Tipos De Orden

Gabriel Cachoa Ocampo

Agosto, 2016

Resumen

En esta primer sección nuestro objetivo es estudiar a la clase de órdenes lineales módulo la isomorfía, $COTO\backslash\simeq$. La clase de representantes satisface que cualesquiera dos de sus elementos no son isomorfos y que cualquier orden lineal lo podemos reconocer como uno de sus elementos bajo la isomorfía. Dentro de esta clase podemos defnir operaciones que nos permitan construir nuevos órdenes lineales. Indagaremos especialmente sobre la concatenación y la multiplicación, herramientas que nos serán útiles cuando querramos calcular una suma o multiplicación de números cardinales. Después, como es clásico al abordar este tema, buscaremos condiciones suficientes para caracterizar ciertos órdenes lineales como lo hicimos en el caso de los naturales y los enteros como lo hicimos en el curso anterior. Finalmente, daremos una construcción alternativa de OR, la clase de los números ordinales.

Recordar

1. Decimos que un conjunto $(X, <_X)$ está linealmente ordenado si $(X, <_X)$ es un orden parcial tricotómico. Es decir, si $<_X \subseteq X \times X$ es irreflexiva $(\forall x \in X(x \not<_X x))$, transitiva $(\forall x, y, z \in X(x <_X y \wedge y <_X z \to x <_X z))$, y tricotómica $(\forall x, y \in X(x <_X y \vee y <_X x))$. A la clase de los órdenes lineales la denotamos por $COTO$.
   Queda como ejercicio verificar que de la transitividad y la irreflexividad de $<_X$ se sigue que su asimetria $(\forall x, y \in X(x <_X y \to y \not<_X x))$ y que $COTO$ es una clase propia.

2. Decimos que dos órdenes son isomorfos si entre ellos existe una función biyectiva que preserve el orden, es decir: Si $(A, <_A), (B, <_B) \in COTO$ son isomorfos si existe $f : A \to B$ biyectiva tal que $\forall x, y \in A(x <_A y \leftrightarrow f(x) <_B f(y))$. En ese caso escribimos $(A, <_A) \simeq (B, <_B)$ o solamente $A \simeq B$.

3. Intuitivamente, dos órdenes isomorfos son el mismo pero, quizás, lo elementos tienen distinto nombre. Se prueba, en el primer curso de teoría de conjuntos que esta relación es de equivalencia. Queda como ejercicio recordar la prueba.

1 La Clase de los Tipos de Orden

Ya que la isomorfía es una relación de equivalencia sobre $COTO$ podemos considerar su clase de representantes, es decir una clase, $\mathcal{T}$, tal que:

1. Dado $(S, <_S) \in COTO$, existe $(\sigma, <_\sigma) \in \mathcal{T}$ tal que $(S, <_S) \simeq (\sigma, <_\sigma)$.
2. Si $(S, <_S) \in COTO$ y denotamos por

   $$[(S, <_S)]_\simeq := \{(A, <_A) \in COTO \mid (A, <_A) \simeq (S, <_S)\}$$

   Existe un único $(\sigma, <_\sigma) \in \mathcal{T}$ tal que $\mathcal{T} \cap [(S, <_S)]_\simeq = \{(\sigma, <_\sigma)\}$

Queda como ejercicio probar que $\mathcal{T}$ es una clase propia.
Denotaremos a la clase de tipos de orden con la letra mayúscula e ítalica $\mathcal{T}$ y a sus elementos con letras griegas minúsculas, usualmente: $\sigma, \mu, \eta, \lambda, \ldots$. Usamos letras griegas minúsculas también al hablar de ordinales, recordemos que el objetivo final de esta primera sección es mostrar la relación que guarda la clase de los ordinales con la de los tipos de orden de los buenos órdenes.
Es muy difícil describir a la clase $\mathcal{T}$, la definimos como una clase que satisfaga las condiciones 1) y 2), sin embargo no hay una única clase que satisfaga esas propiedades.
La teoría que desarrollaremos acerca de la clase de tipos de orden preservará esta genericidad, es decir es aplicable a cualquier clase de tipos de orden. Por ejemplo, podemos definirle una estructura algebraica relacional. La propiedad 2 de $\mathcal{T}$ permite definir una funcional $\tau : COTO \to \mathcal{T}$ tal que $\tau(S) = \sigma$ donde $\mathcal{T} \cap [S]_\simeq = \{\sigma\}$, le llamaremos el "tipo de orde de S". Sin embargo, dado un orden lineal no hay un procedimiento efectivo para poder calcularle su tipo de orden porque ni siquiera conocemos cuáles son los elementos de la clase de tipos de orden, el beneficio vendrá en construir ordenes lineales nuevos a partir de órdenes dados.
(Cuando trabajemos sobre la clase de tipos de orden de los buenos órdenes sí podremos caracterizarla a partir de sus elementos.)

Def. 1.1. *Sea $\mathcal{T}$ una clase de tipos de orden*

1. *Definimos $\tau : COTO \to \mathcal{T}$ una funcional que para cada $(S, <_S) \in COTO$ $\tau(S, <_S) := (\sigma, <_\sigma)$ donde*

   $$\mathcal{T} \cap [(S, <_S)]_\simeq = \{(\sigma, <_\sigma)\}$$

   Decimos que S tiene tipo de orden σ.
2. *Sean $(S, <_S), (M, <_M) \in COTO$ decimos que $(S, <_S) \preceq (M, <_M)$ si y sólo si existe una función inyectiva $f : S \to M$ que preserva el orden, es decir: $\forall x, y \in S (x <_S y \leftrightarrow f(x) <_M f(y))$*
   OBS: $(COPO, \preceq)$ no es un orden parcial, falla la antisimetría.

3. *Sean* $(\sigma, <_\sigma), (\mu, <_\mu) \in \mathcal{T}$, *decimos que* $\sigma \leq_{\mathcal{T}} \mu$ *si y sólo si* $(\sigma, <_\sigma) \preceq (\mu, <_\mu)$. *También diremos que:* $\sigma <_{\mathcal{T}} \mu$ *si y sólo si* $\sigma \neq \mu$ *y* $\sigma \leq_{\mathcal{T}} \mu$.
   Queda como ejercicio verificar que $(\mathcal{T}, <_{\mathcal{T}})$ **es un orden parcial. ¿Es un orden lineal?**

Diremos que un orden lineal es menor que otro de acuerdo a $\preceq$ si la función que existe es un "encaje", es decir una función inyectiva que es un morfismo de orden. El encaje se da cuando uno de los órdenes posee una "copia" del otro. En los órdenes lineales finitos basta comparar su tamaño para poder comparar su tipo de orden.

Lema 1.1. *Todos los órdenes lineales finitos son buenos órdenes.*

Pba. Sea $(S, <_S) \in COTO$ tal que $\mid S \mid = n$ para alguna $n \in \omega$. Sea $A \subseteq S$, como S es finito: $A = \{x_0, ..., x_j\}$ para alguna $j \leq n$. Si $y_0 := x_0$ y definimos para cada $m^+ \leq j$, $y_{m^+} := min_{<_S}\{y_m, x_m\}$, así $y_j = min_{<_S} A$. †

Prop. 1.1. *Todos los órdenes lineales finitos y equipotentes tiene el mismo tipo de orden.*

Pba. Basta probar que cada orden lineal finito es isomorfo al número natural al que es equipotente. Así, dos órdenes lineales equipotentes a un mismo natural son isomorfos a un mismo orden linea y por tanto isomorfos entre ellos.
Sea $(S, <_S) \in COTO$ tal que $\mid S \mid = n$. Si definimos $f : n \to S$ como $f(0) = min_{<_S} S$ y para cada $m^+ \leq n$, $f(m^+) = min_{<_S}\{s \in S \mid f(m) <_S s\}$ Por cómo construimos a f, es inyectiva. Por tanto $f[n] \subseteq S$ tal que $\mid f[n] \mid = n$, por el lema de finitud $f[n] = S$, y por lo tanto f es un isomorfismo entre $(n, \in)$ y $(S, <_S)$ †

En la proposición anterior es necesaria la hipótesis "finitos", no es cierto que cualesquiera dos órdenes lineales equipotentes son isomorfos. Consideremos, por ejemplo $(\omega, \in)$ y $(\omega^+, \in)$. Es fácil ver que son equipotentes, si $f : \omega \to \omega^+$ fuese un isomorfismo, existiría $n \in \omega$ tal que $f(n) = \omega$, por ser isomorfismo y ω el máximo de ω^+, n sería el máximo de ω lo cual es imposible.
De la proposición anterior vemos que resulta conveniente considerar que $\omega \subseteq \mathcal{T}$. De ser así, ahora podemos calcular efectivamente el tipo de orden de todos los órdenes lineales finitos. Usando el lema de finitud se puede probar también el siguiente resultado que queda como **ejercicio**:

$$\forall n, m \in \omega (n \in m \Longleftrightarrow n <_{\mathcal{T}} m)$$

También, resulta conveniente que $\omega \in \mathcal{T}$ pues así podemos calcular el tipo de orden de todos los órdenes lineales isomorfos a $(\omega, \in)$. Recordemos el siguiente resultado:

Prop. 1.2. *Cualquier buen orden, sin extremo derecho y tal que todo subconjunto superiormente acotado alcance su máximo tiene tipo de orden* ω

Pba. Sea $(X, <)$ un buen orden que satisface las hipótesis de la proposición. Definimos $F : \omega \to X$ tal que $F(0) = min_< X$ y para cada $n \in \omega$, $F(n^+) = min_<\{x \in X \mid F(n) < x\}$, dado que X no tiene extremo derecho $\{x \in X \mid y < x\}$ es no vacío para cualquiera $y \in X$ y por tanto está bien definida. De la misma definición se sigue:

$$\forall n, m \in \omega(n <_\omega m \leftrightarrow F(n) < F(m))$$

Y por tanto es un morfismo de orden inyectivo. Para ver que es sobre primero observemos que $\forall n \in \omega(F[n^+] = \{x \in X \mid x < F(n^+)\}$, se prueba por inducción sobre n. Si suponemos $X \setminus F[\omega] \neq \emptyset$, existe $a = min_< X \setminus F[\omega]$. Si $a < F(n^+)$ para alguna $n \in \omega$, $a \in F[n^+] \subseteq F[\omega]$. Entonces, a es cota superior de $F[\omega]$. Así, $F[\omega]$ alcanza a su máximo, llamémosle q. Sea $n \in \omega$ tal que $F(n) = q$. Como F es un morfismo de orden, $F(n) = q < F(n^+) \in F[\omega]$! Por lo tanto, $X \setminus F[\omega] = \emptyset$ y F es sobre. †

En la proposición anterior es necesaria la extraña hipótesis "y que todo subconjunto superiormente acotado alcance a su máximo", por ejemplo si consideramos: $A = (1 - \frac{1}{n})_{n\in\omega} \cup (2 - \frac{1}{n})_{n\in\omega} \subseteq \mathbb{R}$, entonces $(A, <_\mathbb{R})$ es un conjunto bien ordenado, sin extremo derecho, pero la sucesión $(1 - \frac{1}{n})_{n\in\omega} \subseteq A$ está superiormente acotada y no alcanza a su máximo. No son isomorfos $(A, <_\mathbb{R})$ y $(\omega, \in)$.

2 Ejemplos de Tipos de Orden

Intuitivamente, los tipos de orden son órdenes lineales reconocibles a simple vista: los tipos de orden finito, el tipo de orden ω. Además, cualquier orden lineal lo podemos reconocer como un tipo de orden. En este apartado queremos caracterizar a los tipos de orden $(\mathbb{Z}, <_\mathbb{Z})$,$(\mathbb{Q}, <_\mathbb{Q})$ y $(\mathbb{R}, <_\mathbb{R})$ así como lo hicimos con $(\omega, \in)$.

Prop. 2.1. *Cualquier orden lineal sin extremos que satisfaga que cualquier subconjunto inferiormente acotado alcanza a su mínimo y cualquier subconjunto superoriormente acotado alcanza a su máximo tiene tipo de orden* $\tau(\mathbb{Z}, <_\mathbb{Z}) = \zeta$.

Pba. Sea $(X, <_X) \in COTO$ tal que todo subconjunto superiormente acotado alcanza a su máximo y todo subconjunto inferiormente acotado alcanza a su mínimo. Basta demostrar que $(X, <_X) \simeq (\mathbb{Z}, <_\mathbb{Z})$
Sea $a_0 \in X$, vamos a construir el ismorfismo por partes donde a_0 juega el papel de ser el 0, quienes están por $<_X$-arriba juegan el papel de los enteros positivos y los que están por $<_X$-abajo el de los enteros negativos. (Hacer un dibujo).
Sean $X^+ := \{x \in X \mid a_0 \leq_X x\}$ y $X^- := \{x \in X \mid x \leq_X a_0\}$.
Como $X^+ \subseteq X$ está inferiormente acotado, podemos garantizar que: $(X^+, <_X) \in COBO$, como además todo subconjunto superiormente acotado alcanza su máximo tenemos las hipótesis de la proposición anterior y podemos concluir que $(X^+, <_+) \simeq (\omega, \in) \simeq (\mathbb{Z}^+, <_\mathbb{Z})$.

Faltaría demostrar: $(X^-, <_X) \simeq (\omega, \ni) \simeq (\mathbb{Z}^-, <_\mathbb{Z})$, es decir que X^- es isomorfo al orden invertido de ω. La prueba es un dual a la prueba de la proposición anterior y es muy recomendable para el lector hacerla como **ejercicio**. †

La prueba nos deja ver dos características interesante de $\mathbb{Z}$: como un orden $\mathbb{Z}$ es "pegar" a ω con su orden invertido desde el 0 y no importa cuál elemento de $\mathbb{Z}$ reconozcamos como el 0 (en el sentido en el que dado cualquier entero, podemos encontrar un automorfismo que manda al cero en ese entero).
Para las pruebas anteriores usamos fuertemente el teoremea de recursión para ω, para caracterizar el tipo de orden de $(\mathbb{Q}, <_\mathbb{Q})$ utilizaremos una técnica muy importante dentro del área de la lógica matemática "back and forth". Construiremos un isomorfismo intercalando elementos del dominio y de la imagen para así poder decidir el valor que toma el isomorfismo.

Teo. 2.1. *(Cantor, 1895) Cualquier orden lineal denso, sin extremos y numerable tiene tipo de orden $\tau(\mathbb{Q}, <_\mathbb{Q}) = \eta$.*

Pba. Sean $(X, <_X), (Y, <_Y) \in COTO$, densos, sin extremos y numerables. Basta ver que son isomorfos.
Sean $X = \{x_n \mid n \in \omega\}$, y $Y = \{y_n \mid n \in \omega\}$ enumeraciones de X e Y.
Vamos a definir recursivamente dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ y un isomorfismo $f : X \to Y$ tal que $f(a_n) = b_n$.
Base: Definamos $a_0 = x_0$ y $b_0 = y_0$.
Sea $n \in \omega$, supongamos que hemos definido a_k y b_k para cada $k < n$. Ahora, definamos a_n y b_n. Hay dos casos:

1. Si n es un número impar:
   Definimos b_n como el primer elemento de acuerdo a la enumeración de Y que no aparezca en la lista $\{b_k \mid k < n\}$. En símbolos: $b_n = y_j$ donde $j = min\{k \in \omega \mid y_k \neq b_m, m < n\}$. j está bien definido pues Y no tiene extremos.
   Definimos a_n como el primer elemento de acuerdo a la enumeración de X que guarde la misma relación de orden que b_n con los $b_k, k < n$. En símbolos, hay tres casos:

   (a) Si b_n se encuentra entre dos elementos de la lista $\{b_k \mid k < n\}$, tomamos b_r y b_s el antecesor y sucesor inmediato de b_n. Definimos $a_n = x_j$ donde
   $$j = min\{k \in \omega \mid a_r <_X x_k <_X a_s\}$$

   (b) Si b_n es el máximo de la lista, $a_n = x_j$ donde
   $$j = min\{k \in \omega \mid a_m <_X x_k, m < n\}$$

   (c) Si b_n es el mínimo de la lista, $a_n = x_j$ donde
   $$j = min\{k \in \omega \mid x_k <_X x_m, m < n\}$$

2. Análogamente, si n es un número par hacemos lo mismo sólo que ahora escogemos a a_n primero y después a b_n:
Definimos a_n como el primer elemento de acuerdo a la enumeración de X que no aparezca en la lista $\{a_k \mid k < n\}$. En símbolos: $a_n = x_j$ donde $j = min\{k \in \omega \mid x_k \neq b_m, m < n\}$. j está bien definido pues X no tiene extremos.
Definimos b_n como el primer elemento de acuerdo a la enumeración de Y que guarde la misma relación de orden que a_n con los $a_k, k < n$. En símbolos, hay tres casos:

   (a) Si a_n se encuentra entre dos elementos de la lista $\{a_k \mid k < n\}$, tomamos a_r y a_s el antecesor y sucesor inmediato de a_n. Definimos $b_n = y_j$ donde
   $$j = min\{k \in \omega \mid b_r <_Y y_k <_Y b_s\}$$

   (b) Si a_n es el máximo de la lista, $b_n = y_j$ donde
   $$j = min\{k \in \omega \mid b_m <_Y y_k, m < n\}$$

   (c) Si b_n es el mínimo de la lista, $a_n = x_j$ donde
   $$j = min\{k \in \omega \mid y_k <_Y b_m, m < n\}$$

Por cómo hemos construido las sucesiones, se sigue inmediatamente que la correspondencia $a_n \to b_n$ es inyectiva y un morfismo de orden. Ahora queremos probar que $X = \{a_n \mid n \in \omega\}$ y $Y = \{b_n \mid n \in \omega\}$. Ya tenemos una contención, por inducción probemos que: $\{x_n \mid n \in \omega\} \subseteq \{a_n \mid n \in \omega\}$.
Claramente, como $x_0 = a_0$, $x_0 \in \{a_n \mid n \in \omega\}$.
Sea $n \in \omega$, supongamos que para cada $k < n$ $x_k \in \{a_n \mid n \in \omega\}$. Sea $N = max\{j \in \omega \mid a_j = x_k, k < n\}$, el máximo índice que alcanza la lista $\{x_k \mid k < n\}$ en $\{a_j \mid j \in \omega\}$. Hay dos casos:
Si $x_n = a_j$ para alguna $j < N$, entonces $x_n \in \{a_j \mid j \in \omega\}$.
Si para toda $j < N$, $x_n \neq a_j$, es decir que es el primero en la numeración de X que no aparece en la lista $\{a_j \mid j < N\}$. Si N es par, $a_{N+1} = x_n$, y si N es impar $a_{N+2} = x_n$.
Concluimos que $X = \{a_n \mid n \in \omega\}$.
La prueba $Y = \{b_n \mid n \in \omega\}$ es análoga.
Por lo tanto, la correspondencia $h : X \to Y$ definida por $h(a_n) = b_n$ es un isomorfismo. †

Observen que en la prueba utilizamos el teorema de recursión para ω es una de sus variantes más fuertes, recursión por curso de valores. También, al hacer la prueba por inducción utilizamos la técnica de "inducción fuerte". Mientras que la recursión es un mecanismo de construcción y la inducción un mecanismo de prueba el proceso es análogo. Lo hacemos en el cero, lo suponemos hecho para todos los anteriores de un natural arbitrario y lo hacemos sobre ese natural.

La proposición anterior es uno de los resultados más significativos para la teoría de orden pues tiene como consecuencia el siguiente corolario:

Coro. 2.1. *Cualquier orden lineal numerable y denso se encaja en* $(\mathbb{Q} <_{\mathbb{Q}})$. *Es decir, si* $\mu \in \mathcal{T}$ *es denso y numerable,* $\mu \leq_{\mathcal{T}} \eta$.

El último tipo de orden que nos queda por caracterizar es el de $(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}})$. Los reales son los racionales sin hoyos, fin. Esa es la caracterización que buscamos. Para construir a los reales tomamos a los racionales y los completamos. De esa "completación" logramos aumentar la cardinalidad del orden, los racionales tienen más hoyos que elementos. Cualquier orden lineal que sea isomorfo a los reales debe tener una copia de los racionales sumergida, la cual completa. En topología y en teoría de orden esa propiedad tiene un nombre:

Def. 2.1. *Decimos que un orden lineal* $(X, <_X)$ *es separable si existe* $D \subseteq X$ *denso y numerable.*

Para construir a los reales a partir de los racionales, el semestre pasado, utilizamos la misma construcción de Cantor, a través de sucesiones de Cauchy. Deciamos que un orden lineal era completo si lo era como espacio métrico (topológico), es decir si toda sucesión de Cauchy es convergente. Para órdenes lineales, la noción de completo la podemos caracterizar también a través de supremos e ínfimo (como en Cálculo I). Que quede como ejericio porbar el siguiente:

Lema 2.1. **[AE]** *En un orden lineal, son equivalentes: Toda sucesión de Cauchy es convergente. Todo conjunto superiormente acotado tiene supremo. Y, todo conjunto inferiormente acotado tiene ínfimo.*

En órdenes lineales, sólo existe un denso numerable, los racionales, entonces cualquier completación de un denso numerable es una completación de los racionales, entonces cualquier completación de un denso numerable es isomorfa a los reales. Probémoslo:

Prop. 2.2. *Cualquier orden lineal sin extremos, separable y completo tiene tipo de orden* $\tau(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}) = \lambda$

Pba. Sean $(S, <_S), (M, <_M) \in COTO$ sin extremos, separables y completos. Sean $D_S \subseteq S$ y $D_M \subseteq M$ densos numerables. Por la proposición anterior $(D_S, <_S) \simeq (D_M, <_M)$, sea pues $h : D_S \to D_M$ isomorfismo.
Definimos $f : S \to M$ como $f(x) = sup\{h(a) \mid a \in D_S \land a <_S x\}$

†