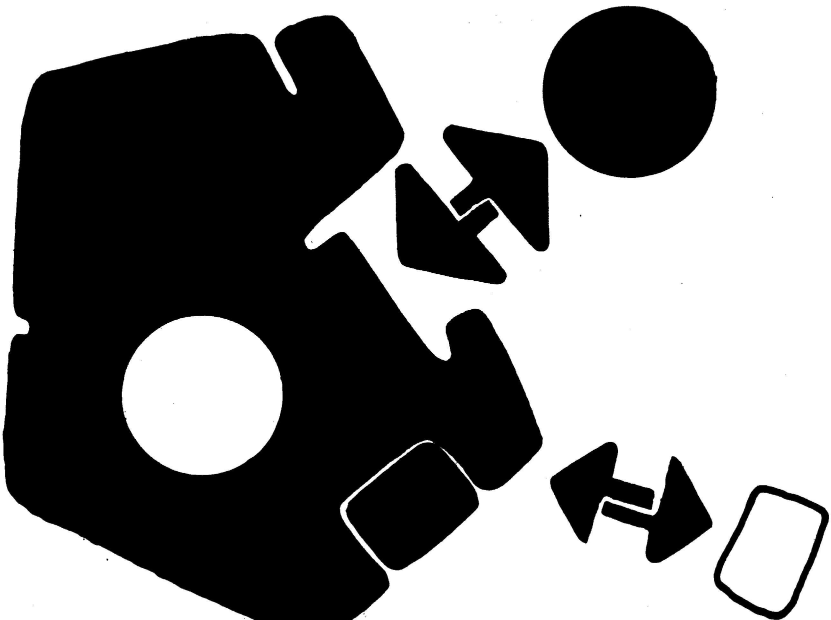
FUNCIONES REALES



MANUEL LOPEZ MATEOS

8

MANUEL LOPEZ MATEOS

FUNCIONES REALES

1973
Programa Nacional de Formación de Profesores
ASOCIACION NACIONAL DE UNIVERSIDADES E INSTITUTOS DE ENSEÑANZA SUPERIOR

Primera edición: México, 1973

Av. M. A. Quevedo 8-4º piso
Apdo. Postal 70-230
México 20, D. F.

Diseño de la Portada:
Javier Espinoza y Javier Fragoso

Edición a cargo de:
DISEÑO Y COMPOSICION LITOGRAFICA, S. A.
Blv. M. Avila Camacho Nº 40-316
Naucalpan, Edo. de México
557-63-74
557-62-63

Impreso en México

Printed in Mexico

PRESENTACION

Esta publicación forma parte de la Serie TEMAS BASICOS, preparada por la Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior. En cada una de las áreas de Matemáticas, Ciencias Naturales, Historia y Ciencias Sociales, *y* Lengua y Literatura, *la Serie ofrece los temas vertebrales de los cursos correspondientes en el nivel de enseñanza preparatoria o bachillerato. Algunos de los temas serán útiles también como auxiliares para repaso en el inicio del ciclo profesional o como fuente de conocimiento para el lector autodidacta.*

Dentro de la intención didáctica con que han sido elaborados los materiales, cabe destacar los propósitos de claridad, concisión y, en la medida de lo posible, desarrollo autónomo de los temas. En cada caso, se han incorporado al texto ejemplos, preguntas o ejercicios. En ocasiones, las preguntas o los ejercicios se acompañan de sus correspondientes resoluciones. Se recomienda que el lector intente su propia respuesta, antes de ver la que el autor ofrece.

Excepto en el área de Historia y Ciencias Sociales, *en donde se utilizaron trabajos de autores extranjeros, en el resto se contó con la valiosa intervención de destacados científicos e intelectuales mexicanos. La coordinación general de la Serie estuvo a cargo del señor Lic. Hugo Padilla. Los señores doctores Emilio Lluis, Francisco Medina Nicolau, Romeo Flores y Luis Rius, coordinaron, respectivamente, las áreas de* matemáticas, ciencias naturales, historia y ciencias sociales, *y* lengua y literatura.

LIC. ALFONSO RANGEL GUERRA
SECRETARIO GENERAL EJECUTIVO

ASOCIACION NACIONAL DE UNIVERSIDADES
E INSTITUTOS DE ENSEÑANZA SUPERIOR.

I N D I C E

INTRODUCCION

En este folleto pretendemos exponer el mínimo de material necesario para trabajar con soltura los conceptos de Límite y Derivada. Suponemos que el lector está familiarizado con operaciones entre conjuntos, así como con los axiomas de los números reales y su manejo.

Queremos aclarar que parte del material que el lector debe conocer está enunciado en forma de ejercicios, mismos que es conveniente resolver en grupos de trabajo. Insistimos en este método, pues creemos que es en la discusión donde podemos aclarar los conceptos.

M. L. M.

1. ALGO SOBRE R

1.1 Desigualdades.

En este párrafo estudiaremos la *relación de orden* $<$ definida entre números reales. Sabemos que si a y b son dos elementos de **R**, $a < b$, quiere decir que el número a es *menor* que el número b. También, podemos expresar esto diciendo que el número b es *mayor* que el número a, escribiendo $b > a$.

A menudo es útil usar las relaciones "mayor o igual que..." que se denota por $\geqslant$ y "menor o igual que..." que se denota por $\leqslant$. Así, $a < b$ se leerá "a es menor que b" y $b > a$ se leerá "b es mayor que a". Estas dos afirmaciones son equivalentes. Análogamente, $a \leqslant b$ se leerá "a es menor o igual que b" y $b \geqslant a$ se leerá "b es mayor o igual que a".

Debemos recordar que la relación de orden $<$ se define cumpliendo los siguientes axiomas:

i) Si a y b son dos números reales cualesquiera, se tiene que $a < b$ ó $a = b$ ó $b < a$. (Ley de la tricotomía).

ii) Si a, b y c son tres números reales tales que $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$. (Ley transitiva).

iii) Si a y b son números reales tales que $a < b$ y c es un número real arbitrario, entonces

$$a + c < b + c$$

iv) Si a y b son números reales tales que $a < b$ y c es un número real tal que $0 < c$, entonces

$$ac < bc$$

Diremos que un número real a es *positivo* si $a > 0$ y *negativo* si $a < 0$. Diremos que dos números tienen el mismo signo si ambos son positivos o ambos son negativos. Dos números tendrán distinto signo si uno es positivo y el otro es negativo.

Hay varias propiedades de los números reales con ésta relación $<$ que serán utilizadas en este folleto. La mayoría las enunciaremos, el lector debería intentar demostrarlas.

Propiedad 1. Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$.

DEMOSTRACION.

$a < b$ y el axioma (iii) implican que

$$a + c < b + c \quad (1)$$

$c < d$ y el axioma (iii) implican que

$$b + c < b + d \quad (2)$$

(1), (2) y la ley transitiva (axioma ii)) implican que

$$a + c < b + d$$

Q.E.D.

Propiedad 2. Si $a < b$ entonces $-a > -b$

Propiedad 3. Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $ac > bc$

DEMOSTRACION. Si $c < 0$, por la propiedad 2, $-c > -0$, es fácil demostrar que $-0 = 0$, tenemos por lo tanto que $-c > 0$.

Entonces, $a < b$, $-c > 0$ y el axioma (iv) implican que

$$a(-c) < b(-c)$$

o lo que es lo mismo $-(ac) < -(bc)$, esta desigualdad y la propiedad (2) implican que

$$ac > bc$$

Q.E.D.

Propiedad 4. Si a es distinto de 0 entonces $a^2 > 0$

Propiedad 5. Si $0 \leqslant a < b$ y $0 \leqslant c < d$, entonces

$ac < bd$

Propiedad 6. Si a y b tienen el mismo signo, entonces $ab < 0$. Si a y b tienen signos distintos, entonces $ab < 0$. Esta propiedad es la *ley de los signos* para la multiplicación.

Demostraremos sólo el caso en que a y b son negativos. Es decir $a < 0$ y $b < 0$.

Consideremos la desigualdad $a < 0$, al multiplicar ambos lados de ésta por b, que es negativo, por la propiedad **3** la desigualdad cambia de sentido, es decir:

$$ab > 0b$$

No es muy difícil demostrar, utilizando los axiomas de los números reales, que $0b = 0$, por lo tanto:

$$ab > 0$$

Q.E.D.

Propiedad 7. Si a es un número distinto de 0, entonces a^{-1} tiene el mismo signo que a.

Propiedad 8. Si a y b tienen el mismo signo y $a < b$, entonces $a^{-1} > b^{-1}$.

Demostraremos sólo el caso en que a y b son positivos. Consideremos la desigualdad $a < b$;— (1)

$a > 0$ y la propiedad **7** implica que $a^{-1} > 0$, ahora bien por la propiedad **3** podemos multiplicar la desigualdad (1) por a^{-1} sin alterar su sentido, es decir:

$$aa^{-1} < ba^{-1}$$

pero $a \cdot a^{-1} = 1$

por lo tanto $1 < ba^{-1}$ (2)

Como b es positivo, entonces, por la propiedad **7**; $b^{-1} > 0$. La propiedad **3** me permite multiplicar ambos lados de la desigualdad (2) por b^{-1} sin alterar su sentido, así:

$$b^{-1} < (ba^{-1})b^{-1}$$
$$\text{de ahí } b^{-1} < a^{-1}(bb^{-1})$$

como $bb^{-1} = 1$, tenemos que $b^{-1} < a^{-1}$.

Q.E.D.

Propiedad 9. Si $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$ y $a^2 > b^2$, entonces $a > b$.

Propiedad 10. Si $a \geqslant 0$ y $b \geqslant 0$ y $a > b$, entonces $a^2 > b^2$.

Propiedad 11. Si $b \geqslant 0$, entonces $a^2 > b^2$ si y sólo si $a > \sqrt{b}$ o $a < -\sqrt{b}$.

Propiedad 12. Si $b > 0$ entonces $a^2 < b$ si y sólo si $-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$.

Lo importante de estas propiedades es saber utilizarlas para resolver desigualdades.

Ejemplo. Encontrar los valores de x para los cuales

$$2x + 1 > x - 2.$$

Solución.

$$\begin{aligned} 2x + 1 &> x - 2 \\ 2x + 1 &> x - 2 - 1 \\ 2x &> x - 3 \\ 2x - x &> x - 3 - x \\ x &> -3. \end{aligned}$$

Es decir, los valores de x para los cuales se cumple que $2x + 1 > x - 2$, son los elementos del conjunto de los números reales tales que son mayores que -3.

Ejemplo. Encontrar los valores para los cuales x satisface

$$x^2 + x - 2 > 0$$

Solución.

Completando cuadrados tenemos que

$$x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{9}{4} > 0$$

por el axioma (iii) $$x^2 + x + \frac{1}{4} > \frac{9}{4}$$

por lo tanto $$(x + \frac{1}{4})^2 > \frac{9}{4}$$

Por la propiedad **11**:

$$x + \frac{1}{2} > \frac{3}{2} \quad \text{o} \quad x + \frac{1}{2} < -\frac{3}{2}$$

esto es $x > 1$ o $x < -2$

Es decir, el conjunto de los valores para los cuales x satisface $x^2 + x - 2 > 0$ es el de los números que son mayores que 1 ó son menores que -2.

Ejercicio 1. Demostrar, utilizando los axiomas de los números reales, que:

a) $-0 = 0$
b) $a\,0 = 0$ para cualquier $a \in \mathbf{R}$.
c) $a(-c) = (-a)c = -(ac)$.

Ejercicio 2. Demostrar, utilizando los axiomas de orden y la propiedad **4**, que:

a) $1 > 0$; b) $2 > 0$

Ejercicio 3. Demostrar las propiedades **2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11** y **12**.

1.2 Intervalos

Con frecuencia interesa el estudio de funciones definidas en ciertos subconjuntos de los números reales llamados *intervalos*, definiremos aquí dichos subconjuntos.

Consideremos dos números reales a y b, supongamos que $a < b$. Llamaremos *intervalo abierto* a, b; al conjunto de números reales que sean mayores que a y menores que b, denotaremos este conjunto por (a, b), así:

$$(a, b) = \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x < b \}$$

Debemos notar que tanto el número a como el número b no son elementos del conjunto (a, b), pues si bien es cierto que $a < b$, no lo es que $a < a$. Análogamente $a < b$, pero no es cierto que $b < b$.

También podemos decir que no hay algún número que sea el máximo de (a, b), es decir, el *mayor número del conjunto* (a, b). Para demostrar esto haremos ver que dado *cualquier* elemento M de (a, b), siempre es posible encontrar algún elemento de (a, b) que esté a la derecha de M, es decir, que siempre podemos encontrar algún elemento de (a, b) que sea mayor que M.

Sea $M \in (a, b)$. Esto implica que $a < M < b$, demostraremos que el número $\dfrac{M + b}{2}$ es mayor que M y menor que b.

DEMOSTRACION.

Como $M < b$
entonces $M + M < b + M$ por el axioma (iii) de orden

por lo tanto $2M < M + b$

porque $1 + 1 = 2$ y $b + M = M + b$

entonces $M < \dfrac{M + b}{2}$, ——— (1)

esto último por la propiedad 7 y el axioma (iv).

Nuevamente, como $M < b$

$$\begin{aligned} \text{entonces } M + b &< b + b \quad \text{por el axioma (iii)} \\ M + b &< 2b \end{aligned}$$

$$\frac{M+b}{2} < b \qquad (2)$$

(1) y (2) implican que

$$M < \frac{M+b}{2} < b$$

Como $a < M$, por la transitividad del orden tenemos que

$$a < \frac{M+b}{2} < b,$$

por lo tanto $\frac{M+b}{2} \in (a, b)$ y es mayor que M.

Q.E.D.

De manera análoga, se puede demostrar que no hay algún número elemento de (a, b) que sea menor que todos los demás elementos de (a, b).

Entre los intervalos abiertos, hay dos tipos que nos interesarán particularmente:

Si a es un número real denotaremos por (a, ∞) el conjunto de todos los números mayores que a, es decir:

$$(a,\infty) = \{ x \in \mathbf{R} \mid a < x \}.$$

Si b es un número real, denotaremos por $(-\infty, b)$ el conjunto de todos los números menores que b, es decir:

$$(-\infty, b) = \{ x \in \mathbf{R} \mid x < b \}.$$

El *intervalo cerrado a, b;* es el conjunto de números que son *mayores o iguales* que a y *menores o iguales* que b. Este conjunto lo denotaremos por $[a, b]$, así:

$$[a, b] = \{ x \in \mathrm{R} \mid a \leqslant x \leqslant b \}.$$

En este caso los números a y b sí pertenecen al conjunto $[a, b]$. En el caso de a, $a \leqslant b$ porque $a < b$ y $a \leqslant a$ porque $a = a$. Por lo tanto, $a \leqslant a \leqslant b$ y en consecuencia $a \in [a, b]$. De manera análoga se demuestra que $b \in [a, b]$.

Aquí podemos afirmar que hay un elemento de $[a, b]$, a saber b, que es mayor o igual que todos los elementos de $[a, b]$. ¿Ustedes creen que haya un elemento *mínimo* en $[a, b]$?

Definiremos intervalos semiabiertos o semicerrados

$$(a, b] = \{ x \in \mathrm{R} \mid a < x \leqslant b \}$$
$$[a, b) = \{ x \in \mathrm{R} \mid a \leqslant x < b \} .$$

En particular nos interesan:

$$(-\infty, b] = \{ x \in \mathrm{R} \mid x \geqslant b \}$$
$$\text{y } [a, \infty) = \{ x \in \mathrm{R} \mid a \geqslant x \} .$$

Podemos expresar el conjunto de los números reales como:

$$\mathrm{R} = (-\infty, \infty)$$

Ejercicio 4. Sea (a, b) un intervalo abierto, demuestra que $a \notin (a, b)$.

Ejercicio 5. Sea (a, b) un intervalo abierto, demuestra que *no* hay algún elemento de (a, b) que sea menor que todos los demás elementos de (a, b).

Ejercicio 6. Si $[a, b]$ es un intervalo cerrado, demuestra que *sí* hay un elemento de $[a, b]$ que es menor o igual que todos los elementos de $[a, b]$. Dí cuál es ése elemento.

1.3 Distancias y vecindades

Si a es un número real, definiremos el *valor absoluto de* a como la *distancia* del número a al número cero.

Denotaremos esto por $|a|$, es decir $|a| = d(a, 0)$, p.ej. $|3| = d(3,0) = 3$; $|-1524| = d(-1524,0) = 1524$.

Definimos $|a|$ formalmente como:

$$|a| = a \text{ si } a \geqslant 0$$

$$\text{y } |a| = -a \text{ si } a < 0,$$

así, $|4| = 4$ ya que $4 \geqslant 0$; $|-13| = -(-13) = 13$ ya que $-13 < 0$

Este *valor absoluto* cumple las siguientes propiedades:

i) $|a| \geqslant 0$ y $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0$

ii) $|ab| = |a|\ |b|$

iii) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$. (desigualdad del triángulo)

Es fácil comprobar que éstas propiedades se cumplen, y el lector debería hacerlo.

Si a y b son dos números, la distancia de a a b, $d(a, b)$, la denotaremos por $|a-b|$, y así la distancia $d(-3, 5) = |-3-5| = |-8| = d(-8, 0) = 8$.

Tomando esto en cuenta, tenemos que $|a-b| < c$ querrá decir que la distancia del número a al número b es menor que el número c. Si decimos que queremos encontrar los valores para los cuales $|x-3| < 5$, planteamos encontrar el conjunto de números que disten del número 3 en menos de 5.

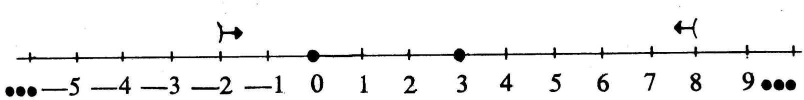


FIG 1-1

Este concepto de distancia cumple las siguientes propiedades.

i) $d(a, b) \geqslant 0$ y $d(a, b) = 0$ si y sólo si $a = b$

ii) $d(a. b) = d(b, a)$

iii) $d(a, b) + d(b, c) \geqslant d(a, c)$

Traduciendo en términos de la notación:

i) $|a—b| \geqslant 0$ y $|a—b| = 0$ si y sólo si $a = b$

ii) $|a—b| = |b—a|$

iii) $|a—b| + |b—c| \geqslant |a—c|$

Echaremos mano de todo esto para definir el concepto de vecindad. Si a es un número real, la *vecindad* (abierta) de a de radio r ($r > 0$) es el conjunto de reales cuya distancia al número a es *menor* que r y se denota por $V_r(a)$, así:

$$V_r(a) = \{ x \in \mathrm{R} \mid d(x, a) < r \}.$$

Usando la notación convenida para la distancia entre dos puntos:

$$V_r(a) = \{ x \in \mathrm{R} \mid |x—a| < r \}.$$

Dado $a \in \mathbf{R}$ y $r > 0$ podemos construir el intervalo abierto $(a—r, a+r)$. Demostraremos que este conjunto y $V_r(a)$ son iguales.

AFIRMACION. Si $a \in \mathbf{R}$ y $r > 0$, entonces
$$V_r(a) = (a — r, a + r).$$

DEMOSTRACION

Para demostrar la igualdad de dos conjuntos, debemos verificar que el primero es un subconjunto del segundo, y que el segundo es un subconjunto del primero. En este caso hay que verificar que:

(a) $V_r(a) \subseteq (a - r,\ a + r)$

(b) $(a - r,\ a + r) \subseteq V_r(a)$

(a) Si x es un elemento arbitrario de $V_r(a)$, entonces $d(x, a) < r$ es decir $|x - a| < r$, esto quiere decir (ver ejercicio **9**) que $-r < x - a < r$. Consideremos la desigualdad de la izquierda $-r < x - a$; por el axioma (iii) de orden: $a - r < x$. Consideremos ahora la desigualdad de la derecha $x - a < r$; por el axioma (iii) de orden: $x < a + r$. Es decir, que $a - r < x < a + r$; entonces por la definición de intervalo abierto

$$x \in (a - r, a + r),$$

demostrando que $V_r(a) \subseteq (a - r,\ a + r)$.

(b) Si x es un elemento arbitrario de $(a - r,\ a + r)$ cumple con $a - r < x < a + r$. La desigualdad del lado izquierdo implica que $-r < x - a$. La del lado derecho que $x - a < r$, es decir: $-r < x - a < r$. Por el ejercicio **9**; $|x - a| < r$, es decir, $d(x, a) < r$ y por lo tanto $x \in V_r(a)$. Hemos mostrado que

$$(a - r, a + r) \subseteq V_r(a).$$

(a) y (b) implican que $V_r(a) = (a - r,\ a + r)$

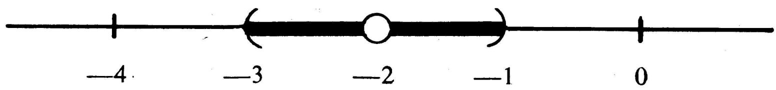
Q.E.D.

Lo importante del resultado de la afirmación es que cualquier vecindad de un punto puede expresarse como un intervalo abierto en la recta real, y cada intervalo abierto (a, b) no es más que una vecindad de su centro, de radio la mitad de la longitud del intervalo, es decir:

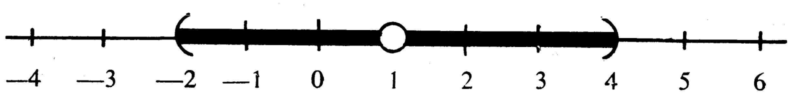
$$(a, b) = V_{\frac{b-a}{2}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Ejemplos

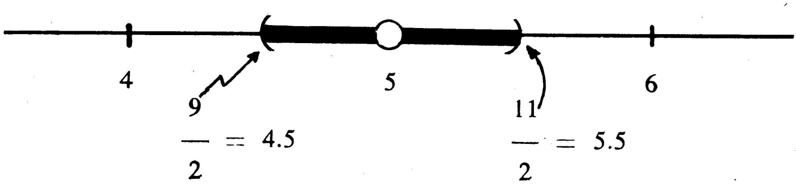
a) $V_1(-2) = (-3, -1)$



b) $V_3(1) = (-2, 4)$



c) $\bar{V}_{\frac{1}{2}}(5) = (\frac{9}{2}, \frac{11}{2})$



Unos conjuntos que nos serán útiles son vecindades *sin su centro* que llamaremos *vecindades agujeradas* o *vecindades reducidas*. Si $a \in \mathrm{R}$ y $r > 0$, la vecindad agujerada de a de radio r se denota por $\bar{V}_r(a)$ y es el conjunto de puntos que distan de a *en menos que* r y en *más que* 0, es decir

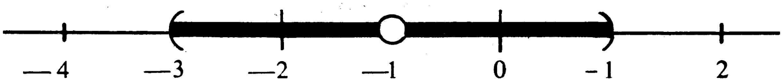
$$\bar{V}_r(a) = \{ x \in \mathbf{R} \mid 0 < d(x, a) < r \}$$

$$\text{o } \bar{V}_r(a) = \{ x \in \mathbf{R} \mid 0 < |x - a| < r \}$$

Vemos que $a \notin \bar{V}_r(a)$, ya que $d(a, a) = 0$ (ver propiedad (i) de la distancia). Para que un real x pertenezca a $\bar{V}_r(a)$, debe cumplir, además de $d(x, a) < r$, con $d(x, a) > 0$; condición que no cumple a.

Vemos también que $\overline{V}_r(a) = (a - r,\ a + r) - \{a\}$, p. ej.

$\overline{V}_2(-1) = (-3,\ 1) - \{-1\} = (-3,\ -1) \cup (-1,\ 1)$



Ejercicio 7. Demuestre que si $|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geqslant 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$

entonces

a) $|a| \geqslant 0$ y $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0$

b) $|ab| = |a| \cdot |b|$

c) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$

Ejercicio 8. Sea f: $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(x) = |x|$, ¿es f una función? Dibuja la gráfica.

Ejercicio 9. Demuestra que $|a| < b$ si y sólo si $-b < a < b$.

Ejercicio 10. Sea $a \in \mathbf{R}$ y m un número. Encuentra r tal que $m \in V_r(a)$. ¿Es r único?

Ejercicio 11. Expresa como intervalo: $V_5(1)$, $V_{\frac{1}{3}}(4)$, $V_5(\frac{1}{5})$, $\overline{V}_8(0)$, $V_\pi(-2)$, $V_2(\pi)$.

Haz una figura en cada caso.

Ejercicio 12. Expresa como vecindades: $(1,2)$; $(-3,5)$; $(-1,\frac{1}{2})$; $(0.08,36)$; $(2,3) \cup (3,4)$, $(-8,-5) \cup (-5,-2)$.

Haz una figura en cada caso.

2. FUNCIONES

2.1 El concepto de función

Supongamos que tenemos dados dos conjuntos, A y B, y una *manera,* o *ley* o *lista* que asocia a cada elemento del conjunto A, uno y sólo un elemento del conjunto B. Decimos entonces que tenemos dada una función f definida en A y con valores en B.

Es decir, una función consta de tres cosas, a saber: Un conjunto A llamado dominio de la función; otro conjunto B llamado el contradominio o codominio de la función, y una regla de correspondencia f, que asocia a cada elemento del conjunto A, uno y sólo un elemento del conjunto B.

Denotamos esto por: $f\colon A \longrightarrow B$ que se lee "f va de A a B". Si x es un elemento de A, entonces, el elemento de B asociado a x por medio de la función, se le denota por $f(x)$, que se lee "f de x", y se llama "la imagen de x bajo f". Esto puede ilustrarse:

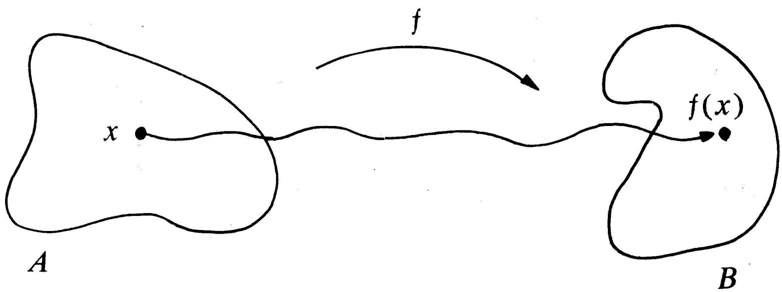


FIG. 2-1

A menudo, en un abuso de lenguaje, suele confundirse la función (dominio, contradominio y regla de correspondencia) con la regla de correspondencia, y decir: la función f que va de A a B. Debe tenerse claro que, para tener definida una función, no basta dar su regla de correspondencia; hay que aclarar cuál es el dominio y el contradominio de la función, y corroborar que la regla de correspondencia asocia a cada elemento del dominio, *uno y sólo un elemento del contradominio.*

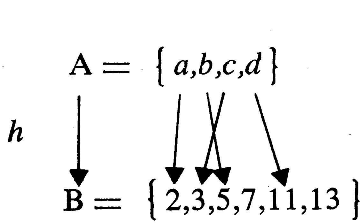
Ejemplo.

Supongamos que A es el conjunto de personas vivas y B el conjunto de los números naturales $\{1, 2, 3, \ldots\}$. Consideremos ahora la siguiente regla de correspondencia: A cada elemento de A, es decir, a cada persona viva, asociémosle su edad en años, es decir, un elemento del conjunto B.

Tenemos definida una función. El dominio de la función es A, el contradominio de la función es B, y la regla de correspondencia: "a cada persona viva le corresponde el número que representa su edad en años". Esta manera de asociar a cada persona viva un número natural, cumple con asociar a cada elemento del dominio de la función uno y sólo un elemento del contradominio, ya que a cada persona viva le corresponde al menos una edad, es decir, no hay personas sin edad; y a lo más una edad, es decir, nadie tiene dos edades (o tres, o más).

Ejemplo.

Supongamos que $A = \{a,b,c,d,\}$ y $B = \{2,3,5,7,11,13\}$, asociemos a cada elemento de A un elemento de B por medio de la siguiente lista:



En este caso, la regla de correspondencia (llamémosle h) asocia a cada elemento de A uno y sólo un elemento de B. Por lo tanto, tenemos dada una función h: $A \longrightarrow B$ definida en A con valores en B y podemos decir que 2 es la imagen de a bajo h o brevemente $h(a) = 2$. De la misma manera:

$$h(b) = 5, \quad h(c) = 3, \quad h(d) = 11.$$

Si $X \subseteq D_f$ definiremos el conjunto

$$f(X) = \{ y \in C_f \mid y = f(x) \text{ con } x \in X \}.$$

Si $f: A \longrightarrow B$, el conjunto $f(A)$ se llama la *imagen* de la función.

Ejercicio 13. Di si lo siguiente es o no es función:

a) D_f = dominio de la función = $\{a,b, c,d\}$
C_f = contradominio de la función = $\{1,5,9, 11,12\}$
regla de correspondencia f tal que:
$f(a) = 1$, $f(b) = 5$, $f(a) = 11$, $f(c) = 12$, $f(d) = 9$

b) $D_g = \{b,c,d,e,f\}$; $C_g = \{a,b,c,d,e,f\}$
regla de correspondencia g tal que:
$g(b)=a$, $g(c)=b$, $g(d)=a$, $g(e)=e$, $g(f)=d$.

c) f: $A \longrightarrow B$
$A = \{2,4,6,8\}$; $B = \{1,5,7,9\}$
$f(2)=1$, $f(4)=7$, $f(8)=9$

d) $D_h = \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$ denota al conjunto de los números reales)
$C_h = \mathbf{R}$
$h(x)=x^2$, es decir, h: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, tal que $h(x)=x^2$.

e) $D_g = \mathbf{R}$, $C_g = \mathbf{R}$, regla de correspondencia g, tal que $g(x) = \sqrt{x}$.

Ejercicio 14. Si considero f: **R** $\to$ **R** tal que $f(x) = \frac{1}{x}$ di: ¿es esto una función? ¿Por qué? ¿Cuál es el dominio?

Ejercicio 15. Da tres ejemplos de funciones que tengan a los números reales como dominio y contradominio.

Ejercicio 16. Considera **R** el conjunto de los números reales y da tres ejemplos de regla de correspondencia de elementos de **R** con elementos de **R** tal que el resultado *no* sea una función.

2.2 Gráfica de una función

Si f: $A \to B$ es una función definida en A, con valores en B y regla de correspondencia $f(x)$, construiremos un conjunto asociado a esta función. Llamaremos a ese conjunto "la gráfica de la función" y lo denotaremos por G_f Este conjunto será el conjunto de parejas ordenadas tales que el primer elemento de cada pareja sea un elemento de A (el dominio de la función) y el segundo elemento de cada pareja sea la imagen del primer elemento bajo la función, así:

$$G_f = \{ (x,y) | x \in A \text{ y } y = f(x) \}$$

es decir, la gráfica de la función es un subconjunto determinado, del producto cartesiano $A \times B$.

Si, por ejemplo, $A = \{a,b,c,d,e\}$; $B = \{1,2,3,4,\}$ y la regla h es $h(a)=1$, $h(b)=3$, $h(c)=4$, $h(d)=2$, $h(e)=1$, tendremos que:

$$G_h = \{ (a,1), (b,3), (c,4), (d,2), (e,1) \}.$$

En el caso de que el dominio y el contradominio de la función sean ambos **R**, la gráfica la podemos expresar como un subconjunto del plano. Por ejemplo, si tenemos f: **R** $\to$ **R** tal que $f(x) = x^2$, la gráfica estará dada por los elementos de **R** $\times$ **R** que sean de la forma (x,x^2), así en la figura, la gráfica de esta función está dada por la parábola $y=x^2$.

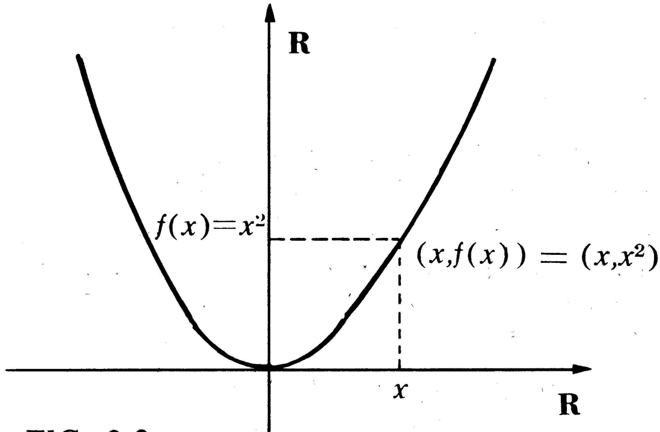


FIG. 2-2

Ejercicio 17. Di cuál es la gráfica de las funciones en la tanda anterior de ejercicios.

Ejercicio 18. Di cuál es la gráfica de las siguientes funciones (ilustra con una figura, si es posible):

a) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x)=x$
b) g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $g(x)=3$
c) h: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $h(x)=x+2$
d) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x)=0$
e) g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $g(x)=(x+1)^2$
f) h: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $h(x)=\operatorname{sen} x$
g) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x)=\cos x$.

Debemos aclarar que trabajaremos exclusivamente con funciones con valores reales, cuyo dominio sea un subconjunto de **R**.

2.3 Composición de funciones

Si f: $A \to \mathbf{R}$ y g: $B \to \mathbf{R}$ son dos funciones tales que el dominio de g está contenido en la imagen de f, definimos la función:

$$g \circ f\colon D_{g \circ f} \to \mathbf{R}.$$

que llamamos "g compuesta con f" o "f seguida de g" con regla de correspondencia $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. El dominio $D_{g \circ f}$ es el conjunto de puntos D_f cuya imagen está en D_g; es decir, $D_{g \circ f} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$.

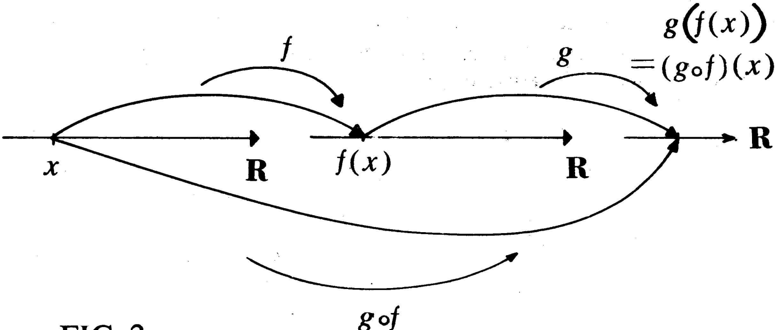


FIG. 2-

Ejemplo.

Si f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = x + 2$

y g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $g(x) = x^3$,

entonces $g \circ f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tiene regla de correspondencia:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+2) = (x+2)^3.$$

El lector debe notar que no es lo mismo $g \circ f$ que $f \circ g$. En muchos casos sólo una de las composiciones está definida.

Ejercicio 19. Sea $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = x - 2$

y g: $\mathbf{R} - \{0\} \to \mathbf{R}$ tal que $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

a) Di cuál es el dominio de $g \circ f$ y cuál el de $f \circ g$.

b) Di cuál es la regla de correspondencia de $g \circ f$ y cuál la de $f \circ g$. ¿Son iguales?

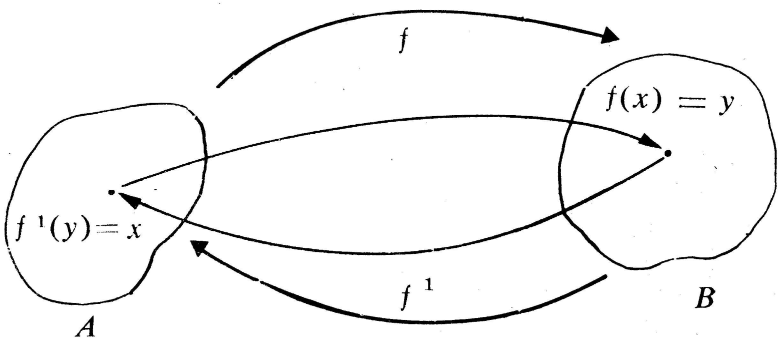
2.4 Función inversa

Sea f: $A \to B$ una función. Asociaremos a cada elemento $y \in B$ un conjunto que llamaremos la imagen inversa de y y lo denotaremos por $f^{-1}(y)$. Los elementos de este conjunto son los puntos de A cuya imagen sea y.

$$f^{-1}(y) = \{x \in A \quad f(x) = y\}$$

En el caso de que *para todo* $y \in B$ tengamos que $f^{-1}(y)$ consta de *sólo un* elemento, podremos definir una función que asocie a cada $y \in B$ el *único* elemento en $f^{-1}(y)$. La función, así definida, es la *función inversa* de f que denotaremos por f^{-1}. Entonces,

$$f^{-1}: B \rightarrow A \text{ y } f^{-1}(y) = x \text{ donde } f(x) = y.$$



Ejemplo. Sea f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(x) = x+3$.

Dado cualquier $y \in \mathbf{R}$ sólo existe un número x tal que $f(x) = y$, a saber $x = y - 3$. Entonces $f^{-1}(y) = y - 3$.

Ejercicio 20. Di en cuáles de los siguientes casos existe la función inversa.

a) f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $f(x) = x^3$

b) g: $[0,2] \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $g(x) = x^2$

c) h: $(0,1) \rightarrow \mathbf{R}$ tal que $h(x) = \dfrac{1}{x}$

Ejercicio 21. Sea f: $A \rightarrow B$ tal que es posib e definir la función inversa f^{-1}: $B \rightarrow A$. Investiga cómo se comporta $f^{-1} \circ f$ y $f \circ f^{-1}$. Di cuál es el dominio y contradominio de cada una de esas funciones.

Sugerimos que este ejercicio se haga en grupos de trabajo.

2.5 Ejemplo de funciones

En este párrafo mencionaremos algunas funciones que se utilizarán en los temas de límite, continuidad y derivada. Sugerimos al lector dibuje la gráfica de cada una.

a) La *función idéntica* en **R** que denotamos por I: **R** $\rightarrow$ **R** cuya regla de correspondencia es $I(x)=x$.

b) Podemos expresar cualquier número real c como una *función constante* que asocie a cada número real x el número c.
c: **R** $\rightarrow$ **R**; $c(x)=c$.

c) Denotaremos por $|x|$ a la regla de correspondencia de la función que asocia a cada número real su distancia al cero.
$| \ |$: **R** $\rightarrow$ **R**; $| \ |(x)=|x|=d(x,0)$.

d) Son importantes las funciones trigonométricas $\operatorname{sen} x, \cos x, \tan x$. Sugerimos al lector que con ayuda de su trigonometría estudie el comportamiento de estas funciones y averigüe en qué subconjunto de **R** es posible definirlas.

2.6 Operaciones entre funciones con valores reales

Es posible definir operaciones de suma, resta, multiplicación y división, entre funciones con contradominio real. Consideremos las funciones f: $A \rightarrow$ **R** con regla de correspondencia $f(x)$ y g: $A \rightarrow$ **R** con regla de correspondencia $g(x)$, donde A es un conjunto arbitrario distinto del vacío. La suma de estas funciones será una función cuyo dominio es A, su contradominio **R** y su regla de correspondencia asociará a cada elemento x de A, el elemento $f(x) + g(x)$ *de* **R**. La suma de estas funciones la denotaremos por:

$f + g$: $A \rightarrow$ **R** donde $(f + g)\ (x) = f(x) + g(x)$.

Esto lo podemos ilustrar de la manera siguiente:

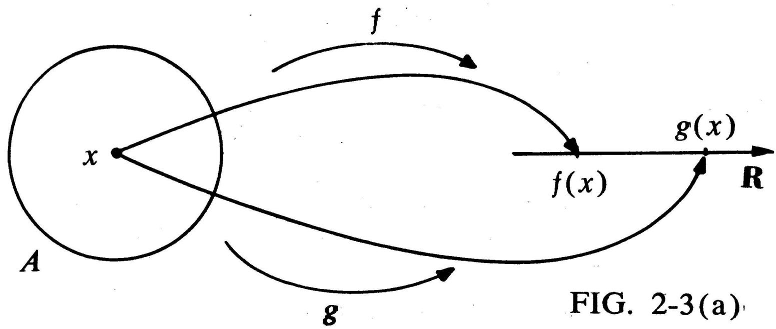


FIG. 2-3(a)

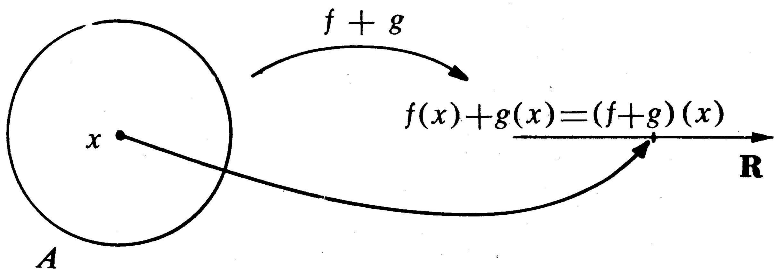


FIG. 2-3(b)

Por ejemplo, si tenemos que f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = x + 1$ y g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $g(x) = x^2$, entonces $f + g$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tiene regla de correspondencia $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + x + 1$.

Dada la función f: $A \to \mathbf{R}$ definiremos la función $-f$: $A \to \mathbf{R}$ como la función que tiene el mismo dominio y contradominio que f y cuya regla de correspondencia es $(-f)(x) = -f(x)$, es decir, la imagen del elemento x de A bajo $-f$ es el inverso aditivo del número real $f(x)$. Por ejemplo, si f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es tal que $f(x) = 3x-1$, entonces $-f$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tendrá como regla de correspondencia $(-f)(x) = -(f(x)) = -(3x-1) = -3x+1$; finalmente, $(-f)(x) = 1-3x$.

Echando mano de las dos definiciones anteriores, definimos: dados f: $A \to \mathbf{R}$ y g: $A \to \mathbf{R}$ con regla de correspondencia $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, la diferencia o resta de funciones. La función

$$f-g: A \to \mathbf{R}$$

va de A en $\mathbf{R}$ y la imagen de cada elemento $x \in A$ bajo $f-g$ es igual a la imagen de ese elemento bajo la función $f+(-g)$, es decir:

$$(f-g)(x)=(f+(-g))(x)=f(x)+(-g)(x)$$
$$=f(x)+(-g(x)).$$

Por ejemplo, si f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es tal que $f(x) = 2x+3$ y g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es tal que $g(x) = x-1$, entonces

$$(f-g)(x) = f(x) + (-g(x)),$$
$$-g(x) = -(x-1) = -x+1$$

entonces $(f-g)(x) = 2x + 3 - x + 1$
$$= x + 4.$$

La multiplicación de dos funciones se define de manera análoga a la suma. Si f: $A \to \mathbf{R}$ y g: $A \to \mathbf{R}$ son dos funciones con regla de correspondencia $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, su producto será la función fg: $A \to \mathbf{R}$ con regla de correspondencia $(fg)(x) = f(x)\, g(x)$ para cualquier $x \in A$. Por ejemplo, si f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es tal que $f(x) = x^2 + 1$ y g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es tal que $g(x) = 4x + 2$, entonces, la regla de correspondencia de fg: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ será: $(fg)(x) = f(x)\cdot g(x) =$
$$(x^2+1)(4x+2) = 4x^3 + 2x^2 + 4x + 2.$$

Consideremos la función g: $A \to \mathbf{R}$ que cumple con: $g(x) \neq 0$ para cualquier $x \in A$. Definimos la función $\frac{1}{g}$: $A \to \mathbf{R}$ con el mismo dominio y contradominio que g y regla de correspondencia $(\frac{1}{g})(x) = \frac{1}{g(x)}$, es decir, la es decir, la imagen de cada elemento x de A bajo la función $\frac{1}{g}$ es el inverso multiplicativo del número real $g(x)$ que es siempre, por hipótesis, distinto de cero. Por ejemplo, si g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es tal que $g(x) = x^3 + 1$, entonces $\frac{1}{g}$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tendrá regla de correspondencia $(\frac{1}{g})(x) =$
$$\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{x^2+1}.$$

Estamos ahora en condiciones de definir la división entre dos funciones con valores reales. Si $f: A \to \mathbf{R}$ y $g: A \to \mathbf{R}$ son dos funciones con regla de correspondencia $f(x)$ y $g(x)$ respectivamente, y además $g(x) \neq 0$ para cualquier $x \in A$, definimos la función

$$\frac{f}{g}: A \to \mathbf{R}$$

como el producto de las funciones f y $\frac{1}{g}$, es decir,

$$\begin{aligned} \frac{f}{g}(x) &= (f \cdot \frac{1}{g})(x) \\ &= f(x) \cdot (\frac{1}{g})(x) \cdot \\ &= f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}, \end{aligned}$$

es decir, la imagen de cada elemento x de A bajo $\frac{f}{g}$ es la imagen de x bajo $f \cdot \frac{1}{g}$ que es, usando las definiciones de producto y de $\frac{1}{g}$, nada menos que $f(x)\ \frac{1}{g(x)}$. Por ejemplo, si $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es tal que $f(x) = x + 2$ y $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ es tal que $g(x) = x^2+1$, entonces $\frac{f}{g}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tendrá como regla de correspondencia:

$$(\frac{f}{g})(x) = f(x)\ \frac{1}{g(x)} = (x+2)\ \frac{1}{x^2+1} = \frac{x+2}{x^2+1}.$$

Ejercicio 22. Encuentre, en donde sea posible, $f+g$, $-f$, $-g$, $f-g$, $g-f$, $\frac{1}{g}$, $\frac{1}{f}$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$, y sus gráficas. Donde no sea posible explica por qué:

a) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = x$
g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $g(x) = 1$

b) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = x+8$
g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $g(x) = x^2+2$

c) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = x^2-1$
g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $g(x) = (x-1)^2$

d) f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = x - \sqrt{2}$
g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $g(x) = x^2+2$

e) f: $\mathbf{R} - \{ 1 \} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$
g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $g(x) = x+1$

Ejercicio 23. ¿Cómo definirías operaciones entre funciones, en caso de que los dominios fueran conjuntos distintos? Es decir, si f: A $\to$ $\mathbf{R}$ tiene regla de correspondencia $f(x)$ y g: $B \to \mathbf{R}$ tiene regla de correspondencia $g(x)$ y $A \neq B$, ¿cómo definirías $f+g$, $f-g$, $-f$, $\dfrac{1}{g}$, $\dfrac{f}{g}$?

Se recomienda que este ejercicio se haga en grupos de trabajo.

Este libro se terminó de imprimir el día 15 de Febrero en los talleres de Litoarte, S. de R. L. La tipografía, composición y supervisión estuvo a cargo de Diseño y Composición Litográfica, S. A. Boulevard M. Avila Camacho núm. 40-316. Naucalpan de Juárez, Edo. de México.

Se imprimieron 50,000 ejemplares.