H. Poincaré (1854-1912), en el Congreso Internacional de Matemáticos de París (1900):

El análisis ha quedado actualmente reducido a los números enteros y sistemas finitos o infinitos de enteros, relacionados entre sí por una red d relaciones de igualdad o desigualdad. Las matemáticas, decimos, han sid aritmetizadas [...]. Podemos decir que hoy día se ha logrado un rigor abso luto [12].

Es importante observar que en este segundo sentido no s trata de una reducción del análisis a la teoría de los número exclusivamente, sino, como dice Poincaré, juntamente con un teoría de conjuntos, pues para efectuar la reducción hay qu introducir en su totalidad los números racionales y clases de sub conjuntos infinitos de los números racionales. Como se compren derá mejor en el capítulo siguiente, la fundamentación de la teo ría de conjuntos ofrece extraordinarias dificultades. H. Weyl (1885 1955) lo ha expresado con la frase siguiente: «El análisis est edificado sobre arena» [11], a pesar de la obra de su aritmetiza ción llevada a cabo principalmente en el siglo XIX.

Bibliografía

1 BECKER, O., cfr. [1], Bibl., primera parte, cap. 2.
2 BOURBAKI, N., cfr. [2], Bibl., primera parte, cap. 1.
3 CAUCHY, A.-L., *Cours d'Analyse* (I partie): *Analyse Algébrique.* París, 1821. Obras completas publicadas por la Academie des Sciences. París, 1897.
4 DEDEKIND, R., *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Brunswick. F. Vieweg & Son, 1872.
5 — *Was sind und was sollen die Zahlen?* Brunswick. F. Vieweg & Son, 1888.
6 DESCARTES, R., *Geométrie* (con traducción simultánea al inglés por Smith, D. E. y Latham, M. L.). Nueva York. Dover Publications, Inc., 1954.
7 DOU, A., *¿Puede una máquina conocer y entender?* Madrid, *Razón y Fe*, 171 (1965), 463-474.
8 *Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées.* Tome II. «Fonctions des variables réelles». París. Gauthier-Villars, 1912.
9 EVES y NEWSOM: cfr. [3], Bibl. primera parte, cap. 1.
10 KLEENE, S. C., *Introduction to Metamathematics.* Nueva York. D. Van Nostrand Company, Inc., 1952.
11 KNEEBONE, G. T., cfr. [5], Bibl. primera parte, cap. 1.
12 WANG, H., *A Survey of Mathematical Logic.* Colección «Studies in Logic». Amsterdam. North-Holland Publishing Company, 1963.

segunda parte

Análisis del método matemático

1

El logicismo

1. Introducción

El logicismo es una doctrina sobre los fundamentos de la matemática que considera la lógica como anterior o más fundamental que la matemática y efectúa la reducción de los conceptos y métodos de inferencia matemática a los correspondientes de la lógica, concluyendo consiguientemente que la matemática no es más que una rama de la lógica. Las relaciones que existan entre la matemática y la lógica pueden constituir un aspecto muy importante de una teoría sobre fundamentos. Una primera dificultad para la explicación de estas relaciones es que no sabemos con precisión qué es la matemática y aún menos qué es la lógica. Precisamente nos proponemos explicar qué es la matemática, pero entonces parece que es imprescindible que sepamos previamente qué es lógica, si hemos de explicar aquélla en términos de ésta. Ahora bien, una definición precisa de la lógica, que la caracterice totalmente, depende del sistema filosófico que se adopte. Para nuestro fin bastará que demos las definiciones siguientes:

> La lógica matemática es una ciencia que es anterior a las demás, que contiene las ideas y los principios en que se basan todas las ciencias [3].

Esta definición parcial es de K. Gödel (1906) y me parece que es también según la mente de santo Tomás y análogamente de Aristóteles y de la escolástica medieval. Aunque conviene notar que en Aristóteles y en la escolástica la lógica es generalmente considerada más como un arte que como una ciencia; un arte que da la manera de operar válidamente con conceptos y proposiciones, y no como ciencia, porque carece de objetos propios a los que corresponda algo en la naturaleza.

Una definición muy precisa y moderna es la de A. Church (1903).

> Lógica es el estudio sistemático de la estructura de las proposiciones y de las condiciones generales de válida inferencia por un método que abstraiga del contenido o *materia* de las proposiciones y tenga en cuenta solamente su *forma* lógica. Se distingue entre materia y forma cuando distinguimos entre la legitimidad lógica o validez de un texto razonado y la verdad de las premisas de las cuales se deduce; y en este sentido es familiar en el lenguaje ordinario. Sin embargo, es necesario establecer con precisión la distinción con referencia a un lenguaje particular o sistema de notación, un *lenguaje formalizado*, el cual evite las inexactitudes y las irregularidades de estructura y expresión que sistemáticamente llevan a equivocaciones y que se encuentran en el inglés ordinario (sea de conversación, sea literario) y en otros lenguajes naturales, y el cual siga o reproduzca la forma lógica, a costa de la brevedad y facilidad de comunicación cuando sea necesario. De modo que adoptar un lenguaje formalizado particular es adoptar un sistema o teoría particular de análisis lógico. Entonces se puede caracterizar el método formal diciendo que trata de la forma objetiva de las *sentencias* que expresan proposiciones, y suministra en estos concretos términos criterios para determinar si las sentencias tienen sentido, criterios de inferencia válida, y de otras nociones estrechamente asociadas a éstas [5].

Por consiguiente, según el logicismo la matemática es una rama de la lógica, sin duda extensa y con vida propia, pero cuyo método se identifica con el propio método de la lógica. Se concibe así la matemática como una disciplina universal que regiría todas las formas de argumentación.

Una disciplina así fue probablemente pensada por R. Llull (1231-1315) y por J. Caramuel (1606-1682) y ciertamente por R. Descartes (1596-1650). El primero en formularla con cierta precisión parece fue G. Leibniz (1646-1716), quien una vez la definió con estos términos:

> Si no hubiese estado reclamado por tantos asuntos, o si hubiese sido más joven o tenido colaboradores jóvenes en situación de ayudarme, hubiera confiado dar una especie de álgebra generalizada *(spécieuse générale)*, en la cual todas las verdades de razón se habrían reducido a un cálculo. Este sería simultáneamente una especie de lenguaje o escritura universal, pero infinitamente distinto de todos los propuestos hasta ahora; pues los signos y las palabras mismas estarían regidas por razón; y errores, con excepción de los de hecho, podrían darse únicamente como equivocaciones de cálculo. Sería muy difícil crear o inventar este cálculo o característica, pero muy fácil aprenderla sin ayuda de diccionario [5].

El primero en desarrollarla con considerable extensión y con todo rigor fue G. Frege (1848-1925), con mayor extensión aún J. Peano (1858-1932) y, finalmente, A. N. Whitehead (1861-1947) y B. Russell (1872-1970), que son considerados los introductores del logicismo.

Una de las tareas fundamentales del logicismo es la reducción de los conceptos matemáticos a conceptos lógicos; a esta reducción la llamaremos logificación. Damos a continuación la reducción del concepto de número a conceptos lógicos, lo que puede considerarse el primer paso importante en la elaboración de la doctrina del logicismo.

Logificación del concepto de número

2. Introducción

Para Kant, tanto la geometría como la aritmética tienen un contenido más rico que el que pueda derivarse de los meros juicios lógicos; éstos son juicios analíticos, o sea, tales que el predicado está contenido en el sujeto, y por tanto son inútiles para enriquecer el contenido de las ciencias. Por el contrario, el juicio «cinco más siete son doce» nos hace conocer algo nuevo, pues doce no está contenido en la mera unión de los dos conceptos cinco y siete, ni la negación de dicho juicio atenta contra el principio de no contradicción; como por otra parte tal juicio no puede fundamentar su necesaria y universal validez en la experiencia, es clasificado como juicio sintético *a priori.* El logicismo afirma lo contrario, a saber, que los números cinco y siete pueden ser definidos mediante conceptos lógicos exclusivamente, y que el juicio «cinco más siete son doce» es una mera deducción lógica, y consecuentemente que dicho juicio, así como todas las proposiciones de la aritmética, son juicios analíticos, o como dirán más adelante los logicistas, meras tautologías. Así, por ejemplo, L. Wittgenstein (1889-1951) en su primera época.

3. Gottlob Frege

El primero en llegar a esta conclusión fue G. Frege (1848-1925) en sus *Fundamentos de la Aritmética* (1884). Frege parte de la noción de concepto y establece la objetividad del concepto de número. «¿Dónde está el número cuatro? Una determinación del lugar del número cuatro carece de sentido.» Pero «no hay en ello contradicción alguna. El número cuatro de hecho es exactamente el mismo para quienquiera que trabaje con él; pero esto no tiene nada que ver con espacialidad. No todo concepto objetivo tiene un lugar» [3]. Ahora bien, según Frege las palabras solamente tienen significado en el contexto de una sentencia; pero la relación de igualdad expresada por una ecuación es la más importante o incluso es decisiva en aritmética. Por tanto, para determinar el concepto matemático de número habrá que determinar cuál es el sentido de la igualdad de dos números.

Para definir la relación de igualdad toma Frege la definición de Leibniz: «Eadem sunt, quorum una potest substitui alteri salva veritate» (Dos cosas son iguales, cuando una puede sustituir la otra permaneciendo salva la verdad). Para criterio de igualdad numérica toma el concepto de equinumerabilidad, o dicho con mayor precisión: El número que corresponde al concepto F es el mismo que corresponde al concepto G si el concepto F es equinumerable con el concepto G; y el concepto F es equinumerable con el concepto G si existe la posibilidad de hacer corresponder biunívocamente los objetos a los que se aplica el concepto F con aquellos a los que se aplica el concepto G.

Es obvio que la relación de equinumerabilidad es una relación de equivalencia. Consecuentemente Frege define: «El número que corresponde al concepto F es la extensión del concepto "equinumerable con el concepto F"». Veinte años más tarde, B. Russell dará una definición análoga referida a clases. «El número que corresponde a una clase, es la clase de todas las clases que son similares (equinumerables) entre sí» [8].

He aquí cómo se expresa Frege como consecuencia de su análisis del concepto de número:

> En esta monografía espero haber hecho probable que las leyes aritméticas son juicios analíticos y por tanto *a priori*. Según ello, la aritmética no sería más que una lógica más desarrollada, todo teorema aritmético sería una ley lógica, aunque derivada. Las aplicaciones de la aritmética a la explicación de los fenómenos naturales sería un tratamiento lógico de los hechos observados; computación sería inferencia. Las leyes numéricas no necesitan, como pretende Baumann, una confirmación práctica para que sean aplicables al mundo externo; puesto que en el mundo externo, la totalidad del espacio y su contenido, no hay conceptos, ni propiedades de conceptos, ni números. Por tanto, las leyes numéricas no son en realidad aplicables al mundo externo: no son leyes de la naturaleza. Son, sin embargo, aplicables a los juicios, los cuales son en verdad de cosas de la naturaleza: son leyes de las leyes de la naturaleza. Afirman conexiones no entre fenómenos naturales, sino más bien entre juicios; y es a estos últimos que las leyes de la naturaleza pertenecen [3].

Estas afirmaciones contradicen las de Kant acerca de la naturaleza de la aritmética. Para Frege, Kant tiene un concepto demasiado restringido de juicio analítico; las definiciones verdaderamente útiles de la matemática, por ejemplo, de continuidad de una función, no consisten meramente en un conjunto de notas o características subordinadas, sino que entre los elementos de la definición hay una conexión más íntima y orgánica. La diferencia (entre la definición o noción de «concepto» de Kant y la de Frege) puede ilustrarse mediante la siguiente analogía geométrica del mismo Frege: «Si los conceptos (o sus extensiones) se representan por regiones de un plano, entonces el concepto definido mediante características subordinadas corresponde a la región que es cubierta simultáneamente por todas las regiones individuales correspondientes a estas características; está limitada por partes de sus contornos. Hablando gráficamente, en tal definición limitamos una región empleando de una manera nueva las líneas ya previamente dadas. Pero haciendo esto no sale nada esencialmente nuevo. Las definiciones más útiles son las que requieren líneas de contorno que no habían sido previamente dadas. Lo que de ellas puede deducirse no puede preverse; no se saca simplemente del cajón lo que antes se había puesto en él. Estas inferencias extienden nuestro conocimiento y por tanto, siguiendo a Kant, deberían considerarse sintéticas. Sin embargo, pueden ser demostradas de manera puramente lógica, y por consiguiente son analíticas».

Como nota curiosa añadamos que Frege, que no analiza tan profundamente los fundamentos de la geometría como ha analizado los de la aritmética, no tiene reparo en conceder a Kant el gran mérito de haber descubierto los juicios sintéticos *a priori*, los cuales ocurren en la geometría y descubren la verdadera esencia de ésta, aunque Kant errase respecto de la aritmética.

Sin entrar en detalles, pues de ello trataremos más adelante, mencionemos que Frege con su *Begriffschrift* (1879) es también el primero que llevó a cabo el trabajo preconizado por Leibniz de construir un cálculo lógico que fuera efectivamente suficiente para formalizar substancialmente las inferencias matemáticas. Este lenguaje conceptual formalizado lo aplica el mismo Frege en la deducción de los resultados de sus *Grundlagen der Arithme-*

tik que parcialmente acabamos de reseñar. El método de Frege es extraordinariamente riguroso y consiguientemente lento.

4. José Peano

J. Peano (1858-1932), aunque ajeno a las preocupaciones filosóficas de Frege, contribuye en forma análoga a la Fundamentación de la matemática. En primer lugar, al estilo de la temática del siglo XIX, contribuye a establecer rigurosamente el análisis, por ejemplo, mediante la curva que lleva su nombre y cuya gráfica llena un cuadrado. Más importante, desde nuestro punto de vista, es su obra *Formulario de Matemáticas* (1894-1903) en la que parte de entidades primitivas y propiedades iniciales o axiomas y luego deriva los teoremas matemáticos ateniéndose estrictamente a dos reglas: por un lado emplea exclusivamente símbolos para representar el contenido de sus teoremas y por otro formaliza todas las inferencias lógicas, diez años más tarde que Frege, aunque independientemente, de modo que el primer capítulo de su *Formulario* es el segundo tratado de *Lógica formal* en el sentido moderno, y mucho más ágil y extenso que el *Begriffsschrift* de Frege. El trabajo de Peano es fundamental para la obra de Russell que describiremos más adelante.

Por otra parte, Peano es ajeno a la fundamentación logicista de la matemática. La introducción en el *Formulario* de los números naturales mediante tres conceptos primitivos y los cinco axiomas que llevan su nombre, que antes ya habían sido dados a conocer por Dedekind, constituyen una fundamentación de tipo axiomático. En ella se supone un conocimiento previo intuitivo de la sucesión de los números naturales y se caracteriza el estudio de sus propiedades o modo de tratarlos matemáticamente mediante el postulado de la inducción matemática. Por el contrario en el logicismo se logifica primero el concepto de número y se presupone como existente, en algún modo, el conjunto de todas sus propiedades y se particulariza el conjunto de cardinales finitos, o sea, de los números naturales como aquellos que satisfacen el principio de inducción matemática.

Las paradojas

5. Introducción

Después del descubrimiento de las geometrías no euclídeas, ningún otro hecho ha influido tan poderosamente en el desarrollo de los fundamentos de la matemática como la aparición de las paradojas. Quizá se haya sobreestimado su importancia, o quizás el desarrollo extraordinario de los fundamentos inmediatamente después del hecho de las paradojas sea casual; con todo, parece natural que las paradojas estimularan los esfuerzos de los matemáticos para que las explicaran y superaran, y además era un punto delicado con el que en adelante tenían que enfrentarse todas las teorías de fundamentación de la matemática. Damos a continuación unas cuantas como muestra; primero las lógicas y luego las semánticas; finalmente explicaremos en qué consiste la diferencia entre ambas clases y haremos algunas consideraciones.

6. Paradojas lógicas

Entre las primeras históricamente (1899) figura la paradoja de J. Cantor (1845-1918), el creador de la teoría de conjuntos. Supongamos que sabemos lo que es un conjunto M y su número cardinal $\overline{\overline{M}}$, como en el sentido de Frege antes definido, y donde las dos rayas de $\overline{\overline{M}}$ significan según Cantor dos abstracciones; a saber, que abstraemos de la naturaleza de los elementos que forman el conjunto y del orden de éstos. Dos conjuntos M y N tienen el mismo número cardinal, $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$, sólo y cuando exista una correspondencia biyectiva, entre (los elementos de) los conjuntos M y N, es decir cuando M y N sean equinumerables: $M \simeq N$. Definimos $M \leqslant N$ si existe un subconjunto N_1 de N tal que $M \simeq N_1 \subset N$; y definimos $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{N}}$ si además de $\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{N}}$ es también $\overline{\overline{M}} \neq \overline{\overline{N}}$. Mediante el proceso de diagonalización que ahora lleva el nombre de Cantor, aunque fue empleado antes por P. du Bois-Reymond (1831-1889), demostró Cantor que $\overline{\overline{M}} < \overline{\overline{S(M)}}$, donde S(M) es el conjunto de los subconjuntos de M. Ahora bien, sea U el conjunto universal, o sea el conjunto de todos los conjuntos; por ser S(U) un subconjunto de U se tiene $\overline{\overline{S(U)}} \leqslant \overline{\overline{U}}$, pero por el teorema de Cantor que acabamos de mencionar se tiene también

$\overline{\overline{U}} < \overline{\overline{S(U)}}$. Pero, además, Bernstein demostró que si $\overline{\overline{M}} \leqslant \overline{\overline{N}}$ y $\overline{\overline{U}} \leqslant \overline{\overline{M}}$ ha de ser $\overline{\overline{M}} = \overline{\overline{N}}$; por tanto, se deduce que ha de ser $\overline{\overline{U}} = \overline{\overline{S(U)}}$ en contradicción con el teorema de Cantor que implica que $\overline{\overline{U}} < \overline{\overline{S(U)}}$.

Probablemente la más famosa de todas las paradojas es la de Bertrand Russell (1872-1970), publicada en 1902, que ha dado lugar a numerosas variantes. Para comprenderla mejor téngase en cuenta que hay clases o conjuntos que pueden pertenecerse a sí mismos como el conjunto de todos los conjuntos es un elemento de sí mismo; de una manera análoga, si se coloca en un armario un catálogo con tapas azules de todos los libros del armario que tengan tapas azules, el catálogo se catalogará a sí mismo. Sea W el conjunto de todos los conjuntos C que no se pertenecen a sí mismos, o sea, $C \in W$ sólo y cuando $C \notin C$. Pero entonces $W \notin W$ implica que $W \in W$, y por otra parte también recíprocamente si $W \in W$ ha de ser $W \notin W$; por tanto en todo caso se ha de tener simultáneamente $W \in W$ y $W \notin W$.

La paradoja más sencilla se refiere a la propiedad de ser «impredicable», la cual puede ser fácilmente formulable lógicamente si no se toman precauciones para evitarlo. Se dice que una propiedad es «impredicable» si no es propiedad de sí misma. Por ejemplo las propiedades «concreto» y «abstracto» son abstractas y por tanto la primera es impredicable y la segunda no lo es. Ahora bien, considérese la propiedad de ser impredicable: si es impredicable, entonces no puede ser propiedad de sí misma y por tanto es «no impredicable»; pero si es «no impredicable» entonces no es propiedad de sí misma y por tanto es impredicable. Es fácil ver que esta paradoja es una distinta formulación de la de Russell.

Esta no es una paradoja semántica

7. Paradojas semánticas

La paradoja de Richard (1905) se refiere a la imposibilidad de una enumeración de las funciones de la teoría de números, a pesar de la aparente posibilidad de llevarla a cabo. Se consideran las funciones f tales que a todo número natural n, n = 0, 1, 2, ... hacen corresponder un número natural f(n). Supongamos que para escribir correctamente en castellano sean necesarios y suficientes treinta y cinco signos (letras, acento, signo para espacio vacío, signos de puntuación). Entonces, una expresión de m signos es una combinación con posibles repeticiones de los 35 signos. Es

claro que todas estas expresiones (con un número finito de signos) se pueden ordenar, empezando primero con las formadas por un solo signo, luego las de dos signos, luego las de tres, etc. ... y ordenando las de m signos lexicográficamente como en un diccionario. Una vez ordenadas todas las expresiones en correcto castellano, hacemos una lista, o sea, numeramos (siguiendo el mismo orden) con E_1 E_2, E_3, ... todas aquellas que definan una función de la teoría de números y suprimimos todas las demás expresiones. Llamemos $f_k(n)$ la función definida por la expresión E_k. Es fácil demostrar que la sucesión $E_1, E_2, E_3, \ldots$ es infinita, y por tanto también lo es $f_1, f_2, f_3, \ldots$ Considérese ahora la siguiente expresión de Richard: «la función que para todo número natural toma, aumentado en una unidad, el valor, que para este mismo número natural toma la función que ocupa en la lista el lugar indicado por este mismo número natural»; es claro que esta expresión es equivalente a la expresión matemática «la función que para todo número natural n toma el valor $f_n(n) + 1$». Ahora bien, la expresión de Richard define una función y, por tanto, ocupa un lugar en la lista. Sea la expresión E_p y sea $f_p(n)$ la función correspondiente. Entonces, en virtud misma de la definición, resulta que para todo n, $f_p(n) = f_n(n) + 1$, lo cual es imposible, pues para $n = p$ tendría que ser $f_p(p) = f_p(p) + 1$. Obsérvese que el argumento empleado para llegar a la paradoja de Richard es análogo al proceso de diagonalización de Cantor.

La paradoja de Berry (1906) surge al considerar las cualidades sintáctica y semántica de la siguiente expresión: «el menor número natural que no puede ser nombrado con menos de treinta sílabas». Resulta que la expresión de Berry nombra en menos de treinta sílabas un número natural que no puede ser nombrado en menos de treinta sílabas.

La paradoja de Grelling (1908) surge al considerar el adjetivo «heterológico». Un adjetivo se llama heterológico si la propiedad que expresa no se aplica a sí mismo. Por ejemplo «polisilábico», «escrito-en-castellano» no son adjetivos heterológicos. Ahora bien, considérese el adjetivo heterológico. Si es heterológico, quiere decir que la propiedad que expresa no se aplica a sí mismo y, por lo tanto, que no es heterológico; pero si no es heterológico, entonces la propiedad que expresa se aplica a sí mismo y por tanto es heterológico.

8. Observaciones

Las paradojas lógicas pueden ser formalizadas en sistemas formales lógicos (naturalmente inconsistentes), sin que en éstos tengan que figurar términos primitivos ajenos a la teoría de conjuntos. Mientras que las paradojas semánticas para poder ser formalizadas requieren la introducción de algún término como «definir» (en sentido descriptivo), «nombrar», «adjetivo», «significar», «verdad», etc. ... que son ajenos a la teoría de números y a la teoría de conjuntos. Es obvio que para la fundamentación de las matemáticas las paradojas semánticas o epistemológicas no son peligrosas y de hecho no pueden ni siquiera ser formuladas en el lenguaje de la lógica simbólica, como ha mostrado F. P. Ramsey (1903-1930) en 1926.

Ninguna de las paradojas mencionadas tiene una solución trivial. Veremos cómo las teorías del logicismo, formalismo e intuicionismo evitan caer en las paradojas. Pero el problema de una solución enteramente satisfactoria de aquéllas sigue abierto; a menos que se considere como solución el convencimiento de que es imposible evitar absolutamente su aparición, supuesto que no quiera renunciarse a ninguna teoría matemática de las que actualmente figuran en los textos y han sido establecidas con todo rigor por numerosos y excelentes matemáticos. Ello tiende a quitar importancia a las paradojas y tenerlas en cuenta no para diagnosticarlas totalmente, sino sólo para evitar en las demostraciones matemáticas aquellos pasos locales o procesos globales que figuran en la deducción de las paradojas.

El logicismo

9. El principio de círculo vicioso

Un somero examen de las paradojas nos sugiere inmediatamente que no se ha de poder permitir utilizar, por lo menos en matemáticas y lógica, conjuntos tan grandes y con elementos tan arbitrarios como los conjuntos U y W de las dos primeras paradojas mencionadas, a saber la de Cantor y la de Russell. Pero las definiciones de U y W satisfacen las precisas condiciones para la definición de conjuntos, que estableció Cantor en su escrito *Sobre los conjuntos infinitos de puntos de una recta* (1879); además de que la paradoja de Cantor surge incluso cuando los elementos admisibles de un conjunto se restringen a los números naturales, como demostró Gentzen en 1936. Sin duda algo va mal con los conjuntos U y W, pero sin duda también el análisis del concepto de conjunto, de sus estrictas y justas limitaciones para su empleo en lógica y matemáticas parece ser un problema más difícil que el de evitar las paradojas.

Poincaré y Russell vieron que en todas las paradojas hay una especie de círculo vicioso en cuanto que, en todas ellas, hay una definición que contiene lo definido. De una manera más precisa se llama definición impredicativa o proceso impredicativo a aquellos en los que sucede lo siguiente: Se tiene un conjunto y se trata de definir particularmente un elemento de este conjunto (o se definen simultáneamente el conjunto y un elemento particular suyo) de tal manera que la definición del elemento depende del conjunto de que forma parte. No es difícil poner de manifiesto un proceso impredicativo en cada una de las paradojas que hemos expuesto.

Uno de los requisitos de toda teoría de los fundamentos ha de ser evitar que puedan surgir paradojas y puesto que todas las conocidas contienen definiciones impredicativas, Russell decidió que en su sistema de reducción de las matemáticas a la lógica tales definiciones fueran imposibles. Para ello formuló y guardó el siguiente principio de exclusión de círculo vicioso: «Ninguna totalidad puede contener miembros definibles solamente en términos de esta totalidad, o miembros que impliquen o presupongan esta totalidad». ([8]; discutido por Gödel en [3]).

El principio de círculo vicioso es sin duda, así se cree generalmente, suficiente para evitar que surjan paradojas, pero no parece que haya de ser necesario requerir tanto. La primera de las tres disyuntivas (la que emplea la palabra «definibles») parece una restricción demasiado fuerte, pues si se ha construido un conjunto M, de cuyos elementos se conoce su existencia, no se ve por qué no se ha de poder determinar un elemento de M mediante una relación que lo determine unívocamente, aunque para ello sea necesario referirse a la totalidad M. Además, el exigir rigurosamente este principio excluiría partes muy importantes de las matemáticas, como por ejemplo la definición de número real mediante el procedimiento de las cortaduras de Dedekind.

10. La reducción de los términos matemáticos a términos lógicos

El logicismo afirma que la matemática es una rama de la lógica porque toda ella puede derivarse de la lógica. Los tres volúmenes de *Principia Mathematica* (primera ed. 1910-1913, segunda ed. 1925-1927) de A. N. Whitehead y B. Russell empiezan como si fueran un tratado de lógica y avanzan mediante operaciones lógicas y definiciones explícitas hasta dar todos los elementos fundamentales de la matemática. Los autores pretenden que es imposible señalar una línea de separación entre la lógica y la matemática, sin que sea obvio que tal línea es totalmente arbitraria. Ello requiere dos reducciones: la primera es la definición explícita de los términos o conceptos matemáticos mediante términos lógicos y de ella nos ocuparemos ahora; la segunda reducción, que veremos en el próximo apartado, es reducir los teoremas matemáticos mediante deducciones lógicas a teoremas de la lógica.

Las entidades primitivas en las que termina la reducción lógica son en primer lugar las del cálculo proposicional, es decir, los cuatro conectivos lógicos de copulación, disyunción, negación e implicación y variables proposicionales; luego los cuantificadores y las variables del cálculo funcional, es decir, propiedades y relaciones con sus argumentos y finalmente la relación de igualdad.

Entre los muchos grandes méritos de los *Principia* merecen mencionarse la introducción y manipulación de toda una extensa teoría de relaciones. De la teoría de los tipos de que hablaremos en seguida parece que lo único que ha quedado es una distinción entre clases y conjuntos. El mayor de los méritos es una formidable contribución al establecimiento de las conexiones entre la lógica y la matemática. Después de la obra de Whitehead y Russell los dedicados a fundamentos, incluyendo formalistas e intuicionistas, han sabido mucho mejor que antes cuáles son los puntos concretos que debían ser ulteriormente investigados.

Lo más importante en la reducción de los términos matemáticos a lógicos lo hemos dicho ya. Hemos visto al final de la parte primera cómo toda la fundamentación de la matemática se reduce a las fundamentaciones del número natural y de la teoría de conjuntos. La reducción lógica del número natural fue llevada a cabo por Frege, como hemos dicho ya, y de una manera más concisa e independiente, aunque equivalente, por Russell. La reducción lógica de la teoría de conjuntos se realiza mediante

el principio del círculo vicioso y los axiomas de infinitud y de reducibilidad de que nos ocuparemos en el apartado siguiente. Especial atención merece la reducción lógica del conjunto de los números reales. Para ello, Russell sigue la línea de Dedekind, a la que da un desarrollo ulterior aunque con un sentido totalmente distinto. Para Dedekind la definición de los números reales es creativa, se confía en la objetividad del concepto o idea matemática del número real y la continuidad de la recta es sencillamente un postulado existencial. Para Russell el término «número real» no se postula existencialmente, ni se pretende que responda a un concepto, cuya objetividad sería puesta en tela de juicio, ni se procede mediante definición creativa, ni hay estricta construcción del número real; hay solamente una mera construcción lógica, o logicoconstrucción, más o menos ficticia, basada esencial y remotamente en la hipótesis o creencia de que todo ello responde a cierta realidad del mundo como distinta del sujeto logificante.

11. Teoría de tipos

Naturalmente surgen las dificultades porque el procedimiento de Dedekind implica una definición impredicativa. Para resolverlas Russell introduce *ad hoc*, como *Deus ex machina*, el axioma de reducibilidad y todo el aparato de la teoría de tipos, cada uno de los cuales se resuelve en una sucesión de órdenes (teoría de tipos ramificada), a cuyo precio consigue efectivamente evitar toda definición impredicativa. Ramsey con su distinción entre paradojas lógicas y semánticas parece que consigue los mismos resultados con una simple teoría de tipos, es decir, exonerándola de la ramificación en órdenes.

Si para mayor sencillez consideramos solamente funciones de un solo argumento, o sea, propiedades, como, por ejemplo f(x), que significa que la propiedad f se aplica al elemento o individuo x o que x es un elemento que goza de la propiedad f, entonces la simple teoría de tipos consiste en la siguiente clasificación de términos: los individuos o elementos primarios o entidades que no han sido aún sometidas a operaciones lógicas constituyen el primer tipo o tipo cero, por ejemplo x, y, z, ... Al tipo uno pertenecen las propiedades de los individuos del tipo cero, por ejemplo f(x), g(y). Al tipo dos pertenecen las propiedades de estas propiedades como F(f), G(f), etc. Por ejemplo los números naturales se definen como funciones de tipo 2. Así el número dos puede definirse así:

$$\text{Df.}: 2(p) \equiv (\exists u)(\exists v)[p(u)\cdot p(v)\cdot u \neq v\cdot (z)(p(z) \supset \cdot z = u \vee z = v)],$$

o sea: el dos se aplica a *p* (o sea hay dos pes) si hay un *u* y un *v* tales que *u* es *p* y *v* es *p* y *u* es distinto de *v* y para todo *z* que sea *p* se tiene que *z* es *u* o *z* es *v*. La norma básica de la teoría de tipos es que una función del tipo k sólo puede admitir argumentos que pertenezcan al tipo k-1, por ejemplo F(f), f(x) tienen sentido y han de ser verdaderas o falsas. Otras expresiones como f(f) carecen de sentido y son inadmisibles. Es clara la relación de esta norma con el principio de círculo vicioso.

12. Dificultades

La introducción de número real en el logicismo sin presuponer el axioma de reducibilidad, parece insuperable si se quiere mantener estrictamente el principio de círculo vicioso. Carnap intentó dar una solución (1931), pero es inaceptable a la vista de los teoremas de Gödel que establecen la indecibilidad de fórmulas de la teoría de conjuntos. Por otra parte el carácter meramente logicoconstructivo de las definiciones ruselianas parece que hace esencialmente más difícil, si no imposible, una atenuación del principio de círculo vicioso, según parece haber puesto de manifiesto Gödel (1944).

Todavía hemos de mencionar otra importante objeción al logicismo, definitiva para matemáticos como Poincaré, H. Weyl, los intuicionistas y otros muchos. La teoría de tipos o la reducción lógica del número natural supone intuiciones previas que aunque se llamen lógicas son típicamente matemáticas; así la teoría de tipos supone la idea matemática de iteración y la noción de extensión de un concepto o clase parece implicar características extralógicas, si éstas han de entenderse en un sentido estricto de verdades analíticas o derivables exclusivamente del principio de contradicción; todo el aparato creado por Frege para logificar el concepto de número y luego introducir los números cardinales y luego los naturales, involucrando las propiedades en general de los números cardinales, parecen menos elementales que la introducción que de los mismos números naturales hacen las otras teorías sobre fundamentos.

Si lógica se entiende en un sentido más amplio, entonces algunos aceptarían probablemente cierta identificación de los métodos deductivos de la lógica con los de la matemática, pero con prioridad de ésta sobre aquélla, de modo que la lógica sería un mero capítulo de la matemática, o como ha dicho Gödel (1944), «es una sección de las Matemáticas que trata de clases, relaciones, combinaciones de símbolos, etc., en lugar de números, funciones, figuras geométricas, etc.» [3].

13. La reducción lógica de los teoremas

Los axiomas lógicos fundamentales para la reducción lógica de los teoremas son los mismos axiomas del cálculo de predicados; y las dos reglas de inferencia lógica son las de sustitución y de *modus ponens* o implicación, que son también las mismas que emplearon Hilbert y Ackermann en el sistema axiomático que construyeron.

Los autores de los *Principia* pretenden logificar todos los teoremas matemáticos en el sentido de reducirlos a proposiciones lógicas verdaderas, formadas exclusivamente por símbolos primitivos lógicos y por otros signos definidos explícitamente, los cuales a su vez pueden ser sustituidos por otros y así sucesivamente hasta poder conseguir que las proposiciones lógicas equivalentes a los teoremas matemáticos contengan solamente los símbolos lógicos primitivos.

Ahora bien, para llevar a cabo esta reducción los autores admiten como verdaderos los tres axiomas de infinitud, de selección y de reducibilidad. Este último axioma permite introducir propiedades del primer orden que tengan la misma extensión lógica que propiedades de orden superior, con lo cual se consigue poder formar definiciones predicativas, que sin este axioma serían impredicativas. Pero este axioma es difícilmente justificable. Los mismos autores en la introducción a la segunda edición de los *Principia* (1925) dicen: «La justificación de este axioma es puramente pragmática: lleva a los resultados deseados y no a otros. Pero es claro que no es la clase de axioma, del cual podamos quedar satisfechos» [8]. Si se abandona este axioma y se sustituye la teoría ramificada por la simple teoría de tipos de Ramsey, entonces ya hemos indicado en el apartado anterior que la logificación del número real parece ofrecer dificultades insuperables.

El postulado de infinitud establece que para todo número natural existe otro mayor. Es obvio que este postulado u otro equivalente o más fuerte ha de figurar en todo sistema axiomático que incluya un tratamiento de los números naturales, pero no parece que su admisión constituya una logificación. Tanto más cuanto que el axioma de infinitud no se postula existencialmente como en un sistema formal axiomático, sino que por basarse los autores en el mundo físico, su validez parece requerir la infinitud del mundo. En la segunda edición los autores proponen no considerar el axioma de infinitud como un postulado, sino simplemente como una hipótesis o condición que hay que explicitar condicional y explícitamente en cada teorema, en cuya deducción haya sido necesario emplearla. Especialmente desde el punto de vista del logicismo, es decir arguyendo *ad hominem*, esta solución resulta poco satisfactoria.

Finalmente podrían hacerse consideraciones análogas respecto del axioma de selección. Además, el empleo de este axioma parece implicar que si se hiciera la reducción de un teorema matemático a su expresión lógica exclusivamente mediante los símbolos lógicos primitivos se obtendrían expresiones no sólo con infinitos símbolos, sino incluso con infinitud no numerable. Esta conclusión tampoco parece satisfactoria y aun menos si se la considera desde el punto de vista del logicismo. H. Weyl en el *Monthly* (1946) comenta que en los *Principia* «ya no se puede decir que las matemáticas estén fundamentadas sobre la lógica, sino en una especie de paraíso de los lógicos».

Bibliografía

1 Becker, O., cfr. [1], Bibl. primera parte, cap. 2.
2 Beth, E. W., *Mathematical Thought*. Dordrecht. D. Reidel, 1965.
3 Benecerraf, P., y Putnam, H. (directores). *Philosophy of Mathematics*. (Colección de escritos selectos contemporáneos.) Nueva Jersey. Prentice-Hall, Inc., 1964.
4 Kleene, S. C., cfr. [10], Bibl. primera parte, cap. 3.
5 Kneebone, G. T., cfr. [5], Bibl. primera parte, cap. 1.
6 Mendelson, E., *Introduction to Mathematical Logic*. Nueva York. D. Van Nostrand Company, Inc., 1964.
7 Wang, H., cfr. [12], Bibl. primera parte, cap. 3.
8 Whitehead, A. N., y Russell, B., *Principia Mathematica*. Cambridge. University Press. Tres volúmenes, 1910-1913, y 2.ª ed., 1925-1927.
9 Wittgenstein, L., *Tractatus Logico-Philosophicus*. Londres. Routledge & Kegan Paul Lmt., 1962.

2

El formalismo

Axiomatización

1. Introducción

D. Hilbert (1862-1943) llevó a cabo la fundamentación de la geometría, especificando claramente su axiomatización, y haciendo patente su consistencia relativa respecto de la aritmética y el análisis. Después de los *Fundamentos de Geometría* (1899), el problema de su fundamentación es el mismo que el de la fundamentación de la aritmética y el análisis. Después de la obra de aritmetización del análisis en el siglo XIX el problema de la fundamentación de toda la matemática queda reducido al de fundamentar la teoría de números y la teoría de conjuntos. Es también obvio que todas las dificultades en los fundamentos de la matemática nacen del hecho de que en las matemáticas a menudo se hace uso del infinito actual, es decir, que se suponen como existentes y manejables conjuntos que contienen infinitos elementos. Por ejemplo para la definición de número real. Al colocar puntos suspensivos después de los primeros términos de una sucesión, la intuición que de ellos podemos tener en orden a manejarlos como un objeto concreto es mucho más oscura que la intuición de un conjunto pequeño de objetos. No obstante, en la deducción de los teoremas matemáticos si bien es verdad que se maneja el infinito el número de pasos lógicos que se realizan en cualquier demostración de cualquier teorema es necesariamente finito.

Es un hecho, y no es difícil poner ejemplos concretos, que mediante una demostración (y por tanto, con un número finito de pasos lógicos) lleguemos a demostrar la pura existencia de un ente matemático x, por ejemplo de un número real del intervalo (0, 1), sin que sea posible (por lo menos en el estado actual de las matemáticas) dar ningún procedimiento que permita calcular x, ni siquiera con burda aproximación. Así, por ejemplo, J. von Neumann demuestra la existencia de un número real x, $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$, sin que sea posible aproximarlo con una cota del error menor que 1/6. Análogamente en las matemáticas clásicas hay procedimientos, admitidos en general por los matemáticos, que pueden llegar por caminos lógicos finitos a teoremas, cuyo contenido afirma la existencia en un conjunto infinito de una cierta entidad matemática, elemento del conjunto, con cierta recóndita propiedad, pero de modo que no se conoce (por lo menos ahora) la manera de llegar constructivamente (y por tanto con un número finito de cálculos aritméticos) a tal entidad. Un ejemplo de tal procedimiento matemático es la demostración por reducción al absurdo de que una función definida en un espacio métrico que sea continua por sucesiones tiene que ser continua métricamente.

La idea fundamental de Hilbert al crear la teoría formalista para la fundamentación de la matemática consiste en la intuición de que ha de ser posible establecer más allá de toda duda la validez de las matemáticas clásicas, incluso de las no constructivas, apelando al carácter finitista o finitario de las demostraciones matemáticas. Para ello se «idealizarán» las demostraciones matemáticas, algo así como la introducción de puntos en el infinito es una idealización del concepto de punto y como la introducción de los números imaginarios es también una idealización; los sistemas formales serán precisamente esta idealización simplificadora de las demostraciones matemáticas. Luego mediante el establecimiento de un criterio, a saber, la consistencia del sistema formal, se establecerá a través de razonamientos finitos, y por tanto fuera de toda duda, la validez del contenido de todos los teoremas matemáticos, incluso de aquellos no obtenidos por procedimientos constructivos.

Antes de presentar con más detalle el programa de Hilbert y la actual formalización de la teoría de números hacemos a continuación unas observaciones importantes para una mejor comprensión de todo el capítulo.

2. Axiomatización material

Hemos visto en la primera parte que los griegos fueron los primeros en construir una axiomática de la matemática. La axiomática griega pretendía responder a la realidad; más aún, hablando en términos modernos, los griegos no hubieran podido dudar de la consistencia de su sistema e incluso debieron de creer que su geometría y aritmética era categórica. Hemos visto también el cambio profundo operado en estas apreciaciones como consecuencia del surgimiento de las geometrías no euclídeas. El método griego fue una axiomática *genética*, es decir, se engendraban las nociones y principios construyéndolos con una fundamentación en el mundo exterior. El logicismo, según hemos visto, construye también genéticamente sus axiomas, pues se pretende que responden a la realidad, es decir, que tienen un sentido y una aplicación que los justifica, y por tanto ni siquiera se plantea el problema de la consistencia, pues nadie duda de que el principio de contradicción es válido en el mundo exterior.

?sabiendo conociendo $\sqrt{2}$

Hilbert ha llamado a estos métodos genéticos y axiomáticos de fundamentar la matemática axiomáticas materiales *(inhaltliche Axiomatik)*, en oposición a la axiomática formal. Los axiomas de un sistema axiomático material como el griego tienen contenido y sentido.

No parece que las matemáticas puedan ser basadas en una axiomática material; en particular si el mundo es finito ya cae por su base una fundamentación basada en el realismo del mundo exterior, ni el postulado de continuidad de la recta puede basarse en la extensión física esencialmente discreta al parecer. Hemos visto, mediante modelos, cómo se prueba la consistencia de las geometrías no euclídeas relativamente a la euclídea; y Hilbert demostró la consistencia de la geometría euclídea respecto de la aritmética, y algo análogo puede hacerse con la geometría analítica creada por Descartes; pero es obvio que todo método de consistencia relativa está condenado al fracaso para la teoría de números y la teoría de conjuntos.

3. Axiomatización formal

En los axiomas de la geometría euclídea plana hemos visto, capítulo 2 de la primera parte, que los términos primitivos empleados son puntos, rectas y las relaciones de incidencia, orden y congruencia, todos los cuales tienen un contenido «material» e intuitivo evidente. Pero es muy importante observar que de este contenido material e intuitivo se prescinde totalmente en el desarrollo de la fundamentación de la geometría euclídea. La axiomática de los *Fundamentos de la Geometría* es sólo aparentemente material, pues, en realidad, es formal. En las deducciones y demostraciones nunca se apela al contenido material ni a la intuición, sino que los conceptos primitivos son empleados *exclusivamente* a través de las propiedades expresadas por los axiomas. Es decir que en realidad, a los efectos de la deducción lógica, los términos primitivos, punto, recta, etc., carecen de todo sentido esencial explícito y no tienen más contenido esencial que el implícitamente definido por los axiomas. Este tipo de definición de los elementos primitivos, propia de las teorías formales modernas, que la construyen exclusivamente a través de los axiomas que establecen relaciones entre ellos, se llama definición implícita. Parece que fue M. Pasch (1843-1930), maestro de Hilbert, el primero que empleó (1882) la definición implícita en la fundamentación de la geometría, pero es un mérito grande de Hilbert haber reconocido su importancia y haberla aplicado sistemáticamente hasta la supresión de las definiciones explícitas. Con ello se eliminan las numerosas dificultades que en la axiomática de Euclides surgían de las definiciones explícitas de punto, recta, etc., como pusimos ya de manifiesto en su lugar.

Por consiguiente, en un sistema axiomático formal los elementos primitivos (símbolos o términos o piezas) carecen en absoluto de contenido esencial explícito y son las piezas de un puro juego sin sentido material en sí mismo, cuyo manejo o único sentido formal viene definido implícitamente por las reglas del juego constituidas por los axiomas y reglas de inferencia.

Por tanto, en un sistema formal tendremos términos, fórmulas, demostraciones, teoremas que son diversas combinaciones de los elementos primitivos de acuerdo con ciertas reglas fijas, pero carece de sentido hablar de verdad o falsedad. El juego del ajedrez nos suministra un ejemplo: se puede preguntar si una situación dada es alcanzable (demostrable), pero no parece que tenga sentido preguntar si es verdadera o falsa en sí misma.

Ahora bien, el carácter formal de la teoría no obsta para que admita interpretaciones con un dominio (no vacío) de interpretación en el cual puedan variar las variables del sistema formal y en el cual tengan su correlato todas las entidades del sistema formal. Y en el cual además sea posible hablar de verdad o fal-

sedad; las cuales, empero, pueden a su vez ser abstractas o formales si el dominio de interpretación es también formal.

Por último, es importante tener en cuenta que las matemáticas tratan de entidades existentes y en particular los teoremas de existencia son fundamentales. Por tanto, si un sistema formal ha de suministrar una fundamentación de las matemáticas es necesario que sus elementos y axiomas tengan un carácter existencial. De ahí que los sistemas formales se llamen también existenciales en oposición a los sistemas materiales o genéticos. En éstos, se conciben los objetos antes de formular los axiomas que forman la base de su manejo: los axiomas son generados por las propiedades de los objetos preconcebidos ya como existentes. Por el contrario, en un sistema formal, los objetos reciben su existencia precisamente de la formulación y constitución del sistema. El formalismo de Hilbert contiene un sistema axiomático existencial o formal, mientras que el sistema axiomático de Russell debe considerarse como genético o material.

El programa de Hilbert

4. Elaboración del sistema formal

Vamos a exponer aquí, en líneas generales solamente, cuál fue el programa de Hilbert y en el capítulo siguiente expondremos con mayor detalle el estado actual de la teoría formal de números que se deriva directamente de la obra de Hilbert.

En primer lugar he aquí un texto de Hilbert en su conferencia en Hamburgo (1927), que casi parece un manifiesto:

Desearía acabar definitivamente con los problemas relativos a los fundamentos de la matemática como tales problemas. Para ello convierto toda proposición matemática en una fórmula concretamente demostrable y rigurosamente deducible, con lo cual pongo las definiciones y conclusiones matemáticas en tal posición que resultan incontrovertibles y además proporcionan una imagen de la ciencia considerada en su conjunto. Creo que podré conseguir completamente este fin con mi teoría de la demostración —*Beweistheorie*—, aun cuando será todavía necesario mucho trabajo para llevarla a su perfección definitiva.

La matemática como cualquier otra ciencia no puede tener la lógica como base única; antes bien, como condición preliminar para el empleo de lógicas inferencias y aplicación de operaciones lógicas nos ha sido dado ya algo previamente en la imaginación; ciertos objetos concretos y preterlógicos, que intuitivamente como cualquier vivencia inmediata vemos están ahí precediendo todo discurso. Si queremos que la inferencia lógica sea segura, es preciso

> que estos objetos puedan ser completamente comprendidos en todas sus partes, y que su descripción, distinción, ordenación y posición consecutiva sean dadas inmediatamente e intuitivamente al mismo tiempo que los objetos, como algo que no permite ni necesita ser reducido nuevamente a algo ulterior. Este es el fundamento filosófico, que para la matemática como absolutamente para todo pensar, comprender o comunicar científicos considero debe ser exigido. Y en particular en la matemática los objetos que consideraremos son los mismos signos concretos, cuya forma después que la hayamos considerado es inmediatamente clara y reconocible. Esto es el mínimo de preámbulos, del que ningún pensador científico puede librarse y con que por tanto, sea consciente o inconscientemente, debe contar [6].

En la elaboración de un sistema formal en orden a demostrar la validez de los métodos matemáticos clásicos podemos distinguir tres etapas, que podemos caracterizar con estas tres palabras: símbolos, fórmulas y teoremas del sistema.

Hay que determinar en primer lugar cuáles son los símbolos a emplear. Podrán ser de diversas clases: símbolos que representen variables o constantes, funciones y predicados que corresponderán a entidades matemáticas y luego símbolos que correspondan a las conexiones lógicas del discurso matemático y a los cuantificadores. Con estos símbolos formales se podrán formar sucesiones finitas de ellos, que llamaremos expresiones formales. Finalmente hay que considerar también sucesiones finitas de expresiones formales.

Las fórmulas constituyen una parte de las expresiones formales. Son precisamente aquellas en las que la sucesión de símbolos guarda ciertas reglas, a saber, las reglas de formación de fórmulas. En la interpretación matemática, a las fórmulas formales les corresponderán posibles expresiones matemáticas correctamente escritas, aunque no necesariamente verdaderas. Por ejemplo $0 + 0 = 0$, $0 + 0 = 1$ pueden ser ambas fórmulas formales, pero la expresión formal $= + + =$ no será una fórmula formal.

Finalmente hay que especificar los axiomas y reglas de inferencia que permitan obtener sucesiones de fórmulas de modo que cada una sea un axioma o una inferencia lógica de fórmulas precedentes. A tales sucesiones de fórmulas formales las llamaremos demostraciones (formales) de la última fórmula de la sucesión, la cual se llamará *teorema (formal)*. Naturalmente, si el sistema formal ha de ser un suficiente fundamento de las matemáticas o de parte de ellas, ya se entiende que los teoremas formales del sistema tendrán que corresponderse mutuamente con los teoremas de las matemáticas clásicas o con los de parte de ellas.

Obsérvese que la elaboración de un sistema formal como el que venimos describiendo es un trabajo que casi por entero se

encuentra ya hecho en los *Principia Mathematica.* Pero en éstos las matemáticas prácticamente se identifican o fluyen genéticamente del sistema formal, el cual en realidad no es formal sino material. Precisamente es, en parte, esa justificación material que quiere darse, a pesar de estar necesariamente involucrado el empleo del infinito actual, lo que hace que la fundamentación de las matemáticas ofrecida por los *Principia Mathematica* sea deficiente. El punto de vista de Hilbert es diferente.

5. Teoría de la demostración

Hilbert admite que el empleo del infinito actual en las matemáticas puede en efecto representar un salto en lo incomprensible y carecer de evidencia y ser la razón primitiva de la aparición de las paradojas. Por consiguiente, hay que crear una *Teoría de la demostración (Beweistheorie)*, que empleando exclusivamente razonamientos evidentes y por tanto finitarios demuestre teóricamente que los métodos de las matemáticas conducen a teoremas verdaderos y son por tanto métodos válidos. La pieza fundamental de la teoría de la demostración es la noción de consistencia del sistema formal. Supongamos que, en efecto, se ha construido un sistema formal, cuyos teoremas formales se corresponden mutuamente con los teoremas matemáticos de una cierta rama de la matemática. Si los teoremas matemáticos son verdaderos y tienen un sentido objetivo innegable y el método empleado para obtenerlos es válido, entonces será necesario que el sistema formal sea consistente. Pues a cada teorema matemático deberá corresponder un teorema formal y a la fórmula matemática contradictoria de la que expresa un teorema tendrá que corresponder una fórmula formalmente indemostrable; de tal manera que en el sistema formal no sea posible que una fórmula y su negación sean simultáneamente formalmente demostrables. Ahora bien, esto es precisamente la condición de consistencia del sistema formal, o sea, que si las matemáticas son verdaderas el sistema formal tiene que ser consistente.

Inversamente, Hilbert estima que si se demuestra que un sistema formal es consistente y en dicho sistema formal son demostrables formalmente las fórmulas formales que corresponden a teoremas de una rama de las matemáticas, ello es suficiente garantía de que los teoremas de esta rama de las matemáticas son verdaderos y por tanto la demostración de consistencia del sistema formal constituye la clave de la fundamentación formalista de las matemáticas.

Ahora bien, supongamos que tenemos un sistema formal, por ejemplo, la teoría formal de números, que pretenda ser una fundamentación de la teoría de números matemáticos. Si la teoría formal no fuera consistente, se podría demostrar una fórmula $\mathscr{A}$ y la negación de $\mathscr{A}$, $\sim\mathscr{A}$; pero, entonces, de la demostrabilidad de $\mathscr{A}$ y $\sim\mathscr{A}$ se sigue que todas las fórmulas del sistema son demostrables y por tanto también se podría demostrar una cualquiera, por ejemplo, $1 = 2$ o $1 \neq 1$. Por consiguiente, para demostrar que la teoría formal de números es consistente bastará demostrar que la fórmula $1 = 2$ es indemostrable, o que $1 \neq 1$ es indemostrable o que existe una fórmula cualquiera indemostrable.

Naturalmente no es nada evidente que haya de ser posible dar una demostración directa de la consistencia de la teoría formal de números. Al decir demostración directa queremos decir una demostración que se refiera directamente al sistema formal, sin apelar a la interpretación matemática ni a los métodos matemáticos como tales; y que sea una demostración evidente, es decir, por métodos finitarios que excluyan el uso del infinito actual. Parece ahora que tal demostración es imposible, y su imposibilidad la sospecharon ya desde el principio algunos matemáticos, como H. Weyl y L. Brouwer.

Pero si se diera tal demostración directa, es claro que ella implicaría una consistencia apreciable de las matemáticas correspondientes y por consiguiente sería una cierta justificación de su veracidad y contenido objetivo y de la validez de sus métodos. Más aún, se han dado demostraciones directas de la consistencia del cálculo proposicional y de la del cálculo de predicados. En cambio, como ya hemos dicho, parece imposible dar una demostración directa y finitaria de la consistencia de la teoría formal de números que formalice la teoría matemática de los números enteros considerados como anillo. Volveremos sobre este tema en el próximo capítulo. Observemos que Hilbert dio a conocer su teoría de la demostración con una confianza absoluta de que tal demostración de consistencia sería posible para toda la matemática formalizada; ahora parece claro que aquello fue un optimismo sin fundamento.

De lo dicho se desprende ya claramente cuál era el propósito de la teoría de la demostración: demostración de la absoluta veracidad de la matemática, o sea, una teoría de la fundamentación de la matemática. La palabra «metamatemática» fue también acuñada por Hilbert, con clara alusión a la clásica palabra aristotélica «metafísica». En Hilbert la metamatemática era sinónimo de teoría de la demostración, pero así como esta denominación ha caído en desuso la palabra metamatemática está en plena vigencia actualmente, aunque no siempre con el mismo sentido.

La metamatemática es la ciencia que estudia desde fuera los sistemas formales, que son por consiguiente la materia u objeto (o como se dice también a veces: sujeto) de aquélla, y en esto hay unanimidad. Pero se discrepa en los métodos propios de la metamatemática, pues para algunos son los mismos de la matemática sin restricción alguna, es decir, admitiendo por ejemplo la inducción trasfinita con el empleo del infinito como un todo. Ahora bien, si se pretende fundamentar la matemática, como intentó Hilbert, es obvio que entonces hay que emplear únicamente métodos finitarios, pues de lo contrario habría que acudir a una metametamatemática. Es claro que aunque la metamatemática se restrinja a los métodos finitarios puede ser objeto de una nueva ciencia ulterior, pero entonces todo ello puede incluirse ya en una única metamatemática, excluyendo un proceso indefinido inútil. Como veremos más adelante al tratar del intuicionismo, ni siquiera restringiendo los métodos metamatemáticos a los estrictamente finitarios, como propugnaron ambos, Hilbert y Brouwer, hay unanimidad entre ellos sobre cuáles deben ser estos métodos.

Parece hoy día que hay que admitir que la teoría de la demostración de Hilbert no ha conseguido sus fines. Ello ha contribuido sin duda a quitar importancia a la propiedad de consistencia de un sistema formal. Pero ya desde su mismísimo origen, fue negado que la demostración de consistencia de un sistema formal que formalizara parte de las matemáticas fuera suficiente garantía para la validez absoluta de éstas. Así Brouwer escribió (1923): «Una teoría errónea, aunque no se la coja en contradicción no por eso deja de ser errónea; ni más ni menos que una acción criminal aunque no sea condenada en juicio no por eso deja de ser criminal» [2]. Esta frase sólo tiene sentido en virtud de los distintos métodos metamatemáticos de Hilbert y Brouwer y por relación con los conceptos o símbolos ideales introducidos por Hilbert y a través de los cuales deben fundamentarse las proposiciones reales de las matemáticas incluyendo el paraíso cantoriano.

Sobre todo después de los resultados de K. Gödel (1931) se ha acentuado la parvificación del concepto de consistencia. Para citar un solo ejemplo, H. Curry en 1939 (1951 y 1954) mantiene que la demostración de consistencia no es ni suficiente ni necesaria para la aceptabilidad de un sistema; por aceptabilidad entiende el conjunto de consideraciones que en vista de las aplicaciones, llevan a que haya interés por un sistema formal con preferencia a otro.

Bibliografía

Véase la del capítulo siguiente.

3

Teoría formal de números

1. Introducción

En este capítulo vamos a dar un ejemplo, el más elaborado y característico de todos, de sistema formal, que en la escuela formalista pretendió ser la base para una fundamentación suficiente de la teoría de números matemática, tal como ésta ha sido elaborada a lo largo de la historia y se enseña en los textos y cursos de matemáticas. Naturalmente, no pretendemos dar nada más que una mera introducción, reduciendo a un mínimo el aparato formal y metamatemático; pero desearíamos tocar de una manera inteligible algunos de los problemas más importantes a que ha dado lugar el desarrollo del formalismo hilbertiano. En particular queremos exponer los sorprendentes resultados de K. Gödel (1906) que arrojan extraordinaria luz sobre las cuestiones de consistencia, complitud y decibilidad.

Aunque no podemos salirnos de un nivel elemental, es necesario que definamos algunos conceptos con todo rigor si no queremos que la exposición resulte incomprensible. Daremos únicamente los jalones más importantes y en particular suponemos conocidos el cálculo proposicional y el cálculo de predicados. Aunque la teoría formal de números tiene actualmente enorme interés en sí misma y por sus relaciones con la lógica y la filosofía de las ciencias, aquí trataremos principalmente de su relación con la fundamentación de las matemáticas, teniendo especialmente en cuenta el programa de Hilbert expuesto en la sección anterior. Para una exposición más extensa que la que hacemos a continuación nos remitimos a los excelentes textos de E. Mendelson (1964) y S. C. Kleen (1952, 1963[3]).

Es importante tener siempre presente que las proposiciones y teoremas que se escriban pertenecen a tres niveles distintos. En primer lugar las proposiciones y teoremas formales: se trata exclusivamente de sucesiones finitas de símbolos que pertenecen al sistema formal, que constituyen términos o fórmulas formales o demostraciones formales, sin sentido en sí mismas, que son manipuladas de acuerdo con reglas fijas, como si se tratara de un juego, de modo que en el paso de unas a otras no se puede apelar a sentido o contenido alguno, sino únicamente a las reglas del juego, es decir, las reglas del sistema formal. Este primer lenguaje se llama lenguaje de la teoría formal, o lenguaje formal, o lenguaje objeto, porque es el objeto sobre el que versa el metalenguaje o lenguaje metamatemático que pasamos a describir.

En segundo lugar están las proposiciones, afirmaciones, teoremas metamatemáticos que versan sobre el sistema formal, sobre su estructura o sus propiedades. Es algo así como el español cuando se usa ese lenguaje en una clase de francés para hablar sobre el francés, su estructura y sus particularidades. Lo llamaremos metalenguaje y es el lenguaje de la metamatemática o de la metateoría. Es un lenguaje científico y preciso, más que el lenguaje matemático de las matemáticas clásicas, pero no es formal. Al contrario, el metalenguaje es informal y sus proposiciones son afirmaciones o negaciones con sentido y contenido, el cual debe ser entendido y comprendido. El metalenguaje es el lenguaje en que expresamos el contenido de la metateoría o metamatemática, cuyos métodos suponemos reducidos a métodos exclusivamente finitarios. Naturalmente, la teoría formal y su lenguaje formal deben necesariamente preceder a la metateoría y a su metalenguaje.

Finalmente, en tercer lugar está la teoría matemática que resulta al dar a la teoría formal una interpretación. En nuestro caso esta teoría es la teoría de números o aritmética elemental como parte, la más clásica, de la matemática. Aquí matemática se entiende en el sentido clásico obvio, resultante de la evolución histórica y tal como figura en los libros de texto y es tratada por los matemáticos profesionales. El lenguaje correspondiente lo llamaremos lenguaje matemático. Es un lenguaje que se cree que tiene sentido, que debe ser entendido y comprendido. Su estructura es muy parecida a la del metalenguaje, sólo que es un hecho histórico que los métodos matemáticos no están restringidos a los finitarios exclusivamente. Naturalmente en nuestra exposición el lenguaje matemático es lógicamente el último en aparecer, pero es el primero en la intención. Como que el sistema formal de la teoría formal de números de que nos ocuparemos ha sido elaborado precisamente para que admita una interpretación que sea precisamente la teoría de números matemática. Confírmese con lo que hemos dicho en la sección precedente al tratar del programa de Hilbert.

Para mayor claridad definimos a continuación lo que es una teoría formal de primer orden antes de definir la teoría formal de números.

Teoría formal de primer orden

2. Símbolos y fórmulas

En el capítulo anterior, apartado 4, hemos dado una descripción, que aunque imprecisa es suficiente para nuestro objeto, de lo que es un sistema o teoría formal.

Para el caso particular que ahora nos ocupa, vamos a ser más precisos.

Una teoría formal de primer orden es una teoría formal en la que hay los siguientes *símbolos:* los conectivos proposicionales $\sim$ (negación), $\supset$ (implicación); (,) (signos de puntuación de abrir y cerrar paréntesis); $\forall$ (cuantificador universal); un número infinito numerable de variables individuales $x_1, x_2, \ldots$; un conjunto numerable no vacío de predicados A^n_j, donde $n \geqslant 1$ es el número de argumentos del predicado y $j \geqslant 1$ es para distinguir los diversos predicados posibles con n argumentos; un conjunto numerable de funciones $f^n_j (n \geqslant 1,\ j \geqslant 1)$; y un conjunto numerable de constantes a_i, $(i \geqslant 1)$. Es fácil definir los restantes símbolos lógicos comúnmente empleados, como $\vee$ (disyunción), $\wedge$ (copulación), $\equiv$ (equivalencia o mutua implicación), a partir de los dos únicos conectivos lógicos permitidos. Que la teoría formal sea de primer orden (o elemental, como también se dice), quiere decir que no se admiten predicados ni funciones que sean argumentos de otros predicados, ni tampoco se admiten predicados ni funciones como cuantificadores; en general, que una teoría formal sea de primer orden no supone restricción esencial alguna.

En orden a definir las *fórmulas bien hechas,* abreviadamente fbhs, o *fórmulas formales* o simplemente *fórmulas,* definiremos previamente lo que son los *términos:* 1) Las constantes y las variables individuales son términos. 2) Si f^n_j es una función y

$t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos entonces $f^n_j(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ es un término. 3) No hay más términos que los generados mediante 1) y 2).

Son fórmulas formales o fbhs: 1) las fórmulas atómicas $A^n_j(t_1, \ldots, t_n)$, donde A^n_j es un predicado y $t_1, t_2, \ldots, t_n$ son términos.

2) Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son fbhs y z es una variable, entonces $\sim \mathscr{A}$, $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$, $(\forall z)\mathscr{A}$ son fbhs.

3) No hay más fbhs que las engendradas mediante 1) y 2).

A partir del cuantificador universal $(\forall z)$ es fácil definir el cuantificador existencial $(\exists z)$ así: $(\exists z)\ \mathscr{A}$ es una abreviación de $\sim((\forall z) \sim \mathscr{A})$.

3. Variables ligadas y libres

Si queremos expresar una fórmula como dependiendo posiblemente de una variable formal x_1, o de dos x_1, x_2, etc., escribiremos $\mathscr{A}(x_1)$ o $\mathscr{A}(x_1, x_2)$, etc. Si la fbh está afectada por un cuantificador $(\forall x_1)\mathscr{A}$ hay que distinguir entre variables ligadas (o mudas o aparentes) y variables libres (o verdaderas o nominales), de una manera parecida a como se hace en matemáticas. Por ejemplo en

$$\int^x f(x, z)\, dx,$$

la variable x que figura como argumento de f es ligada, mientras que z y la x que figura como límite de integración son libres. Análogamente, en la fbh

$$(\sim A^2_1(x_1, x_2)) \supset (\forall x_1)\, A^1_1(x_1),$$

la primera ocurrencia de x_1 y la única ocurrencia de x_2 son libres, mientras que la segunda y tercera ocurrencias de x_1 son ligadas.

Los razonamientos son más claros y fáciles de formular si se evita que una misma variable ocurra simultáneamente en una fbh como libre y como ligada. Así es más claro escribir:

$$\int^x f(s, y)\, ds,$$

en lugar de la integral que hemos escrito antes, pues es claro que no afecta al razonamiento de cambiar el nombre de una variable ligada (muda). Supondremos en adelante que en las fbhs que empleemos ninguna variable ocurre simultáneamente como libre y ligada; para el efecto que pretendemos ello resultará más simple y más claro.

4. Axiomas

Los axiomas de una teoría formal de primer orden se clasifican en dos grupos: axiomas lógicos y axiomas propios.

Suponiendo que t sea un término y que $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ sean fbhs, los siguientes esquemas representan *axiomas lógicos:*

(1) $\mathscr{A} \supset (\mathscr{B} \supset \mathscr{A})$

(2) $(\mathscr{A} \supset (\mathscr{B} \supset \mathscr{C}) \supset ((\mathscr{A} \supset \mathscr{B}) \supset (\mathscr{A} \supset \mathscr{C}))$

(3) $(\sim \mathscr{B} \supset \sim \mathscr{A}) \supset ((\sim \mathscr{B} \supset \mathscr{A}) \supset \mathscr{B})$

(4) $(\forall x_i)\, \mathscr{A}(x_i) \supset \mathscr{A}(t)$

suponiendo que ninguna de las variables x_j contenidas en t actúe en $\mathscr{A}(x_i)$ como cuantificadora que ligue alguna ocurrencia libre de x_i. De acuerdo con la observación al final del apartado anterior lo más sencillo es excluir que alguna de las variables ligadas de $\mathscr{A}(x_i)$ coincida con alguna de las variables contenidas en t.

(5) $(\forall x_i)(\mathscr{A} \supset \mathscr{B}) \supset (\mathscr{A} \supset (\forall x_i)\, \mathscr{B})$ suponiendo que la fbh $\mathscr{A}$ no contenga ninguna ocurrencia libre de x_i.

Los *axiomas propios* son los que caracterizan las diversas teorías formales de primer orden. En particular el llamado *cálculo de predicados de primer orden* es precisamente una teoría formal de primer orden que no tenga ningún axioma propio. Obsérvese que los tres primeros esquemas de axiomas son los del cálculo proposicional.

5. Reglas de inferencia y teoremas

Las reglas de inferencia son dos: la del *modus ponens* del cálculo proposicional y la de *generalización* propia de un cálculo de predicados. Sean $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ fbhs. La regla del *modus ponens* permite inferir $\mathscr{B}$ en la sucesión de fbhs de una prueba, cuando se tengan previamente $\mathscr{A}$ y $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$. La generalización permite deducir $(x_i)\,\mathscr{A}$ cuando se tiene $\mathscr{A}$; esta regla significa simplemente que en el lenguaje formal las variables que ocurren deben entenderse, cuando interpretadas, con una interpretación general (como en la identidad $x^2 - z^2 = (x - z)(x + z)$) y no con interpretación condicional (como en la ecuación $x^3 - 2x = 1$).

Para llegar a la noción de teorema hemos de decir antes lo que entendemos por demostración formal. Se llama demostración formal a una sucesión finita de fbhs **D**, $\mathbf{D} = \{\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2..., \mathscr{A}_n\}$, $n \geqslant 1$, tales que para cada una de ellas es posible especificar uno de los tres casos siguientes: o bien que la fbh es un axioma y cuál; o bien que la fbh $\mathscr{A}_k$ se infiere por aplicación de la regla de inferencia *modus ponens* a dos fbhs $\mathscr{A}_i$, $\mathscr{A}_j$ de la sucesión **D**, tales que $i < k, j < k$; o bien por la regla de inferencia generalización aplicada a una fbh $\mathscr{A}_g$ de la sucesión **D** tal que $g < k$.

Se llama teorema a toda fbh que pueda ser última fbh de una demostración formal. En particular, un axioma es la última fbh de una sucesión de fbhs que se reduzca a ella sola; por tanto, todos los axiomas son teoremas. El que una fbh sea un teorema se expresa mediante el símbolo $\vdash$. Por ejemplo, la expresión metamatemática $\vdash \mathscr{B}$ quiere decir que $\mathscr{B}$ es formalmente demostrable, o sea, que $\mathscr{B}$ es un teorema, y se lee «$\mathscr{B}$ es formalmente demostrable».

Como ejemplo de teoría formal de primer orden supóngase que no hay ni constantes ni funciones y sólo un predicado A_1^2. En vez de escribir $A_1^2(x_i, x_j)$ y $\sim A_1^2(x_i, x_j)$ se escribirá $x_i < x_j$ y $x_i \nless x_j$ respectivamente. Hay además dos axiomas propios:

$(x_1)(x_1 \nless x_1)$ (irreflexividad)

$(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)(x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3 \supset x_1 < x_3)$ (transitividad)

Una interpretación que sea un modelo de esta teoría se dice que es una estructura parcialmente ordenada.

6. Teorías formales de primer orden con igualdad

Supongamos que en una teoría de primer orden *s* y *t* son términos y que exista un predicado A_1^2 cuyo empleo lo abreviamos escribiendo $s = t$ y $s \neq t$ en vez de escribir $A_1^2(s, t)$ y $\sim A_1^2(s, t)$. Entonces, se dice que esta teoría formal de primer orden es con igualdad si en esa teoría las fbhs

$(\forall x_1)(x_1 = x_1)$ (reflexibilidad)

$(x = z \supset (\mathscr{A}(x,x) \supset \mathscr{A}(x, z))$ (posibilidad de sustitución)

son axiomas o teoremas de la teoría. En el segundo teorema $\mathscr{A}$ es una fbh arbitraria y se entiende que $\mathscr{A}(x, z)$ surge al sustituir

en $\mathscr{A}(x, x)$ algunas ocurrencias libres de x, no necesariamente todas, por z; naturalmente hay que suponer que en $\mathscr{A}(x, x)$ no ocurre z como cuantificadora de manera que ligue ocurrencias libres de x que vayan a ser sustituidas por z.

Definición de la teoría y su potencia formalizadora

7. Los axiomas propios

La teoría formal de números S, que vamos a estudiar, es una teoría formal de primer orden con igualdad, en la que el único predicado que hay es precisamente el de igualdad. Hay en S una única constante, cuyo símbolo será $\overline{0}$, y hay tres funciones f_1^1, f_1^2 y f_2^2, que representaremos así: en vez de poner $f_1^1(t), f_1^2(t,s), f_2^2(t,s)$ pondremos respectivamente t' (el siguiente de t), $t + s$ (la suma de t y s), $t \cdot s$ (el producto de t por s), donde t, s son términos de la teoría formal.

Finalmente hay nueve axiomas propios:

1. $x_1 = x_2 \supset (x_1 = x_3 \supset x_2 = x_3)$
2. $x_1 = x_2 \supset x_1' = x_2'$
3. $\overline{0} \neq x_1'$
4. $x_1' = x_2' \supset x_1 = x_2$
5. $x_1 + \overline{0} = x_1$
6. $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$
7. $x_1 \cdot \overline{0} = \overline{0}$
8. $x_1 \cdot (x_2') = (x_1 \cdot x_2) + x_1$
9. $\mathscr{A}(\overline{0}) \supset ((\forall z)(\mathscr{A}(z) \supset \mathscr{A}(z')) \supset (\forall z)\mathscr{A}(z))$.

Este sistema de axiomas constituye una formalización rigurosa de los cinco axiomas de Peano, formulados antes por Dedekind, definiendo implícitamente los conceptos de «cero», «número» y «el siguiente de». Los dos primeros definen implícitamente el predicado de igualdad y su aplicación a la función de formar el siguiente. El tercero y cuarto corresponden exactamente a los de Peano; el quinto y sexto definen implícitamente la función suma;

y el séptimo y octavo son asimismo suficientes para definir implícitamente la función producto.

El último axioma, que es el único que propiamente no es un axioma único, sino un esquema que equivale a una infinidad numerable de axiomas, es especialmente importante y define formalmente el método de demostración por el principio de la inducción matemática. En ese axioma 9 se entiende que z es una variable y que $\mathscr{A}$ es una fbh cualquiera. Es digno de observarse que el número de fbhs $\mathscr{A}(z)$ es numerable, mientras que en los axiomas de Peano y en los textos de matemáticas al hablarse de «propiedades» de los números naturales, o sea, subconjuntos del conjunto de números naturales, el principio de inducción se establece para un conjunto no numerable de propiedades.

8. Interpretación estandarizada

Lo más importante de la interpretación de un sistema formal consiste en señalar un conjunto no vacío de objetos o elementos, D, llamado el dominio de interpretación, en el cual se supone que las variables de la teoría formal de primer orden toman valores. En principio este dominio de interpretación D se puede fijar arbitrariamente y el número cardinal de D puede ser cualquiera, con tal que no sea cero. Una vez fijado D hay que señalar los elementos de D que corresponden a las constantes del sistema formal, luego las operaciones o funciones definidas en D^n con valores en D que corresponden a las funciones f_j^n del sistema formal y finalmente las relaciones o subconjuntos de D^n que corresponden a los predicados A_j^n. Así es posible establecer una correspondencia o interpretación de los símbolos, fórmulas y teoremas del sistema formal con los correspondientes símbolos, fórmulas y teoremas de los elementos de D. En cuanto a la interpretación de los conectivos, signos de puntuación y cuantificadores, es la obvia y corriente del cálculo de predicados.

Vamos a dar ahora con mayor detalle la interpretación estandarizada del sistema S, es decir, aquella que tuvieron presentes en la intención Dedekind, Peano, Russell, Hilbert... cuando definieron el sistema S de la teoría formal de números.

La interpretación estandarizada, por otra parte obvia, se obtiene así: El dominio de interpretación de S es el conjunto de los números naturales incluyendo el cero, conjunto o dominio que representaremos por $\mathscr{N}$.

Al símbolo $\overline{0}$ (constante) hacemos corresponder como interpretación suya el número natural cero.

Las funciones siguiente, suma y producto formales las interpretamos como siguiente, suma y producto de número naturales.

El predicado de igualdad lo interpretamos como relación de identidad entre números naturales, es decir, aquella relación que tiene lugar entre dos números naturales m y n sólo y cuando m y n son el mismo número natural.

Se comprueba inmediatamente que a las fbhs corresponden en la interpretación fórmulas matemáticas correctamente formuladas, es decir, fórmulas que tienen sentido. En particular, si la fbh es cerrada, es decir, que no tiene ninguna variable libre, entonces la fórmula matemática correspondiente tiene un sentido bien definido y único y ha de ser necesariamente verdadera o falsa. Por ejemplo a las fbhs

$$x_1' + \overline{0}''' = x_1'''$$

$$(\forall x_1)((x_1 \cdot x_1) + ((x_1 + x_1) + 0') = (x_1') \cdot (x_1'))$$

corresponden las fórmulas aritméticas

$$\begin{aligned} &(x + 1) + 3 = x + 3 \\ &x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2, \quad x \in \mathscr{N}, \end{aligned}$$

de las cuales la primera es falsa y la segunda es verdadera.

La interpretación de una fbh que contenga una variable libre es una propiedad (relación de un solo argumento), o sea, un subconjunto de $\mathscr{N}$; es decir, el conjunto de números naturales que poseen tal propiedad. La interpretación de una fbh con dos variables libres es una relación binaria, o sea, un subconjunto de $\mathscr{N}^2$; es decir, el conjunto de pares ordenados de números naturales que satisfagan la relación. Y así sucesivamente para fbhs con un número mayor de variables libres. Por ejemplo, a las fbhs

$$\begin{aligned} &(\exists x_2)((x_1 \cdot x_1) + x_2' = x_1 + \overline{0}''') \\ &(x_1 \cdot x_1) + ((x_1 + x_1) + \overline{0}') = (x_1') \cdot (x_1') \\ &(x_1 \cdot x_1) + x_2' = x_1 + \overline{0}''' \end{aligned}$$

corresponden respectivamente: aquella propiedad de los números naturales *x*, en virtud de la cual existe un número natural *y* tal que

$$x^2 + y + 1 = x + 3;$$

aquella propiedad de los números naturales x, en virtud de la cual se tiene

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2;$$

y aquella relación binomia entre números naturales x, y, en virtud de la cual se tiene

$$x^2 + y + 1 = x + 3.$$

Estas tres relaciones pueden obviamente identificarse respectivamente con los conjuntos siguientes:

$$\{x \mid (\exists y)(x^2 + y + 1 = x + 3)\} = \{0, 1, 2\}$$
$$\{x \mid x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2\} = \mathcal{N}$$
$$\{(x, y) \mid x^2 + y + 1 = x + 3\} = \{(0, 2), (1, 2), (2, 0)\}.$$

El primero es un subconjunto de $\mathcal{N}$, el segundo también, aunque coincide con el mismo $\mathcal{N}$, y el tercero es un subconjunto de $\mathcal{N}^2$.

Vemos, pues, que una fbh cerrada tiene que ser necesariamente verdadera o falsa en la interpretación estandarizada (y en general en cualquier interpretación determinada, aunque puede suceder que sea verdadera en una interpretación y falsa en otra). Una fbh, que contenga variables libres, puede ser que en la interpretación sea verdadera para unos valores de las variables y falsa para otros valores; se dice que una fbh con variables libres es verdadera (con respecto a una interpretación, en nuestro caso la estandarizada) si su interpretación es siempre verdadera, y se dice que es falsa si su interpretación es siempre falsa cualesquiera que sean los valores que las variables libres tomen en el dominio de interpretación $\mathcal{N}$.

9. Modelos

Se dice que una interpretación de una teoría formal de primer orden es un modelo de esta misma teoría si todos los teoremas formales de la teoría resultan verdaderos en la interpretación. Para ello es necesario y suficiente que sean verdaderas las interpretaciones de todos los axiomas, pues las dos reglas de inferencia infieren siempre fbhs verdaderas (en la interpretación) cuando las premisas son fbhs verdaderas (en la interpretación).

La interpretación estandarizada de la teoría formal de números S se admite que es un modelo (el modelo estandarizado) de S; así lo creen confiadamente todos los matemáticos. Si además se admite que la teoría aritmética de números, o bien aquella parte de las matemáticas que forman el rango de la interpretación estandarizada, contiene una interpretación de fbh que es falsa, por ejemplo, se admite que $1 = 2$ es falso, entonces es claro que resulta que S tiene que ser consistente.

Nadie duda de que $1 = 2$ sea aritméticamente falso. Pero el suponer al nivel de verdad metamatemática incuestionable que la interpretación estandarizada sea en efecto un modelo de S ofrece ciertas inconveniencias: en primer lugar eso sería invertir los términos del programa de Hilbert, pues esa demostración de consistencia no es directa, sino precisamente suponiendo lo que se quiere demostrar; el comprobar que los axiomas son verdaderos (en la interpretación) es intuitivo e impropio del formalismo, y además en las demostraciones a través de las interpretaciones se maneja la teoría de conjuntos que es también una teoría que a su vez necesita ser justificada.

Por lo dicho, aunque apelemos quizás a la interpretación estandarizada como modelo, no supondremos que esté metamatemáticamente demostrado que S sea consistente. Si la consistencia de S fuera una hipótesis necesaria, la estableceremos expresa y explícitamente.

10. Extensión del modelo

Nos referimos naturalmente al modelo estandarizado. Una vez establecida la correspondencia entre la teoría formal S y su modelo estandarizado es inmediato formular la pregunta: ¿hasta dónde alcanza la potencia de la teoría S, como formalización de la teoría aritmética de números? Es claro que esta pregunta cae de lleno dentro del programa de Hilbert.

Por una parte es obvio que a todo teorema formal de S corresponde un teorema matemático de la teoría de números, pues una demostración en S puede traducirse inmediatamente en una demostración matemática. Por otra parte, en la dirección contraria, es decir, de la teoría de números a S, la marcha aparece ya desde un principio harto problemática. Indiquemos sucintamente a continuación el comienzo del desarrollo de la teoría formal S.

Desde luego se puede empezar de una manera obvia (generalización y particularización) por generalizar los ocho primeros axiomas propios poniendo términos arbitrarios t, s, r de S en vez de las variables x_1, x_2, x_3. Después pueden demostrarse formalmente todas las leyes formales de la adición y multiplicación y establecer que S es una teoría formal de primer orden con igualdad.

Llamaremos numerales a los términos que se obtienen al aplicar al cero la función siguiente un número finito de veces. Representaremos por $\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{m}, \ldots$ los numerales correspondientes a los números naturales $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots$. Se demuestran para los numerales las mismas leyes de igualdad y desigualdad que valen para los números naturales. Se introduce también sin dificultad la relación de orden en S. Por ejemplo $t < s$ es una abreviación de

$$(\mathrm{E}\, r)(r \neq 0 \wedge t + r = s).$$

También se puede introducir la noción de divisibilidad y puede establecerse la existencia y unicidad (que representaremos por $\exists_1$) del cociente y el resto de la división de x por un divisor d:

$$\vdash d \neq 0 \supset (\exists_1 q)(\exists_1 r)(x = d \cdot q + r \wedge r < d).$$

¿Hasta dónde puede extenderse la formalización de la teoría de números? Suele distinguirse entre teoría de números elemental y teoría de números analítica que emplea en las demostraciones métodos del análisis ajenos a la aritmética de los números naturales. Parece natural que toda la teoría de números elemental forme parte del modelo estandarizado de la teoría formal de números. Pero cabe sospechar que no sucederá lo mismo con los teoremas de la teoría analítica de números. En algunos casos parece que estos teoremas ni siquiera pueden ser formulados mediante fbhs de S. En otros, sencillamente se desconoce actualmente si es posible obtener en S una demostración formal de la fbh correspondiente. Parece que podría definirse precisamente como teoría elemental de números aquella parte de la teoría de números, o sea, de la aritmética, que constituye exactamente el modelo estandarizado de la teoría formal S. Pero, entonces, parece que se prejuzga ya, que si hay teoremas de la teoría de números (analítica) que no pueden obtenerse por métodos elementales (¿finitarios?), estos teoremas no podrán ser contenidos en el modelo de S y por tanto el programa de Hilbert ha de resultar ineficaz; y ello a pesar de que pueda ser que tales teoremas no elementales sean expresables en la teoría S mediante fbhs. Si éste fuera el caso, habría fbhs de la teoría formal S que en la interpretación expresarían teoremas (proposiciones verdaderas) matemáticos, pero que tales fbhs serían indemostrables formalmente en S. Veremos que tal es el caso y ello es el contenido del famoso e importante de incomplitud de Gödel (1931).

Para una mejor comprensión de este teorema, en la próxima sección expondremos con algún mayor detalle la potencia formalizadora del sistema S y el proceso de aritmetización de la metamatemática efectuada por Gödel mediante la numeración que lleva el nombre de su autor.

Aritmetización de la metamatemática

11. Funciones y relaciones de la teoría de números

Se llaman relaciones de la teoría de números aquellas en que sus argumentos son números naturales; si la relación relaciona n argumentos puede identificarse con un subconjunto de $\mathscr{N}^n$, como ya hemos indicado (apartado 8). Análogamente se llaman funciones de la teoría de números aquellas que aplican $\mathscr{N}^n$ en $\mathscr{N}$, supuesto que tengan n variables independientes; o sea, que tanto sus argumentos como sus valores son números naturales; pueden identificarse con un subconjunto de $\mathscr{N}^{n+1}$.

Se dice que una relación de la teoría de números $R(x_1, \ldots, x_n)$ es expresable en la teoría formal S si existe en S una fbh $\mathscr{A}(x_1, \ldots, x_n)$ tal que se tenga:

1) Si $R(k_1, \ldots, k_n)$ es verdadero, entonces $\vdash \mathscr{A}(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n)$
2) Si $R(k_1, \ldots, k_n)$ es falso, entonces $\vdash \sim \mathscr{A}(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n)$,

donde $k_1 \ldots, k_n$ son números naturales arbitrarios. Por ejemplo, la relación ternaria $x_1 + x_2 = x_3$ es expresable en S.

Se dice que una función de la teoría de números $f(x_1, \ldots, x_n)$ es representable en la teoría formal S si existe en S una fbh

$$\mathscr{A}(x_1, \ldots, x_{n+1})$$

tal que se tenga:

1) Si $f(k_1, \ldots, k_n) = k_{n+1}$, entonces $\vdash \mathscr{A}(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_{n+1})$
2) $\vdash (\mathrm{E}_1 x_{n+1}) \mathscr{A}(\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n, x_{n+1})$,

donde $k_1, \ldots, k_{n+1}$ son números naturales arbitrarios.

Por ejemplo, la función cero y la función constante (para cualquier número de variables y cualquier constante); las funciones que dan el siguiente o la suma o el producto de dos variables son funciones representables en S. La función proyección U_i^n tal que

$$U_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$

es también representable.

Si $R(x_1, \ldots, x_n)$ es una relación (se entiende siempre de la teoría de números), entonces se llama función característica de la relación R a la función $C_R(x_1, \ldots, x_n)$ tal que sea:

$$C_R(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} 0 \text{ si } R(x_1, \ldots, x_n) \text{ es verdadera} \\ 1 \text{ si } R(x_1, \ldots, x_n) \text{ es falsa.} \end{cases}$$

Es fácil demostrar que $R(x_1, \ldots, x_n)$ es expresable en S sólo y cuando $C_R(x_1, \ldots, x_n)$ es representable en S.

12. Funciones y relaciones recursivas

La clase de las funciones recursivas ha ido adquiriendo en estos últimos decenios, importancia creciente, no sólo por su relación con los sistemas formales, sino aún más por su posible identificación con la clase de las funciones efectivamente computables.

Se llaman funciones iniciales a la función cero, $Z(x) = 0$, para todo x; a la función siguiente, $N(x) = x + 1$, para todo x; y a las funciones proyecciones ya definidas en el apartado anterior. Hemos visto que todas son representables en S.

Se dice que la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ se ha obtenido a partir de las funciones $g(y_1, \ldots, y_m)$, $h_1(x_1, \ldots, x_n)$, ..., $h_m(x_1, \ldots, x_n)$ por substitución si se tiene

$$f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

Se dice que la función $f(x_1, \ldots, x_n, y)$ se ha obtenido a partir de las funciones $g(x_1, \ldots, x_n)$ y $h(x_1, \ldots, x_n, y, z)$ (o de solo la función h si $n = 0$) por recurrencia, si para $n \neq 0$ se tiene

$$\begin{cases} f(x_1, \ldots, x_n, 0) = g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(x_1, \ldots, x_n, y + 1) = h(x_1, \ldots, x_n, y, f(x_1, \ldots, x_n, y)); \end{cases}$$

o bien, si $n = 0$,

$$\begin{cases} f(0) = \text{k, número natural constante,} \\ f(y + 1) = h(y, f(y)). \end{cases}$$

Sea $g(x_1, \ldots, x_n, z)$ una función de la teoría de números que satisfaga la condición siguiente: cualesquiera que sean los números naturales $k_1, \ldots, k_n$ exista siempre por lo menos una raíz o solución (número natural) de $g(k_1, \ldots, k_n, z) = 0$. Sea μ el operador que aplica $\mathcal{N}^n$ en $\mathcal{N}$, de modo que cualesquiera que sean $x_1, \ldots, x_n$ da el número natural z mínimo, que representaremos por

$$\mu z[g(x_1, \ldots, x_n, z) = 0],$$

tal que $g(x_1, \ldots, x_n, z) = 0$. Se dice que la función $f(x_1, \ldots, x_n)$ se ha obtenido a partir de la función $g(x_1, \ldots, x_n, z)$, que satisface la mencionada condición, por aplicación del operador μ si se tiene

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu z[g(x_1, \ldots, x_n, z) = 0].$$

Podemos ya definir la clase de las funciones recursivas. Se dice que una función es recursiva si puede obtenerse a partir de las funciones iniciales por sustitución, por recurrencia o por aplicación del operador μ, pudiendo emplearse sucesivamente estos procedimientos de obtención de nuevas funciones en cualquier orden y cualquier número finito de veces.

La importancia de esta clase de funciones para el estudio metamatemático del sistema formal S aparecerá en el párrafo 14. Como ejemplos de funciones recursivas mencionemos:

$$x + z, \; z \cdot z, \; x^z, \; |x - z| \text{ (valor absoluto),}$$

$$x!, \; max(x_1, \ldots, x_n), \; min(x_1, \ldots, x_n),$$

cociente de dividir z por x, resto de la división de z por x. (Además todas las funciones mencionadas pueden obtenerse sin necesidad de aplicar el operador μ.)

Se dice que una relación es recursiva si su función característica es recursiva.

13. Números de Gödel

Sea Σ el conjunto de todos los símbolos de S, de modo que $\sigma \in \Sigma$ sólo y cuando σ sea un símbolo de S. Sea Φ el conjunto de todas las expresiones de S, entendiendo por expresión de S una sucesión finita de símbolos de S; de modo que $\varphi \in \Phi$ sólo y cuando φ sea una expresión de S. Sea Ψ el conjunto de sucesiones finitas de expresiones de S, de modo que $\psi \in \Psi$ sólo y cuando ψ sea una sucesión de expresiones de S. Es claro que si φ_1 es una fbh, entonces $\varphi_1 \in \Phi$; y si ψ_1 es una demostración formal entonces $\psi_1 \in \Psi$. Si σ es un símbolo de S es también una expresión formal, y los consideramos como elementos distintos, el uno $\sigma \in \Sigma$, y el otro $\sigma_{(\text{Form})} \in \Phi$; y análogamente una expresión considerada como sucesión de expresiones es distinta de la expresión considerada como tal. Sea finalmente Θ la unión de Σ, Φ, Ψ, o sea $\Theta = \Sigma \cup \Phi \cup \Psi$.

Gödel, por motivos que aparecerán claros más adelante, concibió la idea brillante y fecunda de aritmetizar la metamatemática. Supongamos que se establece metamatemáticamente una relación, por ejemplo $R(\varphi, \psi)$ entre una fbh φ y una demostración formal ψ; aritmetizar la metamatemática implica crear una manera de convertir la relación metamatemática $R(\varphi, \psi)$ en una relación de la teoría de números, es decir, en una relación aritmética, por ejemplo $W(u, v)$, donde u, v son números naturales.

Para ello ideó una función g: $\theta \Theta \in \rightarrow g(\theta) \in \mathcal{N}$; es decir, una función que a cada elemento de Θ le asigna un número natural, y que goce de las siguientes propiedades:

a) Dado $\theta \in \Theta$ hay un algoritmo que permite calcular $g(\theta)$. Si $\theta^* \neq \theta$, entonces $g(\theta^*) \neq g(\theta)$; es decir, que a elementos distintos de Θ corresponden números naturales distintos.

b) Dado $k \in \mathcal{N}$ hay un algoritmo que permite decidir si existe $\theta \in \Theta$ tal que $g(\theta) = k$. Si para k existe tal θ, entonces este algoritmo permite determinarlo (naturalmente no puede existir más de uno).

Hay muchas maneras de definir g, pero para nuestro objeto basta tener en cuenta que satisface las condiciones *a* y *b*. Tal función convierte los elementos de Θ en números naturales y se comprende que haga posible la aritmetización de la metamatemática.

Al número natural $g(\theta)$ se le llama el número de Gödel de θ y así se puede hablar del número de Gödel de una expresión de S, o del de una fbh o del de una demostración formal.

14. Funciones representables y relaciones expresables

Analizando metamatemáticamente la teoría formal S obtendremos relaciones metamatemáticas, que aritmetizadas arrojarán funciones y relaciones de la teoría de números. Interesa ahora saber cuándo y cómo podremos cerrar el ciclo; es decir, pasar de estas funciones y relaciones a fbhs de S, que guarden con las mismas funciones y relaciones estrecha conexión en alguna manera, a saber, cuando se interpretan las fbhs en el modelo estandarizado de S.

La clave para este paso la suministran las funciones y relaciones recursivas. Valen en efecto los siguientes metateoremas:

Una función es representable sólo y cuando es recursiva.

Una relación es expresable sólo y cuando es recursiva.

Me parece sería impropio querer dar aquí siquiera una idea de la demostración de estos metateoremas. Para el interesado nos remitimos a los textos citados u otros, en particular al excelente de E. Mendelson, a quien principalmente seguimos en esta exposición. Lo único que pretendemos es hacer comprensible el teorema (metateorema) de incomplitud de Gödel para la teoría formal S.

El teorema de incomplitud de Gödel

15. La consistencia fuerte

Para enunciar el teorema de incomplitud de Gödel necesitamos la noción de consistencia fuerte (llamada generalmente ω — consistencia) en una teoría formal de primer orden. En realidad, no sería necesario, pues a costa de alargar el razonamiento y de substituir la fbh $\mathscr{W}(x_1, x_2)$ por otra más complicada J. B. Rosser (1936) ha logrado mostrar que se puede conservar el mismo enunciado del teorema de Gödel suponiendo únicamente que S sea simplemente consistente. Pero la noción de consistencia fuerte es metamatemáticamente interesante en sí misma y en conjunto el razonamiento resulta más simple.

Recordemos que una teoría formal de primer orden es consistente si no existe ninguna fbh $\mathscr{A}$ tal, que simultáneamente se tenga $\vdash \mathscr{A}$ y $\vdash \sim \mathscr{A}$; es decir, que tanto $\mathscr{A}$ como $\sim \mathscr{A}$ sean formalmente demostrables. Ahora bien, como $\mathscr{A} \supset (\sim\mathscr{A} \supset \mathscr{B})$ es una tautología, resulta que si existe una fbh para la cual simultáneamente $\vdash \mathscr{A}$ y $\vdash \sim\mathscr{A}$, entonces se tiene también $\vdash \mathscr{B}$ cualquiera que sea la fbh B. Por tanto para demostrar que una teoría de primer orden es consistente basta demostrar que hay una fbh que no es formalmente demostrable.

Observemos que esta noción de consistencia ha sido formulada en conceptos del mismo sistema S. Si interpretamos su contenido en el modelo estandarizado, entonces es claro que la consistencia de S significa que sólo fbhs que interpretadas en el modelo sean verdaderas pueden ser formalmente demostrables en S. La definición de consistencia fuerte que damos a continuación establece también una limitación en la clase de las fbhs que puedan ser formalmente demostrables.

Se dice que una teoría de primer orden que tenga los mismos símbolos que S es fuertemente consistente si se verifica lo siguiente: si $\mathscr{A}(x)$ es una fbh y se tiene para todo numeral $\overline{m}$ que $\vdash \mathscr{A}(\overline{m})$, entonces se tiene que la fbh$(\exists x) \sim \mathscr{A}(x)$ no es formalmente demostrable. Si se admite que la aritmética o interpretación estandarizada es un modelo, entonces es claro que S es fuertemente consistente. También es evidente que si una teoría formal, como la supuesta, es fuertemente consistente, también es consistente (o simplemente consistente como también se dice). En efecto. En particular en S se tiene $\vdash x = \overline{0} + x$, y por tanto para todo numeral $\overline{m}, \vdash \overline{m} = \overline{0} + \overline{n}$; de donde por la consistencia fuerte se deduce que la fbh $(\exists x_1) \sim (x_1 = \overline{0} + x_1)$ no es formalmente demostrable y por tanto S es simplemente consistente.

Como consecuencia del teorema de Gödel es posible prolongar el sistema S por la simple adición de un nuevo axioma, obteniendo una teoría formal de primer orden (con los mismos símbolos que S) que es simplemente consistente y no es fuertemente consistente.

16. Complitud

La noción de complitud es opuesta a la de consistencia. Se dice que una teoría formal de primer orden es completa si para toda fbh que no contenga ninguna variable libre, $\mathscr{A}$, se tiene que $\vdash \mathscr{A}$ o $\vdash \sim\mathscr{A}$; es decir, que una de las dos (o las dos) $\mathscr{A}$ o $\sim\mathscr{A}$ es formalmente demostrable en la teoría.

Concretándonos al sistema formal S esta noción de complitud puede expresarse referida a la propiedad de verdadera en la interpretación estandarizada, en forma enteramente igual a lo dicho al tratar de la noción de consistencia. O sea, que la teoría formal S será completa si toda fbh que no contenga ninguna variable libre y que sea verdadera en la interpretación estandarizada es formalmente demostrable en S.

En la noción de complitud de S se limitan las fbhs que no sean formalmente demostrables, mientras que en la noción de consistencia se limitaban las formalmente demostrables. Si en una teoría formal de primer orden se quita un axioma, si antes era consistente lo será después *a fortiori*, mientras que si antes era completa podrá ser que deje de serlo; si se le añade un axioma, entonces si antes era consistente podrá ser que después de añadido el axioma deje de serlo, mientras que si era completa, después lo será *a fortiori*.

Es claro que Hilbert esperaba que se podría construir un sistema formal que formalizara la aritmética, como el S, que fuera simultáneamente consistente y completo; y estimaba que ello constituiría una suficiente fundamentación absoluta de la incontrovertible verdad de los métodos y teoremas de la aritmética. El teorema de incomplitud de Gödel implica que S no es simultáneamente consistente y completo, y hace que la pretensión de Hilbert sea muy probablemente imposible, y caso de que fuera posible ha de ser extraordinariamente difícil demostrarlo.

17. Construcción de una fbh indecidible

Consideremos ahora la relación $W(u, v)$ que tiene lugar, o sea, es verdadera cuando u es el número de Gödel de una fbh $\mathscr{A}(x_1)$ de S, que contiene la variable x_1 libre, y v es el número de Gödel de una demostración formal de $\mathscr{A}(\overline{u})$. Por consiguiente, la relación $W(u, v)$ es el subconjunto de $\mathscr{N}^2$ formado por los pares ordenados de números naturales (u,v), tales que el primer u sea el número de Gödel de una fbh $\mathscr{A}(x_1)$ que contenga una variable libre x_1 y el segundo v sea el número de Gödel de una demostración formal de $\mathscr{A}(\overline{u})$ en S. Gödel consiguió demostrar, creando la notable función β que lleva su nombre,

$$\beta : (x, y, z) \in \mathscr{N}^3 \to \beta(x, y, z) \in \mathscr{N},$$

donde $\beta(x, y, z)$ es el resto de la división de $1 + y(z + 1)$ por x, que la relación $W(u, v)$ es recursiva y por tanto expresable en S mediante una fbh $\mathscr{W}(x_1, x_2)$ con dos variables x_1, x_2 libres; de modo que si *W(k, m)* es verdadera entonces $\vdash \mathscr{W}(\bar{k}, \bar{m})$ y si *W(k, m)* es falsa entonces $\vdash \sim \mathscr{W}(\bar{k}, \bar{m})$.

Consideremos ahora la fbh

$$(\forall x_2) \sim \mathscr{W}(x_1, x_2) \qquad [*]$$

de la teoría S, que contiene una variable libre x_1. Sea *k* el número de Gödel de [*] y consideremos también la fbh

$$(\forall x_2) \sim \mathscr{W}(\bar{k}, x_2) \qquad [**]$$

de la teoría S, la cual no contiene ninguna variable libre.

El teorema de Gödel implica que la fbh [**] es indecidible, si se supone que S es fuertemente consistente. Aquí indecidible significa que ni [**] ni $\sim$ [**] son formalmente demostrables. En general, se dice que una teoría formal es decidible si existe un algoritmo o procedimiento mecánico que permita averiguar si una fbh cualquiera de la teoría es formalmente demostrable o no.

Obsérvese que en S, por ejemplo, es claro que dada una expresión formal es posible decidir si la expresión es una fbh o no, pues la expresión misma contiene toda la información que necesitamos para comprobar paso a paso si la expresión es una fbh o no. Pero dada una fbh, es muy distinto poder decidir si existe o no una demostración formal de la misma; pues carecemos de información inmediatamente disponible de las fbhs que constituyen los pasos de la demostración formal y ni siquiera sabemos lo larga que pueda resultar.

Se demuestra que el cálculo proposicional es decidible. Para ello se emplea una interpretación en un dominio con dos elementos o lo que es equivalente se emplean tablas de verdad. Si del sistema S se quita la función · (producto) y los axiomas propios 7 y 8 se obtiene un sistema que resulta decidible. Pero una de las implicaciones del teorema de Gödel es que S no es decidible.

18. Relación con las paradojas

La fbh [**] de la teoría S presenta cierta circularidad. Parte de la fbh [**] es la fbh $\mathscr{W}(\bar{k}, x_2)$ que contiene una variable libre x_2, o también la fbh $\sim \mathscr{W}(\bar{k}, x_2)$. En virtud de la numeración de Gödel estas fórmulas pueden considerarse equivalentes a conjuntos finitos de números y por consiguiente al estudiarlas metamatemáticamente lo hacemos siguiendo el método de la aritmética elemental. Pero del estudio metamatemático resulta que si m fuera el número de Gödel de una demostración formal de [**] entonces *W(k, m)* sería verdadero en nuestra metamatemática. Pero precisamente porque el método metamatemático es igual al de la aritmética, resulta que *W(k, m)* sería también una fórmula aritmética verdadera y además equivalente a una relación expresable en S. Por tanto se tendría que $\vdash \mathscr{W}(\bar{k}, \bar{m})$.

De modo que partiendo de S con la fbh [**] pasamos a la metamatemática, pero en virtud de la aritmetización de ésta realizada por la numeración de Gödel, nos encontramos en realidad en la aritmética y de ésta a través de la interpretación estandarizada volvemos a parar a S. Con lo cual se concibe la posibilidad de que la fbh [**] contenga ímplicitamente alguna afirmación (metamatemática) sobre sí misma.

Esta circularidad connota sin duda las circularidades que hemos visto en las paradojas semánticas.

En particular hay un parecido que llama la atención entre la fbh [**] y la expresión o sentencia de Richard en la paradoja del mismo nombre. Este parecido no es meramente casual. En realidad, el teorema de Gödel al escapar a la paradoja, aunque rozándola muy de cerca, parece nos muestra también cuál es el «truco» sutil latente en la paradoja de Richard.

Al parecer el paralogismo oculto en la paradoja de Richard está en que se da por supuesto que se puede llegar a saber si una sentencia escrita en buen castellano expresa o no una función de la teoría de números. Pero probablemente no existe ningún algoritmo que permita *decidir* si cualquier sentencia correctamente escrita en castellano expresa o no una función. Consiguientemente no se puede formar la lista y desaparece la paradoja.

19. El teorema de incomplitud de Gödel

Disponemos ya de todas las nociones para poder enunciar el teorema de Gödel e incluso para dar su simple demostración después de los resultados que preceden.

Teorema de incomplitud de Gödel (1931):

I. *Si S es consistente, entonces la fbh* [**] *no es formalmente demostrable en S.*

II. *Si S es fuertemente consistente, entonces la fbh* $\sim$ [**] *no es formalmente demostrable en S.*

Según lo expuesto en los dos párrafos precedentes resulta inmediatamente de este teorema que la fbh [**] es indecidible en S; asimismo que S es incompleto, de donde el nombre dado al teorema.

Demostración de I. Supongamos que [**] fuera formalmente demostrable, o sea que

(1) $$\vdash (\forall x_2) \sim \mathscr{W}(\overline{k}, x_2).$$

Sea m el número de Gödel de esta demostración. Entonces, mediante el axioma lógico (4), apartado 4, y aplicando el *modus ponens* (o sea, haciendo $x_2 = \overline{m}$ y sustituyendo) de la (1) se deduce

(2) $$\vdash \sim\mathscr{W}(\overline{k}, \overline{m}).$$

Por otra parte, si m es el número de Gödel de una demostración de [**], entonces la relación $W(k, m)$ es verdadera y por tanto

(3) $$\vdash \mathscr{W}(\overline{k}, \overline{m}).$$

Por tanto, si (1), entonces (2) y (3), o sea, que S no es consistente. Puesto que por hipótesis S es consistente resulta que (1) es imposible, como queríamos demostrar en esta primera parte.

Antes de demostrar la segunda parte, examinemos más de cerca la fbh [**], que es en verdad notable. Puesto que [**] no contiene ninguna variable libre, su interpretación en el modelo estandarizado es una proposición aritmética,

(4) $$(\forall v) \sim W(k, v),$$

que tiene perfecto sentido y necesariamente ha de ser verdadera o falsa. En (4), k es el número de Gödel de la fbh [*] y v es una variable o sea un número natural arbitrario.

Naturalmente, si se tiene (1), es decir, si existe una demostración formal de [**], entonces (4) sería verdadera. Pero si no se tiene (1), es decir, si no existe ninguna demostración formal de [**], entonces, cualquiera que sea el número natural v se tiene que $\sim W(k, v)$ es siempre verdadera, en virtud de la definición misma de la relación $W(u, v)$, apartado 17, y por tanto (4) es también verdadera. O sea, que en todo caso (4) ha de ser verdadera.

Ahora bien, aunque (4) sea verdadera, si S es consistente, la fbh [**] ha de ser formalmente indemostrable, pues si se tuviera (1) acabamos de demostrar que S sería inconsistente. Se puede resumir diciendo que la fbh [**] expresa su propia indemostrabilidad formal. Para el que considera [**] con detenimiento, [**] expresa que (4) es siempre verdadera; pero que si S es consistente, entonces [**] es indemostrable. No deja de ser notable que en el sistema formal S (supuesto consistente) una fbh sea indecidible y no obstante sepamos que su interpretación en el modelo estandarizado sea ciertamente verdadera.

Demostración de II. Puesto que [**] no es formalmente demostrable en S, supuesto consistente, cabe preguntarse si acaso $\sim$ [**] será formalmente demostrable en S. Pues, en general, para una fbh que no contenga ninguna variable libre, parece que cabría esperar $\vdash$ [**] o bien $\vdash$ $\sim$ [**]. Ahora bien, después de lo dicho, si $\vdash$ $\sim$ [**], este resultado sería en verdad desconcertante. La segunda parte del teorema de Gödel nos asegura que suponiendo S fuertemente consistente podemos demostrar que no se tiene $\vdash\sim$[**].

En efecto. Si S es fuertemente consistente es también consistente (apartado 15), y por tanto, en virtud de la primera parte, no existe ninguna demostración formal de [**]. Ahora bien, puesto que $W(k, v)$ es verdadera sólo cuando v sea el número de Gödel de una demostración formal de [**], si ésta no existe, resulta que $W(k, v)$ es siempre falsa cualquiera que sea el número natural v. Pero la relación $W(u, v)$ es expresable; por tanto, haciendo $v = 0$, $v = 1$, $v = 2$, etc., se tiene

$$\vdash\sim\mathscr{W}(\overline{k}, \overline{0}),\ \vdash\sim\mathscr{W}(\overline{k}, \overline{1}),\ \vdash\sim\mathscr{W}(\overline{k}, \overline{2}), \text{ etc.}$$

De donde, teniendo en cuenta la hipótesis de la consistencia fuerte de S, se obtiene que no existe una demostración formal de $(\exists x_2)\mathscr{W}(\overline{k}, x_2)$, o lo que es lo mismo no existe una demostración formal de $\sim (\forall x_2) \sim\mathscr{W}(\overline{k}, x_2)$, como queríamos demostrar.

20. Prolongaciones del sistema S

La incomplitud demostrada por el teorema de Gödel no es fácil de remediar. Damos a continuación unas consecuencias inmediatas e importantes del teorema demostrado en el párrafo anterior.

Puesto que la fbh [**] es indecidible en S, supuesta la consistencia, cabe prolongar el sistema S añadiéndole un nuevo axioma propio, a saber, el [**] o el $\sim$ [**]. Sean S* y $\tilde{S}$ los sistemas formales resultantes respectivamente. Si S es consistente, entonces S* y $\tilde{S}$ serán también consistentes y claro que cada uno será más completo que S.

En el sistema formal $\tilde{S}$, es claro que la interpretación estandarizada dejará de ser un modelo, pues en esta interpretación la fbh $\sim$ [**] es falsa. Puede verse fácilmente que $\tilde{S}$ no es fuertemente consistente, a pesar de que será consistente si S lo es.

Más interesante es considerar S*. Si la interpretación estandarizada es un modelo de S, como en general se cree y admite, entonces lo seguirá siendo para S*, sin que se pierda nada de consistencia. Sencillamente el nuevo sistema S*, que naturalmente sigue siendo una teoría formal de primer orden con los mismos símbolos y las mismas fbhs que S, es más potente que el anterior en orden a formalizar la teoría aritmética de números. Hay ahora, en efecto, teoremas formales de S* que en S eran fbhs que no podían ser formalmente demostradas.

Naturalmente surge la sospecha de que S es incompleto porque le falta precisamente el axioma [**], y que por tanto S* será completo. Pero resulta que todos los pasos que son necesarios para llegar al teorema de incompleción de Gödel tienen validez también en S*. En particular se puede construir también la relación $W^*(u, v)$ con el mismo sentido que la $W(u, v)$ del apartado 17; la cual es también expresable en S* y da lugar a la fbh

$$(\forall x_2) \sim \mathscr{W}^*(\bar{h}, x_2).$$

A ésta se le puede aplicar el teorema de Gödel y resulta indecidible y por tanto S* es también incompleto. Naturalmente $\mathscr{W}^*(x_1, x_2)$ es distinta de $\mathscr{W}(x_1, x_2)$, y $\bar{h}$ es un numeral distinto del $\bar{k}$ de [**].

Cualquier número finito de veces que se reitere el proceso de compleción, se obtienen cada vez nuevos sistemas formales S**, S***, etc., a los que el teorema de Gödel es siempre aplicable, y por tanto los sistemas obtenidos son siempre incompletos. Esto no hace sino acentuar la radicalidad de la incomplitud del sistema formal S.

21. Indemostrabilidad de la consistencia

Así como la fbh [**] expresa su propia indemostrabilidad formal (supuesta la consistencia de S), de una manera análoga es posible construir una fbh que exprese la consistencia del sistema S. Sea por ejemplo la fbh $\mathscr{C}$.

Entonces, por el razonamiento hecho en la demostración del teorema de Gödel resulta que

$$\vdash \mathscr{C} \supset [**],$$

es decir, que si fuera $\vdash \mathscr{C}$, también sería $\vdash$ [**]. Ahora bien, puesto que si fuera $\vdash \mathscr{C}$ el sistema S sería consistente y en este caso sería $\vdash$ [**] y $\vdash \sim$ [**] y por tanto el sistema no sería consistente, resulta que no puede ser $\vdash \mathscr{C}$. Por consiguiente, la fbh $\mathscr{C}$ no puede ser formalmente demostrable en S, caso de que S sea efectivamente consistente. La fbh $\mathscr{C}$, igual que la [**] es indecidible, si el sistema es consistente.

El sentido (metamatemático) de esta demostración es el siguiente: si existe una demostración metamatemática, por tanto finitaria, de la consistencia del sistema S, entonces esta demostración no puede ser formalizada en el sistema S. Es decir, si S es consistente, toda fbh $\mathscr{C}$ que exprese esta consistencia es formalmente indemostrable.

Finalmente hagamos algunas observaciones.

El teorema de Gödel se ha generalizado en diversas direcciones y en general la lógica matemática está actualmente en un período de desarrollo extraordinario.

Desde el punto de vista de los fundamentos de la matemática la importancia del teorema es evidentemente extraordinaria y esencialmente significa que hay que renunciar al optimismo que había manifestado Hilbert en un principio. Con todo no queda aún excluida la posibilidad de encontrar una demostración metamatemática, es decir, finitaria, de la consistencia de la aritmética; lo único que queda excluido es que esta demostración, si se encuentra, pueda ser formalizada en el sistema S o en otro análogo. Pero puede ser que empleando métodos más fuertes que los formalizados en S se halle tal demostración; aunque haya de ser sin llegar a emplear aquellos otros métodos matemáticos, que se pretenda justificar precisamente mediante la demostración de la consistencia.

También parece obvio que el teorema de Gödel supone cierta limitación del poder deductivo de la lógica. Algo así como el principio de indeterminación de Heisenberg en mecánica cuántica, pero aquí, al parecer en el plano mucho más abstracto y profundo de la matemática o lógica pura.

Por otra parte, al considerar la fbh formalmente indecidible [**], resulta que en su sentido o interpretación aritmética *sabemos* que es verdadera, o sea, que la cuestión de conocerla está decidida. Esta superioridad de los métodos aritméticos sobre los del sistema S parece que puede interpretarse de varios modos. El más simple parece ser sospechar, como ya hemos insinuado en el apartado 10, que los métodos de la teoría de números analítica no pueden ser todos formalizados en S, sin que ello implique que sean métodos radicalmente distintos que no puedan ser formalizados por ejemplo en ninguna teoría de primer orden; más bien parece que el poder formalizar toda la teoría de números, incluso analítica, es cuestión de emplear un sistema con más símbolos o con más axiomas que S, y quizás a costa de renunciar al carácter finitario.

A veces parece que se interpreta el hecho de que sepamos que la interpretación de la fbh [**] es verdadera, a pesar de ser indemostrable en S, como si la inteligencia humana y consiguientemente la capacidad del cerebro humano estuvieran por encima de todo lo que puedan dar de sí los calculadores artificiales; pues se admite la identificación de las funciones computables por un computador con las funciones recursivas y éstas son precisamente las representables en S. Se concluye, entonces, que el hombre en su función cognoscitiva o intelectiva no puede ser ni siquiera en teoría totalmente sustituido por máquinas o robots. Todo esto, parece que de momento es en efecto así. Con todo, esta manera de razonar parece que deja harto que desear. Por un lado la verdad de la interpretación de la fbh [**] sea quizás empírica, pues está basada en la consistencia de la aritmética; por otro lado el cerebro humano funciona estadística y quizá también analógicamente y puede ser que sus funciones no sean totalmente reducibles a las de un computador dígito, tal como el idealizado por A. M. Turing (1936).

Todavía parecen más oscuras las relaciones que pueda haber entre el teorema de incomplitud de Gödel y la filosofía de las matemáticas en orden a su fundamentación.

Alejandro Garciadiego D.

Bibliografía

1 BECKER, O., cfr. [1], Bibl. primera parte, cap. 2.

2 BENACERRAF, P., y PUTNAM, H., cfr. [3], Bibl. primera parte, cap. 1.

3 BOURBAKI, N., *Eléments de Mathématique.* Livre I: *Théorie des Ensembles.* París. Hermann, 1960.

4 CURRY, H. B., *Outlines of a formalist Philosophy of Mathematics.* Colección «Studies in Logic». Amsterdam. North-Holland Publishing Company, 1951.

4 bis DOU, A., «El teorema de incomplitud de Gödel», *Publicaciones del Seminario matemático García de Galdeano,* núm. 10, Zaragoza, 1969.

5 EVES y NEWSOM, cfr. [3], Bibl. primera parte, cap. 1.

5 bis GÖDEL, K., Ueber formal [...] unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monastshefte für Math. und Physik* 38 (1931), 173-198. También *On undecidable propositions of formal mathematical systems,* apuntes de lecciones dadas en el Institute for Advanced Study, Princeton, tomados por S. C. Kleen y J. B. Rosser. Ambos trabajos han sido editados por M. Davis en la antología *The Undecidable,* Raven Press, Nueva York, 1965.

6 HILBERT, D., *Die Grundlagen der Mathematik.* Discurso en el Seminario matemático de Hamburgo, 1927. Hamburger Mathematische einzelschriften. 5 Helft, 1928.

7 HILBERT, D., cfr. [8], Bibl. primera parte, cap. 2.

8 HILBERT, D., y BERNAYS, P., *Grundlagen der Mathematik.* Berlín. Verlag von Julius Springer, 1934.

9 KLEENE, S. C., cfr. [10], Bibl. primera parte, cap. 3.

10 KNEEBONE, G. T., cfr. [5], Bibli. primera parte, cap. 1.

11 MENDELSON, E., cfr. [5], Bibl. segunda parte, cap. 1.

12 NAGEL, E., y NEWMAN, J. R., *Gödel's Proof.* New York University Press, 1960.

13 SKOLEM, TH., Y OTROS, *Mathematical interpretation of formal systems.* Colección «Studies in Logic». Amsterdam. North-Holland Publishing Company, 1955.

14 WANG, H., cfr. [12], Bibl. primera parte, cap. 3.

15 WHITEHEAD, A. N., y RUSSELL, B., cfr. [8], Bibl. segunda parte, cap. 1.

4

El intuicionismo

La matemática intuicionista

1. Desarrollo histórico

Parece puede decirse que toda la matemática griega y en par-
cular la aritmética es intuicionista. Así lo entendió Dedekind.
ste carácter intuicionista de la matemática griega puede ser la
zón por la que no se plantea siquiera el problema de su funda-
entación.

La matemática y filosofía medieval no modifican esta concep-
ión intuicionista de la matemática. Quizá ello explique la forma
rimitiva en que se plantea el problema del infinito.

Ni siquiera la aparición de las geometrías no euclídeas modi-
ca esta situación. El problema de la consistencia no se plantea
ropiamente, sino más bien el problema de por qué la matemática
esulta adecuada para la interpretación de la naturaleza. La inter-
retación de la matemática, o más en particular de la geometría,
esulta misteriosa o equívoca. La matemática se idealiza aún más.
ero no se plantea el problema de una fundamentación.

La matemática no intuicionista surge cuando Dedekind se
lantea el problema de la continuidad de la recta y para ello intro-
uce por primera vez conjuntos infinitos que se suponen matemá-
camente existentes en concreto y en su totalidad. En el proceso
e aritmetización de la matemática y en particular en la logifica-
ión del número natural introducida por Frege se emplean nuevos
étodos ajenos al intuicionismo matemático. Finalmente Cantor
on su teoría de los números ordinales y cardinales trasfinitos,
ue conducen a las primeras paradojas, plantea con toda su ur-

gencia el problema de la fundamentación. Inmediatamente surge potente y consistente una teoría intuicionista bien estructurada debida al genio de L. E. J. Brouwer (1882). Como precursores y colegas contemporáneos de Brouwer hay que citar a Kronecker, Poincaré, Borel y Weyl.

Parece que fue L. Kronecker (1823-1891) quien arguyó por primera vez contra Dedekind y especialmente contra Cantor, que si los objetos matemáticos que se manejaban no podían ser construidos, entonces el contenido de los teoremas era vacío y sus especulaciones meros castillos en el aire carentes de sentido.

J. H. Poincaré (1905) puso de manifiesto el papel esencial de la intuición del principio matemático de inducción completa en la construcción y fundamentación de la matemática. Respecto de E. Borel y H. Weyl véanse los textos que hemos citado en la primera parte, capítulo 3, apartados 3 y 6 respectivamente. En particular H. Weyl arguyó con buenas razones, en su obra *Das Kontinuum* (1918), y luego en su *Phylosophy of Natural Sciences* (1927 y 1949), que a pesar de la obra de la aritmetización del análisis, éste no podía resistir una seria crítica, pues estaba plagado con tantos círculos viciosos que «cada célula del poderoso organismo estaba infectada por el veneno de la contradicción».

Brouwer es el fundador del intuicionismo. Entre los más precisos y brillantes expositores de éste pueden citarse A. Heyting (1898), S. C. Kleene (1909) y P. Lorenzen (1915). Respecto de la fundamentación filosófica del intuicionismo existe un valioso artículo de David García Vacca (1933). Estos son los autores a los que nos remitimos para una más completa exposición y deducción de la matemática intuicionista. Señalemos finalmente en esa línea que varios importantes párrafos de K. Gödel sobre la fundamentación de la matemática (en su crítica del logicismo y sobre el problema del continuo de Cantor) acusan un notable carácter intuicionista.

2. La construcción mental como objeto de la matemática intuicionista

El principio de construcción, o de constructibilidad, que es el principio básico del intuicionismo matemático afirma que la matemática es el estudio de un cierto tipo —matemático— de construcciones mentales. Una definición perfecta, sin ambigüedad, de qué es lo que constituye una construcción mental como construcción matemática, no se puede dar. Pues la intuición de lo que es esa construcción matemática mental es irreductible a otros conceptos más primitivos. El trabajo del intuicionista consiste en desarrollar esa construcción mental, discutirla, suscitarla en otros, incluso estructurarla y formalizarla lo mejor posible, pero a sabiendas de que todo eso no es más que un proceso de aproximación. La construcción mental matemática es en cuanto tal primigenia; es decir, que no puede ser reducida o fundada en algo matemático anterior, que sea más radical o primitivo.

Más aún, ya que A. Heyting afirma que un teorema matemático expresa un hecho puramente empírico *(purely empirical fact)*; a saber, que se ha conseguido llevar a cabo una cierta construcción mental. Cuando se afirma en matemáticas que $2 + 2 = 3 + 1$, ello debe interpretarse en el sentido de que se han llevado a cabo las construcciones mentales de cada miembro y se ha encontrado que dan el mismo resultado. Continuando según el mismo Heyting, el pensamiento matemático se caracteriza porque se ocupa sólo de la construcción mental y no implica verdad alguna en lo relativo al mundo exterior.

La matemática intuicionista procede por tanto por vía exclusiva y simultáneamente genética y existencial, en cierta manera categórica, empezando precisamente por la construcción —matemática— de los números naturales. Llevada a cabo una construcción matemática, la entidad matemática resultante goza de aquellas propiedades, y no más, que le han sido otorgadas por la construcción matemática.

3. La intuición matemática

Hemos dicho que el objeto del intuicionismo matemático es una construcción mental típica, cuyo origen o comienzo puede ponerse en la construcción de los números naturales. Nos queda por tratar, como segundo elemento fundamental, la intuición matemática misma, cuya actividad, potencia y manera de ser condiciona evidentemente el carácter de las entidades matemáticas construidas. Observemos, de paso, que la descripción y estudio de la construcción mental y de la intuición matemática no forman parte de la matemática intuicionista propiamente, sino que están en un plano prematemático o mejor de filosofía de las matemáticas. Y que la oscuridad o ambigüedad que aquí en este campo filosófico pueda encontrarse no tiene por qué invalidar, y de hecho no afecta la meridiana claridad de la matemática intuicionista propiamente tal.

Brouwer (1912) señala como intuicionismo, que actualmente ha sido casi completamente abandonado según el mismo Brouwer, el apriorismo de las formas de la sensibilidad del espacio y tiempo en Kant. El siglo XIX, especialmente por el descubrimiento de las geometrías no euclídeas, apartó a los matemáticos del apriorismo kantiano. El siguiente párrafo condensa el pensamiento de Brouwer a este respecto.

> Aunque la posición del intuicionismo parecía débil después de este período (siglo XIX) de desarrollo matemático, se ha recuperado abandonando el apriorismo kantiano del espacio, pero adhiriéndose más resueltamente al apriorismo del tiempo. Este neointuicionismo considera el desmembrarse de los momentos vitales en partes cualitativamente distintas —que solamente pueden ser reunidas si han sido previamente separadas por el tiempo— como el hecho primigenio del entendimiento humano; y considera el despojar este desmembramiento de todo contenido sentimental en orden a intuir la simple unidad de dos como hecho primigenio del pensar científico [3].

4. El número natural intuicionista

No es fácil establecer los límites intuicionistas entre la matemática propiamente tal y sus fundamentos más o menos intuitivos y filosóficos. Por lo menos en primera aproximación parece puede decirse que cuando se ha construido la sucesión de los números naturales, lo que como consecuencia de esa construcción se deduzca ha de considerarse como matemática intuicionista propiamente tal. Por el contrario, todo lo que se pueda argüir sobre la construcción misma de la serie de los números naturales 1, 2,... parece debe considerarse como ajeno a la matemática intuicionista propiamente tal.

Es esencial el hecho de que los conceptos mentales abstractos de las entidades —matemáticas— que llamamos uno, dos, tres, etc., y de que forman una sucesión indefinida quede fuera de toda duda como algo claro y bien definido, incluso para estudiantes de bachillerato en el supuesto de que sean seres humanos normales. No obsta a esta claridad y convicción el que sea conveniente o necesario que se explique o sugiera a los niños el hecho de la sucesión indefinida de los números naturales; lo esencial es que el presunto matemático lo vea o mejor lo «intuya». Como ya hemos indicado en el párrafo anterior, el tiempo, o mejor el apriorismo

temporal del ser humano, parece que desempeña un papel absolutamente necesario en la posibilidad intrínseca de esta intuición.

Supuesto adquirido el concepto del número 1 ya hemos visto cómo la intuición matemática primigenia nos lleva a la construcción del número 2, y de una manera sucesiva a la construcción de los números naturales.

Por tanto, en el intuicionismo, los números naturales no se deducen «lógicamente» como en el logicismo ni se postulan existencialmente unos axiomas, como los de Peano o los de la teoría formal de números descrita, sino que se construyen inmediatamente en la mente del matemático y su valor objetivo o su verdad se basa directamente en la evidencia de la intuición. Pero de la misma construcción de los números naturales se deduce inmediatamente, y de una manera intuitivamente evidente, que la sucesión de los números naturales satisface los postulados de Peano, o lo que es lo mismo, de momento, los cuatro primeros axiomas mencionados en el capítulo 3 al describir el sistema S, suponiendo que cambiamos lo que allí hemos llamado 0 por el 1. Análogamente, tampoco ofrece dificultad la ordenación de los números naturales: si en la construcción del número natural n a partir de 1 hemos encontrado m, distinto del n, decimos que m es menor que n, o sea $m < n$.

Un momento de atención merece el teorema de inducción completa. Naturalmente, aquí en la matemática intuicionista se afirma explícitamente que el método de prueba por inducción completa es el contenido de un teorema que ha de ser demostrado directa e intuitivamente; y no el resultado de una especulación lógica o de una convención o postulado o axioma. Ahora bien, esta demostración no ofrece dificultad. En efecto, supongamos que P(n) sea una posible propiedad de los números naturales. Supongamos que el número uno goce de esa propiedad, o sea P(1) es verdadero; además supongamos que si n tiene esa propiedad, se pueda demostrar constructivamente que también el siguiente de n goza de esa propiedad, o sea que P(n) implica P(siguiente de n). Entonces resulta, de una manera constructiva y por un número finito de pasos, que todo número natural, por su propia definición constructiva, goza de la propiedad P. Es decir que el principio de inducción completa es matemáticamente válido en el intuicionismo. Como ha puesto Poincaré de manifiesto [14] y [3] (citado por Brouwer), es imposible, al parecer, escapar a la necesidad de apelar a esa intuición del principio de inducción completa para una correcta fundamentación de la matemática, por lo menos en algún estadio de ella, cualquiera que sea la teoría de fundamentos que se invoque o se siga.

Es fácil comprender que partiendo de esos comienzos se llega a construir una aritmética de los números racionales, que en una interpretación abstracta coincide totalmente con la aritmética clásica o con la del sistema S. Pero las cosas cambian en cuanto se entra en los números reales.

Antes de pasar adelante en la construcción de la matemática intuicionista, en el apartado siguiente, hagamos todavía, siguiendo a Brouwer, una observación interesante desde el punto de vista de la fundamentación de las matemáticas. Por lo dicho hasta aquí, ya resulta claro, que la matemática intuicionista se basa directamente en la evidencia de la intuición, y que el lenguaje, tanto el ordinario como el simbólico, desempeña sólo un papel de instrumento auxiliar y de ninguna manera forma parte del objeto formal o sea de constitutivo esencial de la demostración. «Por esta razón el intuicionista no puede sentirse nunca seguro de la exactitud de una teoría matemática por garantías tales como la demostración de que no es contradictoria, la posibilidad de definir sus conceptos mediante un número finito de palabras, o la certeza práctica de que nunca llevará a una mala inteligencia en las relaciones humanas» [3]. Obsérvese que las tres garantías mencionadas son patrocinadas respectivamente por D. Hilbert con su teoría de la demostración mediante la consistencia y las dos restantes, al parecer, por H. Poincaré y E. Borel.

5. Desarrollo inicial y extensión

No es propio de este lugar dar un desarrollo, ni siquiera elemental, de la matemática intuicionista. Vamos a limitarnos a una brevísima iniciación y a indicaciones generales. Para una introducción breve, pero sustanciosa, nos remitimos al texto de A. Heyting [8], del que tomamos las observaciones que siguen.

La necesidad de sujetarse a definiciones estrictamente constructivas excluye la posibilidad de manejar conjuntos infinitos como globalmente existentes en matemáticas, pues ello supondría una infinidad de construcciones parciales y totalmente acabadas en nuestra mente en un tiempo finito y esto es absurdo. Para el intuicionista existen únicamente conjuntos finitos, el infinito potencial o conjunto de los números naturales y aquellos que mediante una correspondencia biyectiva sean equivalentes (equinumerables) con el conjunto de los números naturales; en resumen, los únicos ordinales intuicionistas son los numerables. Ello excluye las definiciones de número real de Weierstrass, Dedekind y Cantor.

Para llegar al concepto de número real hay que empezar definiendo el concepto de generación numérica de los números reales a partir de los racionales. A estos efectos, se identifica el concepto de *generador numérico real*, o simplemente generador numérico, con el de una sucesión de Cauchy de números racionales. Bien entendido que una sucesión de Cauchy $\{a_n\}$ es aquella en la que, para todo número natural k, *podemos hallar* otro número natural $n = n(k)$ tal que $|a_{n+p} - a_n| < 1/k$ para todo número natural p; es esencial que n(k) pueda ser construido, y no únicamente que exista en algún sentido ajeno a toda construcción matemática.

Se dice que dos generadores numéricos $a \equiv \{a_n\}$ y $b \equiv \{b_n\}$ *coinciden*, y se representa así: $a = b$, si para todo k puede hallarse $n = n(k)$ tal que $|a_{n+p} - b_{n+p}| < 1/k$ para todo p. Si $a = b$ es contradictorio, es decir, si la hipótesis de que a coincide con b lleva a una contradicción, entonces lo representaremos así: $a \neq b$. Un teorema de Brouwer afirma: Si $a \neq b$ es contradictorio, entonces $a = b$. Omitimos la demostración elemental, pero observemos que es necesario darla y referida a esta particular relación, pues en general el que sea contradictorio que una proposición o relación sea contradictoria, no implica necesariamente que esa proposición o relación sea verdadera. A continuación damos un contraejemplo, al que haremos referencia en la sección siguiente, y que también se comprenderá mejor después de este apartado.

Supongamos que definimos la entidad z de la manera siguiente. Sea $z = 0{,}3333\ldots$, donde el número de treses que figura después de la coma lo determinamos así: si en la expresión decimal de π, $\pi = 3{,}14159\ldots$, aparece por primera vez el conjunto consecutivo de cifras 0123456789, de modo que esa última cifra 9 ocupe el lugar k-ésimo en la expresión decimal de π, entonces ese mismo número k sea el número de treses que figuren en z. Si no aparece nunca ese conjunto consecutivo de cifras, entonces el número de treses decimales de z sea infinito. Hoy por hoy nadie sabe si, en efecto, aparece o no tal conjunto consecutivo de cifras en la expresión decimal de π, pero si apareciera entonces podríamos decir que z es un número racional, $z = \dfrac{10^k - 1}{3 \cdot 10^k}$.

Vamos ahora a demostrar que es contradictorio el que sea contradictorio que z sea un número racional. En efecto, supongamos que sea absurdo el que z sea racional. Entonces no puede aparecer el conjunto de cifras 0123456789 en la expresión de π, pues si apareciera z sería racional y no podría ser absurdo que z fuera racional; pero si no aparece ese conjunto de cifras en π entonces $z = 0{,}3333\ldots = 1/3$ que es también racional contradiciendo el supuesto. Luego llegamos a una contradicción y hemos demostrado que es contradictorio el que sea absurdo que z sea racional.

Pero es claro que el absurdo del absurdo de que z sea racional no demuestra en el intuicionismo que z sea racional. Pues z no está completamente construido y por tanto no puede ser admitido como un número racional intuicionista. El generador numérico real z no está completamente construido como número racional porque no podemos hallar p y q enteros tales que se tenga $z = p/q$. Este resultado choca necesariamente a la mente del matemático clásico o profesional que arguye así: o bien «existe» k y entonces $z = (10^k - 1)/3 \cdot 10^k$, o bien no «existe» k y entonces $z = 1/3$. En todo caso z es racional, por tanto a pesar de que no podamos determinadamente construir z, sabemos lo suficiente para poder decir que z es un número racional. El matemático intuicionista a su vez argüirá contra el clásico, que en su explicación la palabra «existe» no tiene un sentido suficientemente claro para que pueda ser válido y admitido en matemáticas.

Ya se comprende a través de esas leves indicaciones que la definición de número real es algo más laboriosa en el intuicionismo que en la matemática clásica. En particular, para llegar a la noción de número real hay que elaborar previamente una teoría de conjuntos. Esto se hace en el intuicionismo matemático introduciendo las nociones de despliegue (*spreiding* en holandés, *spread* en inglés y *déploiement* en francés) y de especies; pero la explicación de esas nociones nos llevaría demasiado lejos.

En el texto de Heyting [8] pueden verse desarrollados, a manera de introducción, la aritmética de los números reales con el importante teorema del abanico, el álgebra, la geometría y topología del plano y la teoría de la medida e integración. En todos estos capítulos resulta patente que los teoremas y demostraciones de la matemática clásica sirven de faro y suministran apreciables contribuciones heurísticas a la matemática intuicionista. Desgraciadamente resulta con frecuencia que no es posible demostrar en el intuicionismo un teorema equivalente o análogo al que es válido en matemática clásica, y ello incluso en teoremas fundamentales como el de Bolzano-Weierstrass relativo a la existencia de un punto de acumulación en todo conjunto acotado de números reales.

No se crea, empero, que la matemática intuicionista haya de ser una mera aproximación por defecto de la matemática clásica. Como si lo más a que pudiera aspirar el intuicionismo fuera confirmar y demostrar, fuera de toda duda, el mayor número posible de teoremas clásicos. Los conceptos de la matemática intuicionista son simplemente distintos de los de la matemática clásica; precisamente porque el método es más exigente, su contenido es más rico, y por consiguiente puede darse el caso de que sean válidos intuicionísticamente teoremas cuyo enunciado tomado en el sentido de la matemática clásica sería falso. Un ejemplo notable, debido a Brouwer, es que intuicionísticamente «una función, que a todo número real no negativo ni mayor que la unidad le hace corresponder un número real, es necesariamente uniformemente continua». O sea, que en el intuicionismo no existen funciones reales discontinuas definidas en todo un intervalo cerrado del continuo real.

La lógica intuicionista

6. Los conectivos intuicionistas

Vamos a limitarnos en esta sección a dar una idea del cálculo proposicional intuicionista. Para una exposición más extensa nos remitimos al texto de Heyting y a los de S. C. Kleene que citamos en la bibliografía.

La formalización de la lógica intuicionista llevada a cabo por Heyting, y que substancialmente es la misma que emplea Kleene, introduce en el cálculo proposicional los cuatro conectivos de copulación o conjunción, $\wedge$, de disyunción, $\vee$, de implicación, $\supset$, y de negación, $\sim$.

Aunque los símbolos que empleamos para representar los cuatro conectivos fundamentales sean los mismos que los empleados en el cálculo proposicional clásico, su significado es distinto. He aquí, como ejemplo, un resultado que hace patente esta distinción. En el cálculo proposicional clásico los cuatro conectivos pueden expresarse en función de dos, uno de los cuales sea $\sim$ y el otro uno cualquiera de los otros tres; e incluso esos dos pueden expresarse en función del único conectivo llamado trazo de Sheffer. Pues bien, los cuatro conectivos del cálculo proposicional intuicionista son independientes, en el sentido de que es imposible establecer una equivalencia entre uno cualquiera y una fórmula que contenga únicamente los otros tres.

Aclaremos brevemente antes de pasar adelante, que en el cálculo proposicional intuicionista los símbolos son los mismos (aunque los conectivos tengan distinto significado como explicaremos a continuación) que en el clásico; a saber, los conectivos, los paréntesis y un conjunto infinito numerable de letras enunciativas $A_1, A_2, \ldots$, que son interpretadas en el modelo estandarizado como proposiciones o enunciados. Asimismo coinciden en ambos sistemas formales intuicionista y clásico las reglas de formación de fbhs (fórmulas bien hechas). En cambio son distintas naturalmente las listas de axiomas, pues éstos son los que dan el significado de los conectivos. Coincide también en ambos sistemas la única regla de inferencia o *modus ponens;* por tanto coinciden también las nociones de inferencia, demostración formal, de teorema y el empleo del signo $\vdash$ de demostrabilidad formal, todo de una manera paralela a como ha sido explicado en los apartados 2, 4 y 5 del capítulo 3.

La interpretación de los signos de conjunción $\wedge$ y de disyunción $\vee$ no ofrece dificultad, aunque conviene tener siempre presente que toda proposición de matemática intuicionista incluye, aunque en general se sobreentiende implícitamente, que se ha llevado a cabo cierta construcción mental de tipo matemático. Así, si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son fbhs, entonces $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ es verdadero en la interpretación sólo y cuando $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ sean ambas verdaderas; y $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ es verdadera sólo y cuando $\mathscr{A}$ o $\mathscr{B}$ sea verdadera. La validez de esa formalización mediante $\wedge$ y $\vee$ es evidente si se considera que de la construcción o demostración de $\mathscr{A}$ y de la de $\mathscr{B}$ resulta inmediata la construcción de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$; y análogamente para la dinyunción.

La interpretación del símbolo $\supset$ de implicación es la siguiente. Si $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son fbhs, entonces $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$ será verdadera en la interpretación intuicionista sólo y cuando podamos dar una demostración constructiva de la fbh $\mathscr{B}$ en la hipótesis de que tengamos una demostración constructiva de la fbh $\mathscr{A}$.

De las definiciones dadas de $\wedge$, $\vee$, $\supset$, resulta que, si $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ son fbhs, son siempre válidas por ejemplo las fbhs $(\mathscr{A} \supset \mathscr{B}) \supset ((\mathscr{A} \supset (\mathscr{B} \supset \mathscr{C})) (\mathscr{A} \supset \mathscr{C}))$, $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \supset \mathscr{A}$, $\mathscr{A} \supset \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$, $\mathscr{A} \supset (\mathscr{B} \supset \mathscr{A})$; de hecho estos cuatro esquemas de fbhs son tomados como axiomas, como puede verse en el apartado 10. Por el contrario, aunque clásicamente es siempre válida la fbh $(\mathscr{A} \supset \sim \mathscr{B}) \supset (\mathscr{B} \supset \mathscr{A})$, no tiene por qué serlo intuicionísticamente. Una interpretación más precisa del significado de $\wedge$, $\vee$, $\supset$ viene dada por los ocho primeros axiomas del apartado 10.

7. La negación intuicionista

Ya hemos indicado, apartado 2, que un teorema determinado de matemática intuicionista asevera que se ha llevado a cabo una determinada construcción mental matemática. Ahora bien, una proposición matemática intuicionista $\mathscr{A}$, no tiene por qué ser necesariamente un teorema; $\mathscr{A}$ tiene que contener o hacer referencia a una construcción mental, si la proposición ha de tener sentido; pero puede ser que no se afirme la construcción mental referida, sino que solamente se la connote sin afirmarla y naturalmente sin excluir tampoco su posible afirmación. Si de hecho se efectúa la construcción mental contenida en la proposición $\mathscr{A}$, entonces esta construcción constituye una demostración de $\mathscr{A}$, lo que representamos así: $\vdash \mathscr{A}$, y ello equivale a decir que $\mathscr{A}$ ha sido demostrado intuicionísticamente y consiguientemente $\mathscr{A}$ es un teorema.

Preguntémonos ahora por el significado del conectivo intuicionista $\sim$. Concretamente, preguntemos qué pueda significar $\sim \mathscr{A}$. Tengamos presente que $\sim \mathscr{A}$, al igual que $\mathscr{A}$, es también una proposición intuicionista y por tanto ha de connotar una construcción. Para poner más claramente de manifiesto esta construcción connotada, supongamos que afirmamos $\sim \mathscr{A}$, de modo que tenemos $\vdash \sim \mathscr{A}$. Entonces, por definición, el significado de esta *afirmación* es que partiendo de la hipótesis de una construcción mental matemática de $\mathscr{A}$, podemos llevar a cabo una construcción que nos lleva a una contradicción. Es claro, por tanto, que una demostración de $\sim \mathscr{A}$ implica que la hipótesis $\mathscr{A}$, es decir, la hipótesis de una construcción de $\mathscr{A}$, es absurda.

Sea $\mathscr{A}$ la proposición «el generador numérico real z es un número racional», siendo z el definido en el apartado 5. Según hemos visto, no podemos afirmar $\mathscr{A}$; pero tampoco podemos afirmar $\sim \mathscr{A}$. Más aún, $\sim \mathscr{A}$ es absurdo, puesto que tenemos $\vdash \sim\sim \mathscr{A}$. Con este ejemplo resulta claro que es importante ser precisos en el manejo de la negación intuicionista. La frase «z no es racional», no debe considerarse como una proposición matemática intuicionista, pues no está suficientemente claro cuál sea la construcción connotada. En cambio son proposiciones las frases «es imposible o es absurdo o no puede ser que z sea racional», y cualquiera de las tres equivale a $\sim \mathscr{A}$. De esta proposición podemos afirmar que es falsa, o que es absurda o que afirmamos su negación $\vdash \sim\sim \mathscr{A}$, de acuerdo con lo demostrado en el apartado 5.

8. El principio de contradicción

Hemos indicado ya en el apartado 2 que los conceptos del intuicionismo no pueden ser totalmente claros y limpios de manera que podamos estar totalmente ciertos de que no pueden surgir dudas acerca del concepto mismo. Un buen ejemplo es precisamente el concepto de negación y el papel que en él desempeña el principio de contradicción. Es probablemente el ejemplo más sencillo de noción, que a causa de diversas interpretaciones, ha provocado escisiones en la teoría intuicionista, o si se prefiere ha dado lugar a diversas clases de matemática intuicionista, a pesar de que todos coincidan en el principio de construcción y en el papel de la intuición.

Veamos estas diversas interpretaciones, aunque tenga que ser muy brevemente.

El intuicionismo de Heyting entiende los conectivos $\supset$, $\sim$ de manera que admite el siguiente axioma $\vdash \sim \mathscr{A} \supset (\mathscr{A} \supset \mathscr{B})$, con tal que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ sean fbhs. Este axioma, el décimo del apartado 10, significa que se admite lo siguiente: si se construye una construcción de $\mathscr{A}$ y se construye una contradicción partiendo de una construcción de $\mathscr{A}$, entonces se sigue que cualquier proposición es formalmente demostrable, o sea construible. Equivale al antiguo dicto: *Ex absurdo sequitur quodlibet:* de un absurdo se sigue cualquier cosa.

Es claro que este axioma X es un tanto arbitrario, pues evidentemente da un mayor contenido al significado de $\supset$ del que le habíamos dado hasta ahora, e indirectamente hace también mucho más claro el significado de $\sim$. En efecto, en la interpretación que hemos dado de $\sim$, no quedaba demasiado claro el sentido de las palabras: «podemos llevar a cabo una construcción que nos lleva a una contradicción». Pues, cómo se verifica, sobre todo si hay que verificarlo constructivamente, que se ha llegado a una contradicción. ¿Cuál es el valor del principio de contradicción en el intuicionismo? Ahora bien, si se admite el axioma X, entonces es claro que toda contradicción $\mathscr{A}$ y $\sim \mathscr{A}$ se pueden interpretar como una demostración de $1 = 2$, lo que da un significado más claro y más fuerte a la frase «lleva a una contradicción».

Se comprende que haya surgido un intuicionismo más estricto, debido a I. Johansson (1936), que rechaza el axioma X.

Pero hay más, pues se han levantado objeciones a la noción misma de contradicción y empleo de cualquier forma del principio de contradicción, por no responder de una manera estricta al principio de construcción, que es la pieza fundamental del intuicionismo. En efecto. Supongamos que se tiene $\vdash \sim \mathscr{A}$; entonces hemos de admitir que $\mathscr{A}$ tiene sentido, de acuerdo con la definición que hemos dado de proposición intuicionista. Pero de $\vdash \sim \mathscr{A}$ se deduce que $\mathscr{A}$ es absurdo, y por tanto, que $\mathscr{A}$ no puede ser construido, luego carece de sentido en un intuicionismo que sea muy estricto. Así ha surgido, principalmente por obra de G. F. C. Griss (1946), un intuicionismo que no admite el empleo de la negación ni el uso del conectivo $\sim$. Esta matemática intuicionista sin negaciones ha sido estudiada y desarrollada por varios autores. Obsérvese, en particular, que, según se desprende de lo dicho, en esa matemática sin negaciones o mejor en cualquier formalización de ella, el conjunto de proposiciones con sentido o fbhs ha de identificarse necesariamente con el conjunto de teoremas. En efecto, sólo la construcción de la fbh $\mathscr{A}$ da sentido a $\mathscr{A}$, pero precisamente esa construcción hace que tengamos $\vdash \mathscr{A}$.

9. El principio del tercio excluso

El principio del tercio excluso suele enunciarse en la forma siguiente: si $\mathscr{A}$ es una proposición que tiene sentido, entonces o bien $\mathscr{A}$ es verdadero o bien no-$\mathscr{A}$ es verdadero. Parece, pues, que en orden a aplicar este principio hay que establecer previamente cuál es el universo de las proposiciones que tienen sentido. En filosofía, donde este principio tiene su principal aplicación, el universo que se considera es el del ser, cuya definición precisa no es fácil. Pero si se supone este universo bien definido, entonces la proposición $\mathscr{A}$ toma la forma «P es», donde P es un predicado bien definido. El principio del tercio excluso toma la forma «O bien P es o bien P no es».

En matemática clásica, es decir, en el universo de las proposiciones que tienen sentido matemático clásicamente hablando, se admite también la validez del principio del tercio excluso. En efecto, si $\mathscr{A}$ es una proposición que tiene sentido en matemática clásica, entonces o bien $\mathscr{A}$ es verdadero, o bien $\mathscr{A}$ es falso, que es lo mismo que decir que no-$\mathscr{A}$ es verdadero.

Ahora bien, por lo que ya llevamos dicho es claro que tal principio no puede aplicarse en la matemática intuicionista. Hemos visto, en efecto, que la proposición $\mathscr{A} \equiv$ «El generador numérico real z es un número racional» no puede afirmarse, y tampoco puede afirmarse la proposición «es absurdo que z sea número racional». Pero este resultado no contradice el principio filosófico del tercio excluso. En efecto, el sentido de $\mathscr{A}$ es que se connota una construcción mental matemática que identificase z con el cociente p/q y la afirmación de $\mathscr{A}$ equivaldría a la afirmación de que podemos llevar a cabo esta construcción, lo cual en efecto no podemos, y por tanto no podemos afirmar $\mathscr{A}$. Hemos demostrado que la proposición «$\mathscr{A}$ es absurdo» es absurda, pero el sentido de «$\mathscr{A}$ es absurdo» contiene otra construcción mental. Mientras que la mera negación filosófica de $\mathscr{A}$, a saber no-$\mathscr{A}$, asevera únicamente que *no* podemos llevar a cabo la construcción matemática connotada por $\mathscr{A}$, y esta aseveración es verdadera. Resulta, pues, sencillamente que, supuesta la proposición matemática $\mathscr{A}$ (que no es verdadera), hay que distinguir entre la proposición también matemática «$\mathscr{A}$ es absurdo» que es absurda, y la proposición no-$\mathscr{A}$, que no debe considerarse como proposición matemática, pero que puede interpretarse filosóficamente y en esta interpretación es verdadera.

En el ejemplo que acabamos de describir se tiene no-$\vdash \mathscr{A}$ y no-$\vdash \sim \mathscr{A}$, pero se tiene $\vdash \sim\sim \mathscr{A}$. Se dice que dos números naturales son primos gemelos cuando ambos son primos y su diferencia es dos; o sea, cuando son dos impares consecutivos primos. No se sabe hoy si la sucesión de primos gemelos es finita o infinita. Consideremos la proposición $\mathscr{B} \equiv$. «La sucesión creciente de primos gemelos es finita». Es claro que se tiene no-$\vdash \mathscr{B}$, no-$\vdash \sim \mathscr{B}$, no-$\vdash \sim\sim \mathscr{B}$. Obsérvese que en todo ejemplo de no aplicabilidad del principio del tercio excluso tiene que intervenir un conjunto infinito. En el caso de la proposición $\mathscr{A}$ este conjunto infinito es el de cifras decimales de z. Para mayor claridad y por su sencillez vamos a exponer un ejemplo que da Heyting [8].

Consideremos la proposición $\mathscr{D} \equiv$ «sea q el mayor número primo tal que q-2 sea también primo; y si la sucesión de primos gemelos es infinita, entonces sea $q = 1$». Hagamos la hipótesis de que sea verdadera en el intuicionismo la proposición $\mathscr{E} \equiv$ «la sucesión de primos gemelos es finita o infinita». Entonces se sigue inexorablemente que la proposición $\mathscr{D}$ define un número. Pero, por otra parte, mientras no se dé un algoritmo que permita decidir si la sucesión de primos gemelos es infinita o no, q no puede ser construido como número y por tanto $\mathscr{D}$ no define un número. La única salida, para evitar la contradicción y mantener como absolutamente fundamental el principio de construcción, es negar sentido en el intuicionismo a la proposción $\mathscr{E}$. Ello equivale a negar la aplicabilidad del principio del tercio excluso en el intuicionismo.

Por otra parte, observemos que en las matemáticas clásicas se aplica con gran frecuencia el principio del tercio excluso a conjuntos infinitos. Es fácil ver, por ejemplo, que para establecer la relación de orden entre los números reales es necesario considerar conjuntos infinitos de números racionales a los cuales se aplica el principio así: «O existe un elemento del conjunto que goza de tal propiedad, o ninguno goza de tal propiedad».

En el apartado precedente hemos visto que la aplicabilidad del principio de contradicción ha dado lugar a diversas clases de intuicionismo. El principio tiene plena vigencia en la rama más importante del intuicionismo (Brouwer-Heyting-Kleene), gracias a una interpretación fuerte de la negación e implicación. Es un mérito grande de Brouwer haber puesto de manifiesto de una manera consistente, con una consistencia que hoy día resulta plenamente satisfactoria, un universo de objetos matemáticos —las construcciones mentales matemáticas— a los que no se puede aplicar el principio del tercio excluso.

En el apartado 13, volveremos sobre este mismo tema, pero empleando lenguaje formalizado.

10. Sistema axiomático intuicionista y su sentido

Teniendo presente el cálculo proposicional clásico y teniendo en cuenta lo dicho en el apartado 6, resulta que el cálculo proposicional intuicionista quedará completamente definido en cuanto demos la lista de axiomas.

La primera formalizacin del intuicionismo es debida a A. Heyting (1930), quien emplea variables proposicionales (en vez de letras proposicionales o enunciativas) e incluye la regla de sustitución como regla de inferencia. Para acomodarnos mejor a la exposición hecha en el capítulo 3 y también para una más fácil comparación de la lógica intuicionista con la clásica, damos a continuación la lista de axiomas (propiamente, esquemas de axiomas) indicada por G. Gentzen (1935) y expuesta y desarrollada por S. C. Kleene (1952) en [10]. Se supone que $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ son fbhs, que representan proposiciones matemáticas intuicionistas.

I. $\mathscr{A} \supset (\mathscr{B} \supset \mathscr{A})$
II. $(\mathscr{A} \supset \mathscr{B}) \supset ((\mathscr{A} \supset (\mathscr{B} \supset \mathscr{C})) \supset (\mathscr{A} \supset \mathscr{C}))$
III. $\mathscr{A} \supset (\mathscr{B} \supset \mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$
IV. $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} \supset \mathscr{A}$

VI. $\mathscr{A} \supset \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$
VII. $\mathscr{B} \supset \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$
VIII. $(\mathscr{A} \supset \mathscr{C}) \supset ((\mathscr{B} \supset \mathscr{C}) \supset (\mathscr{A} \vee \mathscr{B} \supset \mathscr{C}))$
IX. $(\mathscr{A} \supset \mathscr{B}) \supset ((\mathscr{A} \supset \sim \mathscr{B}) \supset \sim \mathscr{A})$
X. $\sim \mathscr{A} \supset (\mathscr{A} \supset \mathscr{B})$.

Después de lo que hemos indicado en los apartados 6-8, la validez de todos estos axiomas parece lo suficiente clara para que prescindamos de ulteriores explicaciones. Todos esos diez axiomas son también válidos en el cálculo proposicional clásico. La lista de axiomas que caracteriza el cálculo proposicional clásico puede obtenerse a partir de los diez axiomas dados, con sólo cambiar el último de los diez axiomas por el siguiente, que es más fuerte,

$$X^c \cdot \sim \sim \mathscr{A} \supset \mathscr{A}.$$

Se comprende que X^c equivale al principio del tercio excluso, el cual no es válido en el sistema intuicionista (véanse apartados 9 y 12).

La única regla de inferencia es la del *modus ponens* que coincide formalmente con la explicada en el apartado 5 del capítulo 3; y asimismo coinciden formalmente las definiciones de demostración formal y de teorema. Pero para la interpretación intuicionista de la regla de inferencia es esencial tener en cuenta el principio de construcción. Entonces la justificación intuicionista de la regla de inferencia *modus ponens* es enteramente análoga a la justificación intuicionista del axioma VI.

Observemos que esta formalización del intuicionismo debe considerarse como *una* formalización, y de ninguna manera puede considerarse como *la única* formalización posible del intuicionismo. El objeto del intuicionismo es cierto tipo de construcciones mentales y la logificación del intuicionismo en tanto tiene valor en cuanto responde objetivamente a razonamientos basados en construcciones mentales, que son los únicos que pueden justificar la logificación. La prioridad compete a la intuición y la lógica no es sino una parte de la matemática en cuanto responde a construcciones mentales típicas, cuya justificación se hace apelando a la intuición. Lo que caracteriza una construcción matemática como construcción lógica es esencialmente su gran generalidad. Esta, en buena parte, viene impuesta en la lógica por la rígida estructura que es peculiar a todo lenguaje formalizado.

En contraste con esta simplicidad de la lógica, es decir, con estas limitaciones impuestas por sus constitutivos o con este encajonamiento que se deriva de las reglas del juego, está la riqueza infinita de la construcción matemática que está ahí en la mente con posibilidades inagotables. No cabe esperar por consiguiente que pueda formalizarse completamente la matemática intuicionista; en cambio, parece puede afirmarse que es imposible que jamás pueda demostrarse que una formalización lógica responde adecuadamente a la totalidad de la matemática intuicionista. La lógica no puede agotar la realidad, y ello aun sin contar con las numerosas ambigüedades intrínsecas que sin duda aparecerán si se lleva a cabo un ulterior desarrollo del intuicionismo.

11. El modelo de Kolmogorov

La lógica formal intuicionista que hemos descrito en el párrafo precedente admite un modelo que arroja mucha luz sobre su sentido e incluso puede decirse que confirma su consistencia.

En el modelo de A. N. Kolmogorov (1932) se interpreta la lógica intuicionista como una teoría de resolución de problemas. El dominio de interpretación es el conjunto de «resoluciones de problemas de la matemática». Los cuatro conectivos reciben la siguiente interpretación. Suponiendo que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ representan resoluciones de dos problemas α y β, entonces $\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}$ es interpretado como la resolución de los dos problemas α y β; $\mathscr{A} \vee \mathscr{B}$ es interpretado como la resolución del problema α o del β; $\mathscr{A} \supset \mathscr{B}$ como la resolución del problema β supuesto que se tenga una resolución del problema α; y $\sim \mathscr{A}$ como resolución del problema de la imposibilidad o absurdidez del problema α.

Esta teoría de resolución de problemas constituye un modelo de la lógica formal intuicionista. Basta, en efecto, comprobar que todos los axiomas son válidos en esta interpretación, lo cual no ofrece dificultad.

12. Ejemplos de teoremas de lógica intuicionista

Los resultados más interesantes para nuestro objeto de la lógica intuicionista son los que contienen el concepto de negación, pues hay que buscar principalmente entre éstos las afirmaciones sobre la imposibilidad de demostrar resultados que son válidos formalmente en el cálculo proposicional clásico. Los dos ejemplos más importantes son sin duda los relativos a las fbhs

$$\sim\sim\mathscr{A} \supset \mathscr{A}, \qquad \mathscr{A} \vee \sim\mathscr{A}.$$

La primera de estas dos expresa que el «el absurdo del absurdo de $\mathscr{A}$ implica $\mathscr{A}$» o «principio de la doble negación». La segunda expresa el principio del tercio excluso. Ambas fbhs son formalmente indemostrables en el sistema formal intuicionista que hemos descrito (Heyting-Kleene); por otra parte es obvio que representan dos teoremas formales del cálculo proposicional clásico.

Se tiene intuicionísticamente

$$\vdash \sim(\mathscr{A} \wedge \sim\mathscr{A}), \qquad \vdash \mathscr{A} \supset \sim\sim\mathscr{A}.$$
$$\vdash \sim\sim(\mathscr{A} \vee \sim\mathscr{A}).$$

La primera expresa el principio de contradicción (mejor dicho, de no contradicción), cuya validez en el intuicionismo ya hemos discutido en el apartado 8. La segunda expresa que $\mathscr{A}$ implica el absurdo del absurdo de $\mathscr{A}$, lo cual es evidente con sólo tener presente el significado de los conectivos intuicionistas. La tercera expresa que es absurdo que el principio del tercio excluso sea absurdo. Omitimos las demostraciones formales que no ofrecen dificultad y que pueden verse con detalle en el texto de Kleene [10]. Obsérvese que todas las fbhs que representan teoremas formales intuicionistas son también teoremas formales clásicos, como se desprende inmediatamente de la comparación de los dos sistemas.

Las fbhs

$$\sim(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) \supset \sim\mathscr{A} \vee \sim\mathscr{B}, \qquad \sim\mathscr{A} \vee \sim\mathscr{B} \supset \sim(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B})$$
$$\sim(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) \supset \sim\mathscr{A} \wedge \sim\mathscr{B}, \qquad \sim\mathscr{A} \wedge \sim\mathscr{B} \supset \sim(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$$

expresan las leyes de De Morgan (1847) que son formalmente demostrables en el cálculo proposicional clásico; en el cálculo intuicionista las tres últimas son también demostrables, pero la primera no es válida.

Se tiene en el intuicionismo

$$\vdash \sim\mathscr{A} \supset \sim\sim\sim\mathscr{A}, \qquad \vdash \sim\sim\sim\mathscr{A} \supset \sim\mathscr{A},$$

lo que permite reducir siempre a dos el número máximo de $\sim$ consecutivos.

En el apartado 6 hemos dado un ejemplo de fbh que no contiene el conectivo $\sim$, que es formalmente demostrable clásicamente, pero que no es válida en el intuicionismo.

Es claro que el cálculo proposicional intuicionista es consistente; y de lo que acabamos de decir se desprende que no es completo, aunque una demostración directa (sin apelar a contraejemplos en la interpretación) de la incomplitud no sea trivial. Dada una fbh $\mathscr{E}$ es posible, en efecto, dar un algoritmo que permite decidir si la fbh $\mathscr{E}$ es formalmente demostrable o no, en el cálculo proposiciones intuicionista. La larga y difícil demostración de este resultado puede verse en el texto de Kleene [10]. La demostración de la decibilidad del cálculo proposicional clásico es elemental basándose en las tablas de verdad de los conectivos, pero este método no es aplicable al cálculo proposicional intuicionista.

Comparación con otras teorías

13. Comparación con el logicismo

La nota más sobresaliente al comparar estos dos sistemas de fundamentación de la matemática es la inversión de los puestos que ocupan la lógica y la matemática.

El logicismo presenta la lógica como fundamento exclusivo de la matemática clásica. Pero, para el intuicionismo la lógica matemática desarrollada por Frege, Peano, Russell no es sino una continuación de la de Platón y Aristóteles. Y la reducción lógica de la matemática llevada a cabo por los logicistas conserva todavía una esencial referencia al mundo y a un realismo, muy elaborado sin duda, pero conservando rasgos de ingenuidad. Para el logicismo la matemática nace en contacto con el mundo. Russell llegó a escribir (1920): «La lógica se ocupa del mundo real tan verdaderamente como la zoología, aunque de sus rasgos más abstractos y generales» [3] (citado por Gödel). A pesar de sus muchas e importantes aportaciones positivas el logicismo actualmente no puede satisfacer como fundamentación de la matemática por las razones que ya hemos expuesto en su lugar.

Por el contrario, el intuicionismo lejos de reducir la matemática a la lógica, considera ésta como una elaboración posterior. La lógica intuicionista ocupa un segundo estadio en el desarrollo de la matemática y surge como fruto de una especulación de tipo matemático, en un segundo nivel, sobre la matemática misma o sobre su expresión oral o escrita. Para la matemática intuicionista el mundo exterior no es sino ocasión o aplicación. La matemática propiamente tal es construida por la intuición en nuestra conciencia al contacto con la forma interna de nuestra sensibilidad, es decir, gracias a un apriorismo temporal. Es obvio que este sistema de fundamentación es mucho más crítico y seguro que el logicismo.

Para los matemáticos clásicos, así como para los formalistas, como ya arguyó vigorosamente Hilbert, el aspecto inaceptable del intuicionismo es la mutilación que realiza de la matemática. Numerosas teorías matemáticas, extensas e importantes, carecen de sentido o por lo menos de justificación para los intuicionistas.

He aquí cómo se expresa Hilbert (1927): «Me maravillo de que con estas consecuencias un matemático (Brouwer) dude de la estricta validez del principio del tercio excluso. Me maravillo todavía más de que hoy se encuentre toda una comunidad de matemáticos que duden de lo mismo. Lo que más me maravilla es el hecho de que sea en absoluto posible, incluso en los círculos de matemáticos, que la fuerza sugestiva de un hombre lleno de espíritu y temperamento pueda causar los más increíbles y excéntricos efectos» [9].

El que Heyting (1956) conceda que la mutilación de las matemáticas sea una inevitable consecuencia del punto de vista intuicionista, no parece una solución perfecta. Por ejemplo: la entidad z que hemos definido en el apartado 5 o tiene un número finito de cifras decimales o no; en ambas casos z es un número racional. Este razonamiento, ¿es efectivamente vacío o un mero adorno superfluo? ¿Por qué no ha de ser legítimamente matemático?

14. Comparación con el formalismo

Si de los intuicionistas puede afirmarse que profesan diversas formas de intuicionismo, mucho mayor diversidad puede señalarse entre los formalistas. No obstante podemos indicar varios contrastes entre los dos grupos de teorías.

Para el formalista la matemática empieza en los símbolos, en el papel; así, por ejemplo, en un texto de Hilbert que hemos citado. En su aspecto esencial la matemática se identifica con la ciencia de los sistemas formales; así, por ejemplo, explícitamente en H. B. Curry (1951). El formalista desea como definición de la actividad matemática algo claro, bien definido y bien cortado. Supone un lenguaje, y entonces la matemática se identifica con la

sintaxis del lenguaje. Por el contrario, el intuicionista aplica su intuición, elabora con cierta imprecisión y oscuridad la noción de número natural y luego finalmente empieza su actividad matemática. El límite entre lo matemático y lo prematemático dista mucho de ser claro y tajante.

El intuicionismo es impreciso y obscuro en sus primeras actividades todavía prematemáticas, pero nunca arbitrario. Busca lo que haya y descubre lo que encuentre en su actividad constructiva, pero ateniéndose a la realidad que está ahí dentro en la misma conciencia. Su modo de avanzar en la elaboración de la matemática es esencialmente genético. Por el contrario, el formalismo goza de un margen de arbitrariedad extraordinario; su método es axiomático formal o existencial, presuponiendo con una libertad casi ilimitada la existencia de sus objetos y de las relaciones que los ligan. El formalista convierte la matemática, en una primera aproximación, en un juego, y en principio en un juego arbitrario; lo único que permanece esencial es que sea juego y por tanto que en su desarrollo se guarden cuidadosamente las reglas que se estipulen.

Como contrapartida de los dos contrastes precedentes, la noción de verdad matemática es clara, rica y llena de contenido en el intuicionismo, mientras que en el formalismo aparece relativa, sin que se vea claramente en qué consiste y con un marcado carácter meramente hipotético-deductivo.

He aquí cómo se expresa L. E. J. Brouwer (1912): «La pregunta ¿dónde se encuentra la exactitud matemática? es contestada diferentemente por los dos grupos; el intuicionista dice: en el entendimiento humano, el formalista dice: en el papel» [3]. Con todo parece que la verdad de la matemática formalista radica también en la mente humana, pero no en las construcciones que lleva a cabo, sino en su naturaleza misma, o sea, de acuerdo con el intuicionismo, en su esquema trascendental, como indica A. Dou en [6 bis].

En cambio he aquí cómo se expresa N. Bourbaki (1960[2]): «En resumen, creemos que la matemática está destinada a sobrevivir, y que jamás se verá que las partes esenciales de este majestuoso edificio se arruinen porque se manifieste súbitamente una contradicción; pero no pretendemos que esta opinión tenga otro fundamento que el de la experiencia. Es poco, dirán algunos. Pero son veinticinco siglos, en los que los matemáticos se han acostumbrado a corregir sus errores y ver con ello su ciencia enriquecida y no empobrecida; esto les da derecho a mirar al porvenir con serenidad» [5]. Se hace difícil conceder que no haya más fundamento que el de la experiencia, y en particular queda sin explicar el hecho extraordinario de la permanencia invariable durante veinticinco siglos de las verdades matemáticas.

A pesar de los contrastes que hemos mencionado, no es claro que el intuicionismo y el formalismo sean incompatibles. Más bien, pueden integrarse en buena parte considerando al formalismo como un estadio posterior, después que el intuicionismo haya elaborado genéticamente, o incluso quizá condicionalmente, un sistema de axiomas. El intuicionismo aparece así, como indica Heyting (1956), interesado en el tipo de razonamiento que los formalistas emplean cuando hacen metamatemática, y la diferencia entre intuicionistas y formalistas aparece sobre todo como una cuestión de gustos. En la misma línea, P. Lorenzen (1962) expresa la opinión de que las matemáticas pueden desarrollarse sea por métodos clásicos sea por métodos intuicionistas, pero que la metamatemática, y en particular la metalógica, debe serlo mediante procedimientos intuicionistas.

Bibliografía

1 BECKER, O., cfr. [1], Bibl. primera parte, cap. 2.
2 — *Grösse und Grenze der mathematischen Denkweise.* Friburgo, 1959.
3 BENACERRAF, P., y PUTNAM, H., cfr. [3], Bibl. segunda parte, cap. 1.
4 BETH, E. W., cfr. [2], Bibl. segunda parte, cap. 1.
5 BOURBAKI, N., cfr. [3], Bibl. segunda parte, cap. 3.
6 DOU, A., *Relaciones entre las ecuaciones en derivadas parciales y la Física,* Madrid. Discurso de la Academia de Ciencias, 1963.
6 bis — *La verdad en la matemática axiomática.* Discurso en la Academia de Ciencias. Madrid, 1966.
7 GARCÍA, D., *Assaigs moderns per a la fonamentació de les matemàtiques.* Barcelona. Institut d'estudis catalans, 1933.
8 HEYTING, A., *Intuitionism. An Introduction.* Colección «Studies in Logic». Amsterdam. North-Holland Publishing Company, 1956.
9 HILBERT, D., cfr. [6], Bibl. segunda parte, cap. 3.
10 KLEENE, S. C., cfr. [10], Bibl. primera parte, cap. 3.
11 KNEEBONE, G. T., cfr. [5], Bibl. primera parte, cap. 1.
12 LORENZEN, P., *Metamathematik.* Mannheim. Bibliographisches Institut A-G, 1962.
13 POINCARÉ, H., *La science et l'hypothèse.* París, 1902. Hay numerosas ediciones y traducciones.
14 — «Les mathématiques et la logique», *Revue de métaphysique et de morale* 13 (1905) 815-835, 14 (1906) 17-34 y 294-317 y refundido en 1908.

15 — *Science et méthode.* París, 1908. Hay numerosas ediciones y traducciones.
16 RICHTER, V., *Untersuchungen zur operativen Logik der Gegenwart.* Friburgo/Munich. Verlag Karl Albert, 1965.
17 WANG, H., cfr. [12], Bibl. primera parte, cap. 3.
18 WEYL, H., *Philosophy of Mathematics and Natural Science.* Princeton. Princeton University Press, 1949.

Conclusión

En la última sección hemos analizado muy sucintamente algunas consecuencias filosóficas que se derivan de las diversas teorías sobre fundamentos de la matemática.

Respecto de la verdad matemática, la noción más importante de las iluminadas y analizadas en una teoría de fundamentos, como ya indicábamos en la introducción, podemos resumir: lo intencional de nuestro conocimiento matemático tiene que ser isomorfo con una realidad que para el logicismo o matemático clásico se encuentra en el mundo; para el intuicionista dicha realidad fundamental está en nuestra conciencia; para el formalista en una posición intermedia que podemos caracterizar diciendo que está en el papel, o mejor, en el esquema trascendental del entendimiento humano.

Observemos finalmente que si las diversas teorías sobre fundamentos y sus variedades han de ser ulteriormente comparadas y analizadas, parece que es inevitable que se involucren simultáneamente cuestiones estrictamente filosóficas. Entre éstas podemos señalar: una epistemología del conocimiento matemático; cómo se conjugan el empirismo y el racionalismo o incluso el platonismo en las matemáticas, juntamente con el hecho de su aplicabilidad a la técnica moderna; supuesto que exista, en qué consiste el apriorismo matemático; y por último una ontología de los entes matemáticos. Prolongando en extensión y profundidad la filosofía de las matemáticas y la matemática misma, parece se acabará por conectar con la filosofía del ser humano, en cuanto contingente y relacionado por fuera a través del espacio con el mundo exterior y relacionado por dentro a través del tiempo con lo trascendente.

Indice de nombres

nueva colección labor

obras publicadas

Pierrette Sartin	34	la promoción de la mujer
J. M. Millás Vallicrosa	35	literatura hebraicoespañola
Gina Pischel	36	breve historia del arte chino
Antonio Ribera	37	la exploración submarina
Dr. Pierre Vachet	38	las enfermedades de la vida moderna
J. A. V. Butler	39	la vida de la célula
Paul Roubiczek	40	el existencialismo
Gaetano Righi	41	historia de la filología clásica
Silvio Zavatti	42	el polo antártico
M. Gauffreteau-Sévy	43	hieronymus bosch «el bosco»
Pierre Idiart	44	la cantidad humana
Víctor d'Ors	45	arquitectura y humanismo
Vladimir Kourganoff	46	introducción a la teoría de la relatividad
Henry B. Veatch	47	ética del ser racional
M. Crusafont Pairó	48	el fenómeno vital
P. Bourdieu y J. C. Passeron	49	los estudiantes y la cultura
W. H. Thorpe	50	ciencia, hombre y moral
Stephen Clissold	51	perfil cultural de latinoamérica
R. Harré	52	introducción a la lógica de las ciencias
René Taton	53	causalidad y accidentalidad de los descubrimientos científicos
François Châtelet	54	el pensamiento de platón
Luis M. Llubiá	55	cerámica medieval española
Manuel Cruells	56	los movimientos sociales en la era industrial
Agustín del Saz	57	teatro social hispanoamericano
W. M. Watt	58	mahoma, profeta y hombre de estado
Jean Piveteau	59	de los primeros vertebrados al hombre
David Thomson	60	las ideas políticas
Mary Warnock	61	ética contemporánea
René Bissières	62	la búsqueda de la verdad
Charles Chasse	63	gauguin sin leyendas
Glyn Daniel	64	el concepto de prehistoria
F. Garrido Pallardó	65	los orígenes del romanticismo
Walter W. Heller	66	nuevas dimensiones de la economía política
E. B. Ford	67	mendelismo y evolución
H. D. Lewis y R. L. Slater	68	religiones orientales y cristianismo
Stephen H. Dole	69	planetas habitables
Jean Laude	70	las artes del áfrica negra
Douglas Pike	71	australia, continente tranquilo
S. M. Weinstein y A. Keim	72	principios básicos de los computadores
N. E. Christensen	73	sobre la naturaleza del significado
Maurice Aubert	74	el cultivo del océano
C. Rodríguez-Aguilera	75	picasso 85
Clara Malraux	76	la civilización del kibbuts
Antonio F. Molina	77	la generación del 98
John Cohen	78	introducción a la psicología
Harry G. Johnson	79	la economía mundial en la encrucijada
Bruno Munari	80	el arte como oficio
Santiago Genovés	81	el hombre entre la guerra y la paz
F. R. Jevons	82	el secreto bioquímico de la vida
Suzanne Demarquez	83	manuel de falla
Max Born	84	la responsabilidad del científico
Carlos Miralles	85	la novela en la antigüedad clásica
Gillo Dorfles	86	el diseño industrial y su estética
Norman J. G. Pounds	87	geografía del hierro y el acero
Georges Olivier	88	el hombre y la evolución
J. G. Peristiany	89	el concepto del honor en la sociedad mediterránea
David Mitchell	90	introducción a la lógica
J. Tricart	91	la epidermis de la tierra
Norman MacKenzie	92	breve historia del socialismo
Green y Johns	93	introducción a la sociología
Reinhardt Grossmann	94	la estructura de la mente
Juan Schobinger	95	prehistoria de suramérica
John E. Allen	96	aerodinámica
Bryan Wilson	97	la religión en la sociedad
J. F. D. Frazer	98	los ciclos sexuales de los vertebrados
Richard Bailey	99	problemas de la economía mundial
José Onrubia de Mendoza	100	literatura española
R. Trevor Davies	101	la decadencia española (1621-1700)
H. Bondi	102	cosmología
J.-E. Cirlot	103	pintura gótica europea
G. W. Tyrrell	104	la tierra y sus misterios
A. Cirici Pellicer	105	miró en su obra
Alfred Sauvy	106	los mitos de nuestro tiempo
Fernando Wagner	107	teoría y técnica teatral
Bryan Tew	108	cooperación monetaria internacional
George Schwartz	109	teoría del marketing
Luigi Campedelli	110	fantasía y lógica en la matemática
A. J. Cain	111	las especies animales y su evolución
Antonio M. Casas	112	el arte de hoy y de ayer
Wilhelm Boeck	113	rembrandt
B. J. Skinner	114	tecnología de la enseñanza
A. Berenguer Carisomo	115	literatura argentina

Kenneth Little 116 la migración urbana en áfrica occidental
Alberto Dou 117 fundamentos de la matemátic
Bertrand Russell 118 los problemas de la filosofía
D. J. West 119 la delincuencia juvenil
R. C. Estall y R. O. Buchanan 120 actividad industrial y geografí económica

otros volúmenes en preparación

***

editorial labor, s.a.