GÖDEL, ESCHER, BACH:

UNA ETERNA TRENZA DORADA

DOUGLAS R. HOFSTADTER

ciencia y desarrollo

CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA

MEXICO

GÖDEL, ESCHER, BACH:

UNA ETERNA TRENZA DORADA

DOUGLAS R. HOFSTADTER

CONSEJO NACIONAL DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
MEXICO

Título original: **GÖDEL, ESCHER, BACH: An Eternal Golden Braid**

Autor: *Douglas R. Hofstadter*

Traducción: *Mario Arnaldo Usabiaga Brandizzi*

ISBN 968-823-118-5

Impreso y hecho en México

Printed and made in Mexico

Para M. y D.

INDICE

Visión Panorámica

Parte I: GEB

Introducción: Ofrenda músico-lógica. El libro se abre con la historia de la *Ofrenda Musical* de Bach. Este hizo una visita inesperada al Rey Federico el Grande de Prusia, y se le solicitó que improvisara con base en un tema presentado por el monarca. Sus improvisaciones constituyeron el fundamento de aquella gran obra. La *Ofrenda Musical* y su historia forman un tema sobre el cual yo "improviso" a través del libro entero, dando lugar así a una suerte de "Ofrenda Metamusical". Se hace alusión a la autorreferencia y a la interacción entre diferentes niveles, en Bach; esto conduce a una mención de nociones paralelas, presentes en los dibujos de Escher y en el Teorema de Gödel. Como antecedente de este último, se incluye una breve introducción a la historia de la lógica y de las paradojas. A su vez, esto lleva al razonamiento mecánico y a las computadoras y al debate sobre si es posible la Inteligencia Artificial. Cierro este tramo con una explicación de los orígenes del libro: en particular, del cómo y el porqué de los diálogos.

Invención a tres voces. Bach compuso quince invenciones a tres voces. En este diálogo a tres voces, la Tortuga y Aquiles —los principales protagonistas ficticios de los diálogos— son "inventados" por Zenón (tal como ocurrió en realidad, con la finalidad de ilustrar la paradoja de Zenón acerca del movimiento). Es muy breve y se limita a dar el tono de los diálogos venideros.

Capítulo I: El acertijo MU. Se plantea aquí un sistema formal simple (el sistema MIU), y se requiere del lector que resuelva un acertijo, con el objeto de que adquiera familiaridad con los sistemas formales en general. Se introduce cierta cantidad de nociones fundamentales: cadena, teorema, axioma, regla de inferencia, derivación, sistema formal, procedimiento de decisión, acción dentro/fuera del sistema.

Invención a dos voces. Bach también compuso quince invenciones a dos voces. Este diálogo a dos voces no fue escrito por mí, sino por Lewis Carroll, en 1895. Carroll tomó a la Tortuga y a Aquiles prestados de Zenón, y yo a mi vez los tomé de Carroll. El tópico es la relación entre el razonamiento, el razonamiento acerca del razonamiento, el razonamiento acerca del razonamiento acerca del razonamiento, y así siguiendo. Esto traza un paralelo, en cierta forma, con las paradojas de Zenón sobre la imposibilidad del movimiento, destinadas a mostrar, mediante la utilización de la retrogradación infinita, que el razonamiento es imposible. Es una bella paradoja y se la vuelve a citar en diversas ocasiones en el transcurso del libro.

Capítulo II: Significado y forma en matemática. Es presentado otro sistema formal (el sistema pq), aun más simple que el sistema MIU del Capítulo I. En un comienzo, parece carecer de significación, pero súbitamente sus símbolos se revelan como poseedores de significado, en virtud de la forma de los teoremas en que aparecen. Esta revelación es la primera penetración importante en la significación: se trata de su profunda vinculación con el isomorfismo. Diversos temas relacionados con la significación son tocados aquí: verdad, demostración, manipulación simbólica y el elusivo concepto de "forma".

Sonata para solo de Aquiles. Un diálogo que imita las Sonatas de Bach para solo de violín. Aquí es Aquiles el único que habla, puesto que se trata de la transcripción de una conversación telefónica, pero sólo de lo dicho en uno de sus extremos, no del otro, donde se encuentra la Tortuga. La charla versa sobre los conceptos de "figura" y "campo" en diversos contextos: por ejemplo, en las obras de Escher. El diálogo mismo da lugar a una muestra de tal distinción, ya que los parlamentos de Aquiles forman una "figura", en tanto que los de la Tortuga —implícitos en los de Aquiles— forman un "campo".

Capítulo III: Figura y campo. La distinción pictórica entre figura y campo es comparada con la distinción entre teoremas y no teoremas en el terreno de los sistemas formales. La pregunta "¿una figura contiene necesariamente la misma información que su campo?" lleva a la distinción entre conjuntos recursivamente enumerables y conjuntos recursivos.

Contracrostipunto. Este diálogo cumple un papel central en el libro, pues contiene una serie de paráfrasis de la construcción autorreferencial de Gödel y de su Teorema de la Incompletitud. Una de las paráfrasis del Teorema reza: "Hay, para todo fonógrafo, un disco que éste no puede hacer escuchar." El título del diálogo entrecruza las palabras "acróstico" y "contrapunto"; esta última es una expresión latina, utilizada por Bach para hacer referencia a las fugas y cánones que integran su *Arte de la fuga*. Se hacen algunas alusiones explícitas a esta obra. El diálogo mismo esconde algunas elaboraciones acrósticas.

Capítulo IV: Coherencia, completitud y geometría. El diálogo precedente es explicado en la medida de lo posible en esta etapa. Nos vuelve a remitir al problema de cómo y cuándo los símbolos de un sistema formal adquieren significación. A fin de ilustrar la elusiva noción de "términos indefinidos" se narra la historia de las geometrías euclidiana y no euclidiana. Ello, a su vez, nos plantea la noción de coherencia, con respecto a diferentes, y posiblemente "opuestas", geometrías. A través de esta discusión se esclarece el concepto de términos indefinidos y se examina la vinculación de éstos con los procesos de percepción y de pensamiento.

Pequeño laberinto armónico. Está basado en la pieza de Bach, para órgano, del mismo nombre. Es una introducción juguetona a la noción de estructuras recursivas, esto es, autoincluidas. Contiene relatos en el interior de relatos. La narración enmarcadora, en lugar de finalizar de acuerdo a las expectativas, queda abierta, de modo que el lector no obtiene una resolución. Uno de los relatos internos se ocupa de la modulación musical, en particular de una composición para órgano que finaliza en una tonalidad errónea, de modo que el oyente no obtiene una resolución.

Capítulo V: Estructuras y procesos recursivos. La noción de recursividad es presentada dentro de contextos muy diversos: patrones musicales, patrones lingüísticos, estructuras geométricas, funciones matemáticas, teorías físicas, programas de computadora y otros.

Canon por aumentación interválica. Aquiles y la Tortuga tratan de resolver la interrogación: "¿Qué contiene más información, un disco o el fonógrafo que lo ejecuta?" Este extraño problema aparece cuando la Tortuga describe un determinado disco que, cuando es ejecutado por una serie de distintos fonógrafos, produce dos melodías enteramente diferentes: B-A-C-H y C-A-G-E. Ocurre, sin embargo, que ambas melodías son, en un sentido peculiar, la "misma".

Capítulo VI: La localización de la significación. Un amplio examen de la manera en que la significación se distribuye entre el mensaje codificado, el decodificador y el receptor. Los ejemplos presentados incluyen cadenas de ADN, inscripciones aún sin descifrar de antiguas tabletas y discos fonográficos en viaje por el espacio. Se postula la existencia de relación entre la inteligencia y la significación "absoluta".

Fantasía cromática y altercado. Un breve diálogo con muy escasa similitud, fuera del título, respecto a la *Fantasía cromática y fuga*, de Bach. Se ocupa del modo adecuado de manipular oraciones con la finalidad de preservar la verdad y aborda específicamente la cuestión de si existen reglas para la utilización de la palabra "y". Este diálogo tiene mucho en común con el de Lewis Carroll.

Capítulo VII: El cálculo proposicional. Se sugiere aquí que las palabras tales como "y" pueden estar gobernadas por reglas formales. Una vez más son traídas a colación las nociones de isomorfismo y de adquisición automática de significación por los símbolos de un sistema de ese tipo. Al margen, todos los ejemplos de este capítulo son "zentencias": sentencias, es decir, oraciones, tomadas de koans zen. Esto es ex-profeso, y hecho con una punta de malignidad puesto que los koans zen son relatos deliberadamente ilógicos.

Canon Cangrejo. Diálogo basado en una composición del mismo nombre, incluida en la *Ofrenda Musical*. La denominación proviene del hecho de que los cangrejos (se supone) marchan hacia atrás. En este diálogo hace su primera aparición el Cangrejo. Desde el punto de vista del artificio formal y de la interacción entre niveles, éste quizá sea el diálogo más denso del libro. Profundamente entrelazados, aquí, encontramos a Gödel, Escher y Bach.

Capítulo VIII: Teoría tipográfica de los números. Es formulada aquí una extensión del cálculo proposicional, llamada "TNT". Dentro de TNT, se puede vehiculizar el razonamiento teórico-numérico a través de una rígida manipulación simbólica. Son consideradas las diferencias entre el razonamiento formal y el pensamiento humano.

Ofrenda MU. Este diálogo es anunciador de nuevos tópicos. Su tema ostensible es el budismo zen y los koans, pero en realidad se trata de una discusión levemente velada acerca de la teoremidad y la no teoremidad, la verdad y la falsedad de las cadenas pertenecientes a la teoría de los números.

Hay fugaces referencias a la biología molecular, particularmente al Código Genético. La afinidad con la *Ofrenda Musical* no es estrecha, salvo en el título y en el ejercicio de juegos autorreferenciales.

Capítulo IX: Mumon y Gödel. Se hace el ensayo de comentar las curiosas ideas del budismo zen. Ocupa un lugar central, aquí, el monje zen Mumon, autor de acotaciones famosas acerca de muchos koans. En un sentido, las ideas zen ofrecen una semejanza metafórica con ciertas nociones contemporáneas de la filosofía de la matemática. Luego de ser presentado este "ezenario", es expuesta la idea gödeliana fundamental, la de la numeración Gödel, y se da un primer paso hacia el Teorema de Gödel.

Parte II: E G B

Preludio ... Este diálogo está articulado con el siguiente. Ambos están basados en preludios y fugas de *El clave bien temperado*, de Bach. Aquiles y la Tortuga traen un regalo al Cangrejo, quien tiene un invitado: el Oso Hormiguero. El presente consiste en una grabación de *El clave*, que pasan de inmediato. Al escuchar un preludio, los reunidos comentan la estructura de preludios y fugas, lo cual lleva a Aquiles a preguntar cómo se oye una fuga, si como un conjunto, o como una suma de partes. Se trata del debate entre holismo y reduccionismo, pronto retomado en la *Fuga Hormiguesca*.

Capítulo X: Niveles de descripción y sistemas de computadora. Son examinados diversos niveles de la observación de pinturas, de tableros de ajedrez y de sistemas de computadoras. Este último tema es luego estudiado en detalle, lo cual implica la descripción de lenguajes de máquina, lenguajes ensambladores, lenguajes compiladores, sistemas operativos, etc. La discusión gira después hacia sistemas compuestos de otros tipos, tales como los equipos deportivos, los núcleos, los átomos, el clima, etc. Surge el interrogante de cuántos niveles intermedios existen y, por cierto, de si tales niveles existen, en definitiva.

... y Fuga ... Hormiguesca. Imitación de una fuga musical: cada voz entra diciendo lo mismo. El tema —holismo *versus* reduccionismo— es presentado a través de una imagen recursiva compuesta por palabras compuestas por palabras más pequeñas, etc. Las palabras que aparecen en los cuatro niveles de esta curiosa ilustración son "HOLISMO", "REDUCCIONISMO" y "MU". La conversación se desplaza hacia una amiga del Oso Hormiguero, la tía Hilaria, una colonia de hormigas dotada de conciencia. El tópico de la discusión son los diversos niveles de los procesos de pensamiento de la Tía. El diálogo oculta muchos artificios fugales. A modo de insinuaciones al lector, se hace referencia a artificios paralelos que aparecen en la fuga que los cuatro amigos están escuchando. Al final de la *Fuga Hormiguesca* retornan, considerablemente transformados, temas del *Preludio*.

Capítulo XI: Cerebro y pensamiento. "¿Cómo los pensamientos pueden tener su apoyo en el hardware del cerebro?" es el tópico de este capítulo. Para comenzar, se lanza una mirada panorámica sobre las estructuras de pequeña y gran escala del cerebro. Después, se analiza especulativamente, y con cierto detalle, la relación entre conceptos y actividad neural.

Suite anglofrancogermanicoespañola. Un interludio, consistente en el poema nonsense "Jabberwocky", de Lewis Carroll. Lo acompañan dos traducciones, una al francés y otra al alemán, ambas del siglo pasado [y una al español, contemporánea, agregada por esta edición].

Capítulo XII: Mente y pensamiento. Los poemas precedentes plantean de manera vigorosa el interrogante de si pueden *trazarse* "correspondencias" entre lenguas o, inclusive, entre mentes distintas. ¿Cómo es posible la comunicación entre dos cerebros físicos separados? ¿Qué tienen en común los cerebros humanos? Se propone una analogía geográfica a fin de sugerir una respuesta. Surge la pregunta: "¿Puede ser comprendido un cerebro, en un sentido objetivo, desde fuera del mismo?"

Aria con variaciones diversas. Un diálogo cuya forma se basa en las *Variaciones Goldberg*, de Bach, y cuyo contenido se vincula con problemas teórico-numéricos tales como la conjetura Goldbach. Este híbrido persigue el propósito principal de mostrar cómo la teoría de los números tiene su origen sutil en el hecho de que hay muy diversas variaciones sobre el tema de la búsqueda dentro de un espacio infinito. Algunas variaciones conducen a indagaciones infinitas, otras a indagaciones finitas, y otras más vacilan entre ambos polos.

Capítulo XIII: BlooP y FlooP y GlooP. Estos son los nombres de tres lenguajes de computadora. Los programas BlooP pueden únicamente cumplir búsquedas predictiblemente finitas, mientras que los programas FlooP pueden hacerlo con búsquedas impredictibles o, inclusive, infinitas. El objeto de este capítulo es aportar una visión intuitiva de las nociones de función recursiva primitiva y general, en teoría de los números, pues son esenciales para la demostración de Gödel.

Aire sobre la cuerda de G. Un diálogo que refleja en palabras la construcción autorreferencial de Gödel. La idea corresponde a W. V. O. Quine. Este diálogo actúa como prototipo del capítulo que sigue.

Capítulo XIV: Sobre proposiciones formalmente indecidibles de TNT y sistemas afines. El título de este capítulo es una adaptación del título del artículo de Gödel de 1931, el cual significó la primera publicación del Teorema de la Incompletitud. Las dos partes principales de la demostración de Gödel han sido cuidadosamente examinadas. Se muestra así que la suposición de coherencia de TNT obliga a concluir que TNT (o cualquier sistema similar) es incompleto. Son analizadas las vinculaciones existentes con las geometrías euclidiana y no euclidiana, lo mismo que las implicaciones que surgen con respecto a la filosofía de la matemática.

Cantatatata ... de cumpleaños. Donde Aquiles no puede convencer a la marrullera y descreída Tortuga de que ese día es su (de Aquiles) cumpleaños. Los repetidos pero infructuosos intentos de Aquiles por lograrlo prefiguran la repetibilidad de la argumentación de Gödel.

Capítulo XV: Brincos fuera del sistema. Es mostrada la repetibilidad de la argumentación de Gödel, junto con la implicación de que TNT no es sólo incompleto, sino "esencialmente incompleto". La indudablemente conspicua postulación de Lucas, en el sentido de que el Teorema de Gödel demuestra que el pensamiento humano no puede en ningún sentido ser "mecánico", es aquí analizada, y hallada defectuosa.

Pensamientos edificantes de un fumador. Un diálogo que aborda muchos tópicos, comunicados por la característica de estar conectados con la autorreplicación y la autorreferencia. Entre los ejemplos presentados, hay cámaras de televisión que filman pantallas de televisión, y virus y otras entidades subcelulares que se autoensamblan. El título proviene de un poema de J. S. Bach, introducido de una manera peculiar.

Capítulo XVI: Autorref y autorrep. Este capítulo se refiere a la conexión entre la autorreferencia, en sus diversas manifestaciones, y las entidades autorreproductoras (por ejemplo, programas de computadora o moléculas de ADN). Son estudiadas las relaciones entre una entidad autorreproductora y los mecanismos externos a ella que colaboran en su autorreproducción (por ejemplo, una computadora o proteínas); se analiza en particular la complejidad de la distinción. El tópico central del capítulo es el modo en que se traslada la información a través de los diversos niveles de tales sistemas.

El Magnifican . . . grejo, por supuesto. Este título es un juego verbal con base en el *Magnificat* en Re, de Bach. El asunto se centra en el Cangrejo, quien parece contar con un poder mágico que lo habilita para distinguir entre afirmaciones verdaderas y falsas de teoría de los números, mediante su lectura como composiciones musicales: el procedimiento consiste en ejecutarlas en su flauta y en la determinación inmediata de si son "bellas" o no.

Capítulo XVII: Church, Turing, Tarski y otros. El ficticio Cangrejo del diálogo precedente es sustituido por varias personas reales, dotadas de pasmosas facultades matemáticas. La Tesis Church-Turing, que vincula la actividad mental con la computación, es presentada a través de distintas versiones de validez discrepante. Se las analiza a todas en función, especialmente, de sus proyecciones en la simulación mecánica del pensamiento humano, o en la programación de una máquina que pueda sentir o crear la belleza. La conexión entre actividad cerebral y computación plantea algunos otros tópicos: el problema de la detención, de Turing, y el Teorema de la Verdad, de Tarski.

SHRDLU, juego de la inventividad del hombre. Este diálogo ha sido tomado de un artículo de Terry Winograd sobre su programa SHRDLU; solamente han sido modificados algunos nombres. En él, un programa se comunica con una persona, a propósito del denominado "mundo de bloques", utilizando el idioma de un modo un tanto solemne. El programa de computadora muestra cierta comprensión real, dentro de los límites de su mundo. El título del diálogo es una paráfrasis de *Jesu, Joy of Man's Desiring*, título asignado a uno de los movimientos de la Cantata 147, de Bach.*

* El título original del diálogo es: *SHRDLU, Toy of Man's Designing.* [T.]

Capítulo XVIII: Inteligencia Artificial: mirada retrospectiva. Este capítulo se inicia con una exposición de la célebre "verificación Turing": una propuesta de Alan Turing, un adelantado en el campo de las computadoras, destinada a detectar la presencia o ausencia de "pensamiento" en una máquina. Sigue luego una resumida historia de la Inteligencia Artificial. Esta última abarca programas que pueden —en alguna medida— practicar juegos, demostrar teoremas, resolver problemas, componer música, ejercitar la matemática y utilizar "lenguajes naturales" (el inglés, por ejemplo).

Contrafactus. A propósito de cómo organizamos inconscientemente nuestros pensamientos a fin de poder imaginar, en todo momento, variantes hipotéticas del mundo real. Acerca, también, de muestras aberrantes de esta facultad, tal como la que caracteriza al Perezoso, un nuevo personaje, fanático amante de las frituras francesas y feroz impugnador de la contrafactibilidad.

Capítulo XIX: Inteligencia Artificial: mirada prospectiva. El diálogo precedente desencadena la discusión acerca del modo en que el conocimiento es representado en distintas capas contextuales. Esto conduce a la moderna idea, propia de IA, de "marcos". Para ilustrar esto de modo concreto, se plantea una serie de problemas de reconocimiento de patrones visuales, cuyo manejo requiere el uso de la noción de marco. Luego, es examinada la profunda cuestión de la interacción de los conceptos en general, lo cual lleva a algunas especulaciones acerca de la creatividad. El capítulo concluye con un grupo de "Preguntas y Especulaciones" personales, relativas a IA y a la mente, en general.

Canon Perezoso. Un canon que imita a un similar bachiano, donde una voz interpreta la misma melodía que otra, sólo que el revés y dos veces más lento, en tanto una tercera voz queda en libertad. Aquí, el Perezoso dice lo mismo que la Tortuga, sólo que negándolo (en un sentido amplio del término) y en forma doblemente pausada, en tanto Aquiles juega libre.

Capítulo XX: Bucles Extraños o Jerarquías Enredadas. Gran desenlace de muchas de las ideas relativas a los sistemas jerárquicos y a la autorreferencialidad. Esto se asocia con los enmarañamientos que se producen cuando los sistemas se vuelven sobre sí mismos: por ejemplo, la ciencia puesta a demostrar la ciencia, los gobiernos cuando investigan sus propios entuertos, el arte que viola las reglas del arte y, finalmente, los pensamientos humanos dedicados a sus propios cerebros y mentes. ¿El Teorema de Gödel tiene algo que decir acerca de este "enredo" último? ¿El libre albedrío y la noción de conciencia están conectados con el Teorema de Gödel? El capítulo termina enlazando entre sí, una vez más, a Gödel, Escher y Bach.

Ricercar a seis voces. Este diálogo es un divertimento exhuberante en el que intervienen muchas de las ideas que han recorrido el libro. Se trata de una reactualización de la historia de la *Ofrenda Musical*, con la cual comienza el libro; simultáneamente, es una "traducción" a palabras de la composición más compleja de la *Ofrenda Musical*: el *Ricercar a seis voces*. Esta dualidad infunde al diálogo más niveles de significación que los presentes en ningún otro del libro. Federico el Grande es remplazado por el Cangrejo, los pianos por computadoras, y así siguiendo. Se producen muchas cosas sorprendentes. El contenido del diálogo abarca problemas relativos a la mente, a la conciencia, al libre albedrío, a la Inteligencia Artificial, a la verificación Turing, etc., todos los cuales han sido presentados con anterioridad. Concluye con una referencia implícita al comienzo del libro, convirtiendo así a éste en un inmenso bucle autorreferencial, que simboliza a la vez la música de Bach, la pintura de Escher y el Teorema de Gödel.

Lista de Ilustraciones

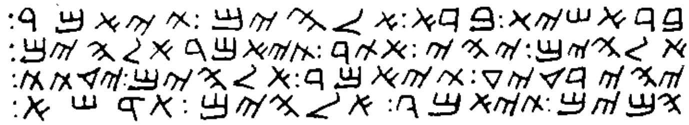
Cubierta: Un trip-let * "GEB" y otro "EGB" suspendidos en el espacio, arrojando su sombra simbólica sobre tres planos que se encuentran entre sí en el rincón de un cuarto. ("Trip-let" es el nombre que he asignado a los bloques modelados de tal manera que sus sombras, en tres direcciones ortogonales, constituyen tres letras diferentes. El trip-let se me ocurrió de modo súbito una tarde en que estaba discurriendo a propósito de la mejor manera de simbolizar la unidad de Gödel, Escher y Bach mediante alguna forma de fusión, en un diseño llamativo, de sus nombres. Los dos trip-lets que aparecen en la cubierta fueron diseñados y construidos por mí, utilizando principalmente una sierra de cinta y una fresa radial para los orificios; el material empleado es madera de pino "redwood" y miden exactamente 4 pulgadas por lado.)

Al pie de esta lista: Comienzo del Génesis, en antiguo hebreo

Parte I: El trip-let "GEB" lanzando sus tres sombras ortogonales.

* "Triplet" significa triplete; por otro lado, "trip-let", con ese guión interior, actualiza la idea de *tres* mediante su primer miembro, y la idea de *letra* mediante el segundo. [T.]

Parte II: El trip-let "EGB" lanzando sus tres sombras ortogonales.



Palabras de Agradecimiento

Este libro fue tomando forma en mi mente durante un período de casi dos décadas, puesto que a la edad de trece años yo reflexionaba acerca de cómo pensaba en inglés y en francés. Antes aun, hubo signos claros de cuáles eran mis intereses primordiales: recuerdo que a edad más temprana que la mencionada, no había cosa más fascinante para mí que la idea de tomar tres 3, ¡y hacer tres operaciones con *ellos mismos*! Estaba seguro de que se trataba de algo tan sutil que ningún otro podía concebirlo, pero un día me atreví a preguntar a mi madre a qué número se llegaría de esta forma, y ella me respondió "Nueve". Sin embargo, me quedó la duda de si ella había comprendido lo que yo quería significar. Más adelante, mi padre me inició en los misterios de la raíz cuadrada y de i . . .

Debo a mis padres más que a nadie. Han sido pilares en los cuales he podido apoyarme en todo momento. Ellos me guiaron, me inspiraron, me alentaron y me respaldaron. Siempre, y más que ninguna otra persona, creyeron en mí: es a ellos a quienes dedico este libro.

Tengo que expresar mi especial reconocimiento a dos viejos amigos, Robert Boeninger y Peter Jones, pues me ayudaron a moldear un millón de formas de pensamiento; sus influencias e ideas están diseminadas a lo largo y a lo ancho de esta obra.

Mucho es lo que adeudo a Charles Brenner, pues me enseñó a programar, cuando ambos éramos jóvenes, y me impulsó y acicateó constantemente —un elogio implícito—, además de formularme críticas ocasionales.

Me es grato reconocer la inmensa influencia de Ernest Nagel, durante mucho tiempo mi amigo y maestro. Soy un apasionado de "Nagel y Newman", y es considerable lo que he aprendido durante nuestras incontables conversaciones de tiempo atrás en Vermont y, más recientemente, en Nueva York.

Howard DeLong, a través de su libro, volvió a despertar en mí un amor, durante largo tiempo dormido, hacia los temas que desarrollo en este libro. Mi agradecimiento por ello es verdaderamente muy profundo.

David Jonathan Justman me enseñó en qué consiste una Tortuga: un ser ingenioso, persistente y con sentido del humor, aficionado a la paradoja y a la contradicción. Espero que lea este libro, que tanto le debe a él, y lo disfrute.

Scott Kim ha ejercido en mí una influencia gigantesca. Desde que nos conocimos, unos dos años y medio atrás, el grado de nuestra compenetración mutua ha sido increíble. Además de sus contribuciones concretas en materia de pintura, música, humor, analogías, etc. —incluyendo el muy valioso aporte de su trabajo desinteresado, en momentos cruciales— Scott ha abierto nuevas perspectivas y esclarecimientos que han modificado mis puntos de vista acerca de mis proyectos, a medida que éstos se fueron desarrollando. Si hay alguien que comprende este libro, se trata de Scott.

Repetidas veces he recurrido a Don Byrd —quien conoce este libro de atrás para adelante, de adelante para atrás y en todas direcciones— en procura de consejo sobre problemas de pequeña y gran monta. Cuenta con una apreciación exacta en lo referente a los objetivos globales y a la estructura de esta obra, y una y otra vez me ha sugerido ideas que gustosamente he incorporado. Sólo lamento tener que privarme de incluir las ideas que se le ocurran a Don en el *futuro*, cuando el libro ya esté impreso. Y no puedo dejar de agradecerle a Don la maravillosa flexibilidad en la inflexibilidad de su programa SMUT, impresor de música. Dedicó largas jornadas y arduas noches a persuadir a SMUT de, en lugar de descansar, elaborar artificios descabellados. Algunos de sus logros han sido incluidos en las ilustraciones de este libro, pero la influencia de Don está presente en la obra íntegra, lo cual me complace enormemente.

Quizá yo no podría haber escrito este libro de no haber sido por las facilidades que me brindó para ello el Institute for Mathematical Studies in the Social Sciences, de la Stanford University. Su director, Pat Suppes, es un amigo de muchos años que se mostró sumamente generoso conmigo, hospedándome en Ventura Hall, dándome acceso a un excelente sistema de computadora y, en general, a un magnífico ambiente de trabajo, durante dos años enteros, y algo más.

Esto me hace presente a Pentti Kanerva, el autor del programa editor de textos al cual este libro debe su existencia. Ya he repetido muchas veces que escribir este libro me hubiera llevado el doble de tiempo si no hubiese podido utilizar el "TV-Edit", ese elegante programa de inspiración tan simple que sólo Pentti podría haber diseñado. También debo agradecer a Pentti que me haya dado la posibilidad de hacer algo que a muy pocos autores les es posible: tipografiar mi propio libro. Pentti ha sido uno de los impulsores principales del desarrollo de la composición tipográfica por computadora en el IMSSS. Sin embargo, hay otra notable cualidad de Pentti revestida, a mi juicio, de la misma importancia: su sentido del estilo. Si este libro *se ve* bien, gran parte del mérito corresponde a Pentti Kanerva.

Este libro nació físicamente en el ASSU Typesetting Shop. Quiero dejar constancia de mi sincero agradecimiento a su directora, Beverly Hendricks, y a sus colaboradores, por la ayuda brindada en momentos extremadamente críticos, y por su inalterable buena disposición cuando se sucedían las catástrofes. También quiero agradecer a Cecille Taylor y a Barbara Laddaga, quienes tuvieron a su cargo la mayor parte del trabajo de imprimir la galeras.

A través de los años, mi hermana Laura Hofstadter ha contribuido mucho a la formación de mi visión del mundo. Su influencia está presente tanto en la forma como en el contenido de este libro.

Quiero expresar mi reconocimiento hacia mis nuevos y viejos amigos Marie Anthony, Sydney Arkowitz, Bengt Olle Bengtsson, Felix Bloch, Francisco Claro, Persi Diaconis, Nâi-Huá Duàn, John Ellis, Robin Freeman, Dan Friedman, Pranab Ghosh, Michael Goldhaber, Avril Greenberg, Eric Hamburg, Robert Herman, Ray Hyman, Dave Jennings, Dianne Kanerva, Lauri Kanerva, Inga Karliner, Jonathan y Ellen King, Gayle Landt, Bill Lewis, Jos Marlowe, John McCarthy, Jim McDonald, Louis Mendelowitz, Mike Mueller, Rosemary Nelson, Steve Omohundro, Paul Oppenheimer, Peter E. Parks, David Policansky, Pete Rimbey, Kathy Rosser, Wilfried Sieg, Guy Steele, Larry Tesler, François Vannucci, Phil Wadler, Terry Winograd y Bob Wolf: todos ellos han entrado en "resonancia" conmigo en ocasiones cruciales de mi vida y, en consecuencia, han contribuido en varias y diversas formas a este libro.

Escribí dos veces este libro. Después de haberlo escrito una primera vez, volví a comenzar desde cero y lo reescribí. El intento inicial se produjo cuando yo era un recién graduado en física que continuaba sus estudios en la University of Oregon, y cuatro profesores se mostraron enormemente indulgentes con respecto a mis extraviadas perspectivas: Paul Csonka, Rudy Hwa, Mike Moravcsik y Gregory Wannier. Aprecio su actitud comprensiva; además, Paul Csonka leyó toda una versión primitiva y formuló comentarios provechosos.

Agradezco a E. O. Wilson su lectura y comentario de una primera versión de mi *Preludio y Fuga Hormiguesca*.

Agradezco a Marsha Meredith el haberse constituido en metautora de un divertido koan.

Agradezco a Marvin Minsky la memorable conversación que mantuvimos un día de marzo en su casa, fragmentos de la cual el lector encontrará reconstruidos aquí.

Agradezco a Bill Kaufmann sus consejos en materia de publicación, y a Jeremy Bernstein y a Alex George por sus palabras de estímulo cuando fueron necesarias.

Mi muy caluroso reconocimiento a Martin Kessler, Maureen Bischoff, Vincent Torre, Leon Dorin y el resto de los miembros de Basic Books, por asumir este riesgo editorial, cosa bastante desacostumbrada.

Agradezco a Phoebe Hoss por realizar eficazmente la difícil tarea de imprimir la tirada, y a Larry Breed por su valiosa lectura final de pruebas.

Agradezco a mis muchos compañeros de alojamiento, que me recogieron tantos mensajes telefónicos durante varios años, como también al personal del Pine Hall, quien desarrolló y mantuvo gran parte del hardware y del software del cual este libro ha dependido tan vitalmente.

Agradezco a Dennis Davies, de la Stanford Instructional Television Network, por su aporte consistente en disponer las "cámaras de televisión autoincluidas" para que yo dedicara horas enteras a fotografiarlas.

Agradezco a Jerry Pryke, Bob Parks, Ted Bradshaw y Vinnie Aveni, del taller mecánico del High Energy Physics Laboratory, de Stanford, por ayudarme generosamente a construir los trip-lets.

Agradezco a mi tío y a mi tía, Jimmy y Betty Givan, su regalo de Navidad que jamás imaginaron me encantaría tanto: una "Caja Negra" sin ninguna otra función que la de autodesconectarse.

Finalmente, quiero expresar mi especial reconocimiento hacia mi profesor de inglés de primer año, Brent Harold, quien fue el primero que me hizo interesar por el zen; hacia Kees Gugelot, quien me dio una grabación de la *Ofrenda Musical*, un melancólico noviembre de hace mucho tiempo; y a Otto Frisch, en cuya oficina de Cambridge presencié por vez primera la magia de Escher.

He tratado de recordar a todas las personas que han contribuido a la realización de este libro, pero es seguro que he incurrido en alguna omisión.

En cierta forma, este libro es una manifestación de mi fe. Espero que ésta se transmita a mis lectores y que mi entusiasmo y mi reverencia hacia ciertas ideas penetren en el corazón y la mente de algunas personas. Es todo lo que ansío.

D. R. H.
Bloomington y Stanford
Enero de 1979.

K. Gödel

M.C. Echer

J. S. Bach

PARTE I

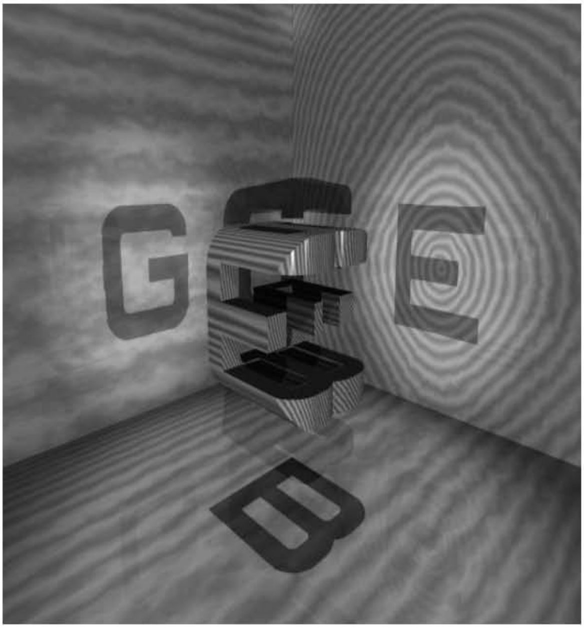


Figura 1. Johann Sebastian Bach en 1748. De una pintura de Elias Gottlieb Haussmann.

Introducción: Ofrenda músico-lógica

Autor:
Federico el Grande, rey de Prusia, subió al trono en 1740. Se le recuerda en las historias a causa sobre todo de su astucia militar, pero era también hombre dado a la vida de la inteligencia y del espíritu. Su corte de Potsdam fue uno de los más brillantes centros de actividad intelectual en la Europa del siglo XVIII. Allí pasó veinticinco años el célebre matemático Leonhard Euler, y entre los visitantes de esa corte se cuentan muchos otros matemáticos y hombres de ciencia, y también filósofos como Voltaire y La Mettrie, que estando en Potsdam escribieron algunas de sus obras más importantes.

Pero el verdadero amor del rey era la música. Federico fue un entusiasta flautista y compositor, y algunas de sus obras se ejecutan todavía hoy de vez en cuando. Fue además, entre los protectores de las artes, uno de los primeros en percibir las virtudes del recién creado "piano-forte" ("suave-fuerte"). El piano había venido evolucionando, durante la primera mitad del siglo XVIII, como forma modificada del clavecín. Lo malo del clavecín era que el volumen de sonido de las piezas en él ejecutadas era prácticamente uniforme: no había manera de hacer que una tecla sonara más fuerte o más suave que las vecinas. El "piano-forte", como su nombre lo dice, vino a remediar esa deficiencia. Desde Italia, donde Bartolommeo Cristofori construyó el primero, la idea del instrumento suave-fuerte se difundió por todas partes. Gottfried Silbermann, el mejor constructor de órganos de la Alemania de entonces, se había propuesto hacer un piano-forte "perfecto". Naturalmente, el apoyo más vigoroso de sus esfuerzos le vino del rey. Se dice que Federico poseía nada menos que quince pianos de Silbermann.

Bach

Federico, admirador de los pianos, admiraba también a un organista y compositor llamado Johann Sebastian Bach. Las composiciones de este Bach gozaban de cierta notoriedad. Había quienes las calificaban de "hinchadas y confusas", mientras otros las ponderaban como incomparables obras maestras. Lo que nadie ponía en duda era la maestría con que Bach improvisaba en el órgano. Ser organista suponía en esos tiempos la capacidad no sólo de tocar piezas, sino también de inventarlas de repente, y Bach era famosísimo en todas partes por sus notables habilidades de improvisador. (En el libro de Hans Theodore David y Arthur Mendel, *The Bach Reader*, hay anécdotas deliciosas acerca de eso.)

En 1747 tenía Bach sesenta y dos años, y su fama, unida a la de uno de sus hijos, había llegado a Potsdam; de hecho, Carl Philipp Emanuel Bach era el Capellmeister (maestro de capilla) de la corte de Federico. Hacía ya años que el rey, con delicadas insinuaciones, le había dado a entender a Carl Philipp Emanuel lo mucho que le gustaría que el viejo Bach viniera a visitarlo, pero su deseo no había llegado a realizarse. Federico estaba particularmente interesado en que Bach probara el sonido de sus nuevos pianos Silbermann, pues preveía (atinadamente) que el piano iba a ser la gran nueva ola de la música.

Federico solía organizar en su corte veladas de música de cámara. A menudo él mismo actuaba como solista de algún concierto para flauta. El cuadro cuya fotografía se ve aquí (figura 2) representa una de esas veladas musicales; es obra del pintor alemán Adolph von Menzel, el cual hizo en el siglo XIX una serie de cuadros que muestran los distintos aspectos de la vida de Federico el Grande. Sentado al clavecín está C. Ph. E. Bach, y el personaje de la extrema derecha es Joachim Quantz, maestro de flauta del rey y única persona a quien le estaba permitido señalarle a Federico sus fallas como flautista. En cierta ocasión, en mayo de 1747, cayó allí un visitante inesperado. Pero dejemos que sea Johann Nikolaus Forke, uno de los primeros biógrafos de Bach, quien cuente la historia:

> Una noche, en los momentos en que (Federico) preparaba ya su flauta y sus músicos estaban listos para comenzar, un funcionario le trajo la lista de los extranjeros llegados ese día. Con su flauta en la mano echó una ojeada a la lista, y de pronto, dirigiéndose a los músicos allí reunidos, les dijo con acento de cierta agitación: "Señores, el viejo Bach está aquí." Dejó entonces a un lado la flauta y sin más dilación despachó a alguien para invitar al viejo Bach, que se había apeado en la posada de su hijo, a presentarse en palacio. Quien me contó la historia fue Wilhelm Friedemann, que acompañaba a su padre, y no puedo menos que decir que todavía recuerdo con gusto la manera como me la contó. En esos tiempos era costumbre hacer cumplimientos sumamente prolijos. La primera aparición de J. S. Bach ante tan gran rey, que no le había dado tiempo ni de cambiar su vestimenta de viaje por el atuendo negro que usan los músicos, tuvo que estar acompañada, por fuerza, de toda clase de disculpas. No me detendré aquí en ellas, pero sí diré que, en el relato de Wilhelm Friedemann, constituían todo un exquisito diálogo entre el rey y el viejo músico empeñado en disculparse.
>
> Lo que hace más al caso es que el rey renunció a su concierto de esa noche e invitó a Bach, conocido ya de todos como "el viejo Bach", a probar los fortepianos, hechos por Silbermann, que tenía en varios salones del palacio. (Aquí pone Forkel una nota de pie de página: "Tan aficionado era el rey a los pianofortes manufacturados por Silbermann, de Freyberg, que había resuelto comprárselos todos. Llegó así a reunir quince. Tengo noticias de que todos ellos continúan, ya inservibles, en distintos rincones del palacio real.") Seguido de sus músicos, el rey recorrió todos los salones, invitando a Bach a probar cada uno de los pianos y a tocar en ellos alguna improvisación. Después de probar así varios pianos, Bach le pidió al rey un tema para una fuga, ofreciéndose a ejecutarla de inmediato, sin preparación alguna. El rey quedó admirado de la manera tan sabia como su tema pasó de repente a ser una

Figura 2. Concierto de flauta en Sanssouci, *pintura de Adolph von Menzel, 1852.*

fuga; y, probablemente para ver hasta dónde podía llegar ese arte, expresó el deseo de oír una fuga a seis voces obligadas. Pero como no cualquier tema se presta para una armonía tan rica, Bach mismo eligió uno, y al punto, con gran asombro de todos los circunstantes, lo desarrolló según el deseo del rey, de la misma sabia y magnífica manera como había desarrollado el tema regio. Su Majestad dijo finalmente que le gustaría oírlo tocar el órgano. Así, pues, al día siguiente Bach fue llevado a probar todos los órganos de Potsdam, tal como antes había sido llevado a probar todos los pianos de Silbermann. De regreso ya en Leipzig, Bach trabajó sobre el tema inventado por el rey y escribió piezas a tres y a seis voces, añadió varios pasajes artificiosos en forma estricta de canon, mandó grabar la obra con el título de "Musikalisches Opfer" (*Ofrenda Musical*), y se la dedicó al inventor.[1]

Figura 3. El Tema Real.

En el ejemplar de la *Ofrenda Musical* enviado al rey incluyó Bach una carta dedicatoria interesante, si no por otra cosa, por su tono tan sumiso y zalamero. Desde nuestra perspectiva de hoy ese tono produce un efecto cómico. Pero seguramente nos conserva algo del estilo en que Bach se disculpó aquella noche ante el rey por el traje inadecuado que llevaba.[2]

Rey Graciosísimo:

Dedico a Vuestra Majestad, con la humildad más profunda, una ofrenda musical cuya parte más noble procede de la propia augusta mano de Vuestra Majestad. Con sobrecogido placer recuerdo la especialísima gracia de que fui objeto cuando, hace algún tiempo, durante mi visita a Potsdam, Vuestra Majestad se dignó tocarme en el teclado un tema de fuga, y al mismo tiempo me encargó de la manera más graciosa que lo desarrollara en la presencia augustísima de Vuestra Majestad. Mi humildísima obligación no podía ser otra que obedecer la orden de Vuestra Majestad. Sin embargo, no pude menos que observar que, por falta de la necesaria preparación, mi ejecución no estaba a la altura de tan excelente tema. En consecuencia, determiné elaborar de manera más completa el tema regio y, habiendo puesto empeño en la tarea, he resuelto ahora dar a conocer esta obra al mundo. Mi propósito no se ha realizado con la perfección que hubiera sido posible, y la obra no tiene, así, otra finalidad que la muy loable de enaltecer, aunque sea sólo en medida tan modesta, la fama de un monarca cuya grandeza y dominio en todas las ciencias de la guerra y de la paz, y especialmente en la música, todo el mundo se ve obligado a admirar y respetar. Me atreveré a añadir una humildísima súplica: que Vuestra Majestad se digne enaltecer este modesto trabajo con su graciosa aceptación y que

[1] H. T. David y A. Mendel, *The Bach Reader*, Nueva York, 1966, pp. 305-306.
[2] *Ibid.*, p. 179.

siga concediendo la augustísima regia gracia de Vuestra Majestad a quien es el siervo más humilde y obediente

de Vuestra Majestad
El Autor.

Leipzig, 7 de julio de 1747.

Unos veintisiete años después, cuando hacía ya veinticuatro que Bach había muerto, un noble alemán de nombre Gottfried van Swieten —a quien, por cierto, dedicó Forkel su biografía de Bach, y a quien Beethoven dedicaría su Primera Sinfonía— tuvo con el rey Federico una conversación referida por él mismo con estas palabras:

> Entre otras cosas, me habló (el rey) de música, y de un gran organista llamado (Wilhelm Friedemann) Bach, que había residido en Berlín durante un tiempo. En cuanto a profundidad de conocimientos armónicos y en cuanto a fuerza de ejecución, este artista está dotado de un talento superior al de cualquier otro músico que yo haya oído o pueda imaginarme. Sin embargo, quienes conocieron a su padre afirman que el padre era todavía más grande. El rey es de esta opinión; y, para demostrármela, cantó en voz alta un tema cromático de fuga que en cierta ocasión le dio al viejo Bach y que éste utilizó para componer, de repente, una fuga a cuatro voces, otra a cinco, y otra finalmente a ocho.[3]

No hay, por supuesto, manera de averiguar si fue el rey Federico o el barón van Swieten quien agrandó tan desmesuradamente la hazaña del compositor; pero es una buena indicación de cómo había crecido hacia 1774 la leyenda de Bach. Para dar idea de lo extraordinario que es una fuga a seis voces, baste decir que en todo el *Clave bien temperado* de Bach, constituido por cuarenta y ocho preludios y cuarenta y ocho fugas, sólo dos de las fugas están hechas a cinco voces, y no hay ni una sola a seis. La tarea de improvisar una fuga a seis voces podría compararse, por decir algo, a la de jugar con los ojos vendados sesenta partidas simultáneas de ajedrez y ganarlas todas. Improvisar una fuga a ocho voces está francamente por encima de las capacidades humanas.

El ejemplar enviado por Bach al rey Federico lleva, en la página que precede a la primera de música, la inscripción siguiente:

Figura 4.

("Por orden del rey, la canción y las demás cosas [están] resueltas con arte canónica".) Bach juega aquí con los dos sentidos del adjetivo *canónico*: no sólo "mediante la forma canon", sino también "de la mejor manera posible". Las iniciales de la inscripción latina forman la palabra italiana

[3] *Ibid.*, p. 260.

que significa "buscar", "indagar". Y la *Ofrenda Musical* contiene ciertamente muchas cosas que piden indagación y búsqueda. Consta de una fuga a tres voces, una fuga a seis voces, diez cánones y una sonata-trío. Los especialistas han llegado a la conclusión de que la fuga a tres voces es seguramente, en lo esencial, la que Bach improvisó ante el rey Federico. La fuga a seis voces es una de las creaciones más complicadas de Bach, y su tema es, por supuesto, el que dio Federico. El Tema Regio, que puede verse en la figura 3, es muy complejo, rítmicamente irregular y sumamente cromático (o sea, con muchas notas que no pertenecen a la tonalidad en que está escrito). Componer con ese tema una fuga decente, aunque sólo fuera a dos voces, no hubiera sido tarea sencilla para un músico común y corriente.

El nombre que da Bach a las dos fugas no es "Fuga", sino "Ricercar". Este es otro de los sentidos de la palabra: *ricercar*, en efecto, fue el nombre original de la forma que hoy se conoce como "fuga". En tiempos de Bach ya se había impuesto la palabra (latina e italiana) *fuga*, pero seguía utilizándose *ricercar* para designar un tipo erudito de fuga, tal vez demasiado austeramente intelectual para el oyente medio. Un caso parecido se da en el inglés de hoy: la palabra *recherché* (tomada del francés) significa literalmente "re-buscado", pero tiene además una connotación de refinamiento esotérico, de cosa destinada sólo a los muy entendidos.

La sonata-trío constituye un delicioso alivio tras la austeridad de las fugas y los cánones: es muy cantarina y dulce, casi bailable. También ella, sin embargo, se basa preponderantemente en el Tema Regio, con todo su cromatismo y austeridad. Es milagrosa en verdad la manera como Bach se sirvió de semejante tema para componer un interludio tan ameno.

Los diez cánones de la *Ofrenda Musical* se cuentan entre los más elaborados que Bach compuso. Pero, curiosamente, Bach mismo no dejó ninguno de ellos escrito de cabo a rabo. Su presentación incompleta es cosa deliberada. Son como acertijos que se le proponen al rey de Prusia. Un juego musical muy practicado en la época consistía en escribir un tema, acompañarlo de algunas indicaciones más o menos enigmáticas y dejar que el canon basado en ese tema fuera "descubierto" por otro jugador. Para saber cómo es posible esto hay que entender algunas de las reglas del canon.

Cánones y fugas

El canon se caracteriza esencialmente por un tema que sirve a la vez de melodía y de acompañamiento. Para conseguir esto se distribuyen "copias" del tema entre las distintas voces ejecutantes. Pero hay varios procedimientos. El más simple y directo es el que se sigue en ciertas canciones de ronda, como "Three Blind Mice" o "Frère Jacques" o "Estoy cojo de un pie". Entra el tema en la primera voz; después de un lapso bien medido entra una de sus "copias" exactamente en la misma tonalidad; pasado el mismo lapso en la segunda voz, entra la tercera de las copias del tema, y así sucesivamente. No cualquier melodía puede armonizar consigo misma en esa forma. Para que una sucesión de notas funcione como tema de canon se requiere que cada una de esas notas cumpla un papel doble (o triple, o cuádruple, etcétera): en primer lugar tiene que ser parte de una melodía y en segundo lugar tiene que ser parte de una armonización de esa misma melodía. Cuando hay, por ejemplo, tres voces canónicas, cada nota del tema necesita funcionar de dos maneras armónicas distintas, además de conservar su función melódica. En otras palabras, cada una de las notas del canon posee más de un sentido musical: el oído y el cerebro del oyente dan automáticamente con el sentido adecuado, teniendo en cuenta el contexto.

Existen, claro, especies más complicadas de cánones. Un primer grado en la escala de complejidad se consigue cuando las "copias" del tema se escalonan no sólo en el *tiempo*, sino también en el *tono*; por ejemplo, la primera voz puede comenzar el tema en do, y entonces la segunda, al entroncar con la primera después del lapso de rigor, canta ese mismo tema pero comenzando cinco notas arriba, o sea en sol; si hay una tercera voz, ésta deberá entroncar con las otras dos, a su debido tiempo, comenzando cinco notas arriba de donde comenzó la segunda, o sea en re, y así sucesivamente. Un segundo grado en la escala de complejidad se da cuando la *velocidad* varía de una voz a otra; cuando, por ejemplo, la segunda voz canta el doble de rápido o el doble de lento que la voz inicial. Lo primero se llama *disminución*, lo segundo *aumentación* (porque el tema parece encogerse o dilatarse respectivamente).

Y eso no es todo. La siguiente etapa de complejidad en la construcción de cánones consiste en *invertir* el tema, lo cual significa elaborar una melodía que salte hacia *abajo* cada vez que el tema original salta hacia *arriba*, pero haciendo que el salto mida exactamente el mismo número de semitonos. El efecto producido por esta transformación melódica es un tanto raro, pero cuando uno se acostumbra a oír temas invertidos, ya comienza a encontrarlos completamente naturales. Bach, que era aficionadísimo a las inversiones, las prodiga en su obra —sin exceptuar, por supuesto, la *Ofrenda Musical*. (Puede servir de ejemplo la melodía de "Good King Wenceslas", con su inversión hecha en la forma indicada: se comienza con la melodía original, y después de dos compases entra como segunda voz la inversión, que comienza una octava abajo; el canon que resulta es bastante agradable.) Finalmente, la más esotérica de las "copias" es la copia retrógrada, en la cual el tema se ejecuta al revés de como está escrito, es decir, de atrás para adelante. El canon que utiliza este truco se llama familiarmente *canon cangrejo*, a causa de las peculiaridades locomotivas de esos crustáceos. Ni falta hace decir que Bach metió un canon cangrejo en su *Ofrenda Musical*. Hay que observar que los distintos tipos de "copia" conservan toda la información que hay en el tema original, lo cual quiere decir que el tema es totalmente recuperable a partir de cualquiera de sus copias. Esta transformación mantenedora de la información suele llamarse *isomorfismo*, y el presente libro habrá de ocuparse de isomorfismos a cada rato.

A veces resulta deseable aflojar un poco lo tieso de la forma canon. Una manera de lograrlo es permitir pequeñas desviaciones de la copia perfecta, para que la armonía resulte más fluida. Hay también cánones con voces "libres", que no utilizan el tema y sirven sólo para armonizar agradablemente con las voces que forman parte estricta del canon.

Cada uno de los cánones de la *Ofrenda Musical* tiene como tema una variante del Tema Regio, y todos los recursos de complicación arriba descritos se explotan en ellos hasta lo último; más aún, a veces se combinan varios de estos recursos en un solo canon, por ejemplo en el que se intitula "Canon per Augmentationem, contrario Motu". Es un canon a tres voces; la voz central es libre (si bien lo que canta es justamente el Tema Regio), y las otras dos danzan canónicamente por encima y por debajo, empleando los recursos de la aumentación y de la inversión. Uno de los cánones lleva el críptico título "Quaerendo invenietis" ("Buscando encontraréis"). Todos los enigmas de éste y de los demás cánones de la *Ofrenda* han sido resueltos. Las soluciones canónicas son obra de Johann Philipp Kirnberger, discípulo de Bach. Pero siempre cabe la duda de si no quedará alguna solución por descubrir.

Puede ser necesario también explicar qué cosa es una fuga. La fuga se parece al canon por el hecho de basarse casi siempre en un tema que se va tocando en distintas voces y en distintos tonos, y a veces a distintas velocidades o con intervalos tonales invertidos o de atrás para adelante. El principio de la fuga es, sin embargo, mucho menos rígido que el del canon y por consiguiente hay en ella mayor espacio para la expresión emotiva y artística. La marca caracterizadora de una fuga es la manera como empieza: con una voz sola que canta su tema. Entra luego una segunda voz que comienza a cinco tonos por encima o cuatro tonos por debajo de donde ha comenzado la primera. Mientras tanto, la primera prosigue su camino cantando el "contratema" o "contrasujeto", esto es, un tema secundario, destinado a suministrarle contrastes rítmicos, armónicos o melódicos al tema. Cada una de las voces va entrando en su momento y canta el tema, acompañada a menudo por el contrasujeto, que se encomienda a alguna otra voz, mientras las demás ejecutan cuantos primores musicales se le han ocurrido al compositor. Cuando todas las voces han entrado ya en el juego, se acaban las reglas. Hay, por supuesto, ciertas cosas que normalmente se hacen en una fuga, pero no son cosas establecidas como regla: no hay reglas fijas, no hay una fórmula para hacer fugas. Las dos de la *Ofrenda Musical* son ejemplos sobresalientes de fugas que jamás hubieran podido ser "compuestas según fórmula". Hay en ellas algo mucho más hondo que la simple fugalidad.

La *Ofrenda Musical* representa, en su conjunto, uno de los logros supremos de Bach en el terreno del contrapunto. Es toda ella una sola vasta fuga intelectual en la que se han trabado y entretejido muchas ideas y muchas formas y en la que surgen a cada momento alusiones sutiles y dobles sentidos juguetones. Y es una creación bellísima de la inteligencia humana, digna de ser admirada por siempre. (Véase una preciosa descripción de ella en el libro de H. T. David, *J. S. Bach's Musical Offering.*)

Un Canon en Perpetuo Ascenso

Hay en la *Ofrenda Musical* un canon particularmente insólito. Se llama "Canon per Tonos" y es a tres voces. La de arriba canta una variante del Tema Regio, mientras las otras dos ejecutan una armonización canónica basada en un segundo tema. La más baja de estas dos voces canta su tema en do menor (que es la tonalidad del canon en su conjunto), y la otra canta el mismo tema, pero desplazado hacia arriba por un intervalo de quinta. Lo que hace de este canon algo distinto de cualquier otro es que cuando termina —cuando *parece* terminar, mejor dicho— no está ya en la tonalidad de do menor, sino en la de re menor. De alguna manera se las ha ingeniado Bach para *modular* (cambiar de tono) frente a las narices del oyente. Y además, el canon está construido de tal modo que su terminación se enlaza sin la menor violencia con su propio comienzo, de manera que puede uno repetir el proceso y, comenzando ahora en la tonalidad de re, terminar en la de mi, y recomenzar entonces en mi para terminar en fa sostenido, etcétera. Estas sucesivas modulaciones van llevando el oído a provincias tonales más y más remotas, de modo que a la tercera o cuarta de ellas se siente uno desesperadamente lejos de la tonalidad inicial. Pero, como por arte de magia, al llegar a la sexta de las modulaciones queda uno instalado de nuevo en la tonalidad de do menor. Todas las voces se hallan ahora exactamente una octava más arriba de como se hallaban al principio, y en este punto puede darse por concluida la pieza de una manera musicalmente agradable. Cabe imaginar que tal fue la intención de Bach; pero no hay duda de que a Bach le encantaba la idea de que este proceso siguiera y siguiera *ad infinitum*, y quizá sea ése el sentido de las palabras que escribió al margen de la pieza: "Que así como se levanta la modulación, así se levante la Gloria del Rey". Para subrayar esa calidad suya de potencialmente infinito, el nombre que le doy es "Canon en Perpetuo Ascenso".

Con ese canon nos brinda Bach nuestro primer ejemplo del concepto de *Bucles Extraños*. El fenómeno del "Bucle Extraño" ocurre cada vez que, habiendo hecho hacia arriba (o hacia abajo) un movimiento a través de los niveles de un sistema jerárquico dado, nos encontramos inopinadamente de vuelta en el punto de partida. (Aquí, el sistema es el de las tonalidades musicales.) A veces me sirvo del término *Jerarquía Enredada* para designar un sistema en que se dan Bucles Extraños. A lo largo de nuestro camino reaparecerá una y otra vez este tema de los Bucles Extraños. Unas veces estará oculto, otras bien patente; unas veces estará puesto al derecho, otras al revés, cabeza abajo o de espaldas. "Quaerendo invenietis" es el consejo que desde ahora le doy al lector.

Escher

Las más bellas y vigorosas realizaciones visuales de este concepto de Bucles Extraños Raros se dan, según yo, en la obra del artista gráfico holandés Maurits C. Escher, que vivió de 1902 a 1972. Escher es el creador de algunos de los dibujos intelectualmente más estimulantes de todos los tiempos. Muchos de ellos tienen como raíz la paradoja, la ilusión o el doble sentido. Entre los primeros admiradores de los dibujos de Escher hubo varios matemáticos, lo cual es comprensible, pues esos dibujos suelen basarse en principios matemáticos de simetría o de esquema . . . Pero en un dibujo típico de Escher hay mucho más que la simple simetría o el simple esquema; hay a menudo una idea subyacente, realizada en forma artística. Y, en particular, el Bucle Extraño es uno de los temas más frecuentes en la obra de este artista. Véase, por ejemplo, la litografía *Cascada* (figura 5) y compárese su tránsito en interminable descenso a través de seis etapas o pasos con el tránsito en interminable ascenso, y también a través de seis etapas o pasos, del "Canon per Tonos". La semejanza de visión es realmente notable. Bach y Escher están tocando un mismo tema en dos "claves" distintas: la musical y la pictórica.

Los Bucles Extraños de Escher están realizados de varias maneras y pueden clasificarse de acuerdo con lo apretado del bucle. La litografía *Subiendo y bajando* (véase figura 6), en la que unos personajes caminan y caminan en bucle, es la versión más suelta, puesto que incluye gran número de pasos antes de que se llegue de nuevo al punto de partida. El circuito de *Cascada* es más apretado, pues no incluye sino seis pasos discretos. Aquí el lector podrá pensar que hay algo de ambigüedad en la noción de "paso", y que, por ejemplo, en *Subiendo y bajando* lo mismo pueden verse cuatro niveles (escaleras) que cuarenta y cinco niveles (escalones). Hay, sin duda, una buena dosis de vaguedad en la manera de contar esos pasos, lo cual vale no sólo para los dibujos de Escher, sino para todo sistema jerárquico de muchos niveles. Ya afinaremos más adelante nuestra comprensión de esta vaguedad. Por ahora no nos distraigamos demasiado. Apretando más nuestro bucle, llegamos al notable caso de *Manos dibujando* (véase figura 135), en que cada mano dibuja a la otra: un Bucle Extraño de dos pasos. Y finalmente, el más apretado de todos los Bucles Extraños es el que encontramos en *Galería de grabados* (véase figura 142): retrato de un retrato que se contiene a sí mismo. ¿O retrato de una galería que se contiene a sí misma? ¿O de una ciudad que se contiene a sí misma? ¿O de un joven que se contiene a sí mismo? (Dicho sea de paso, la ilusión en que se basan *Subiendo y bajando* y *Cascada* no fue inven-

Figura 5. Cascada, *de M. C. Escher (litografía, 1961).*

to de Escher, sino de Roger Penrose, matemático inglés, en 1958. Pero el tema del Bucle Extraño ya estaba presente en la obra de Escher desde 1948, año en que dibujó *Manos dibujando*. La fecha de *Galería de grabados* es 1956.)

En el concepto de Bucles Extraños va implícito el de infinito, pues ¿qué otra cosa es un bucle sino una manera de representar de manera finita un proceso interminable? Y el infinito representa un vasto papel en muchos

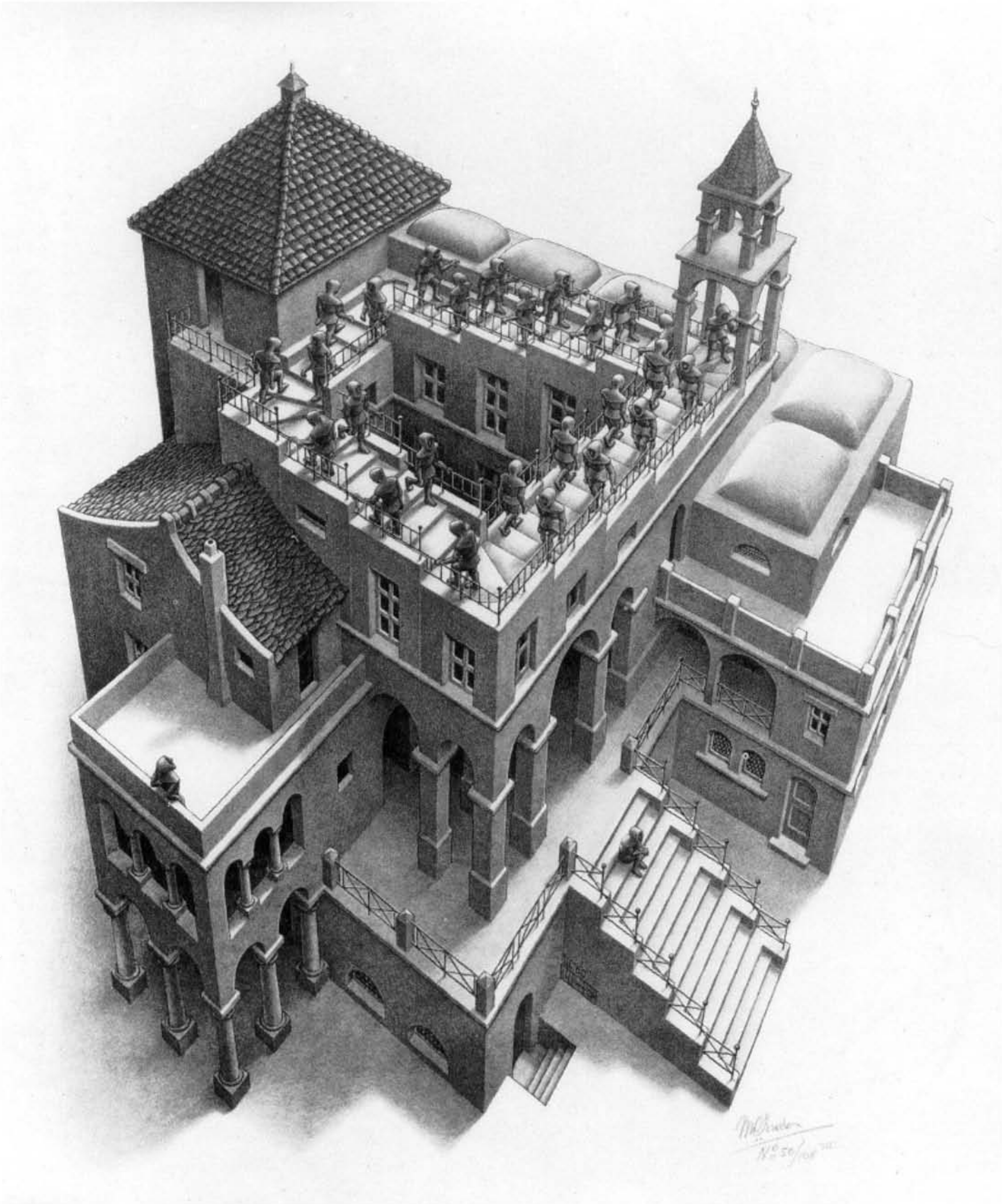
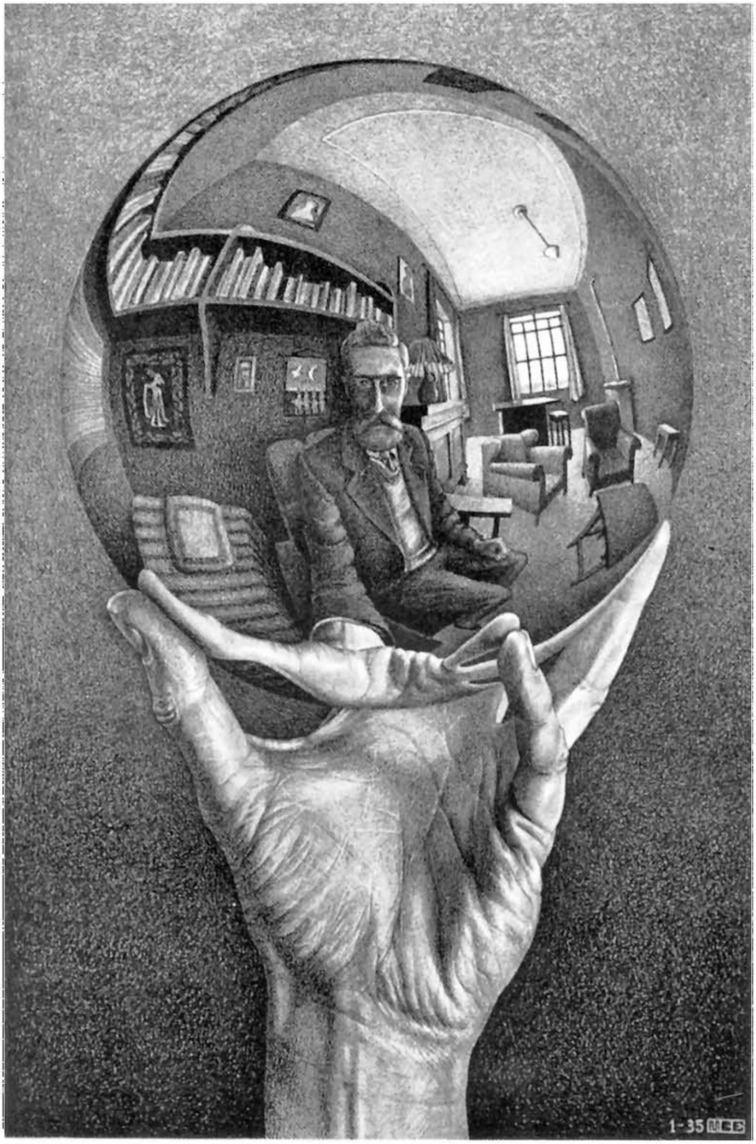


Figura 6. Subiendo y bajando, *de M. C. Escher (litografía, 1960).*

de los dibujos de Escher. En ellos suelen verse copias de un tema determinado que se acoplan las unas en las otras constituyendo así los análogos visuales de los cánones de Bach. Varios de esos esquemas aparecen en uno de los grabados más famosos de Escher, *Metamorfosis II* (véase figura 8). Es un poco como el "Canon en Perpetuo Ascenso": progresa y progresa a partir de un punto inicial y de pronto se halla en el punto de partida. En

Figura 7. Mano con Globo Reflejado, *autorretrato de M. C. Escher, 1935.*



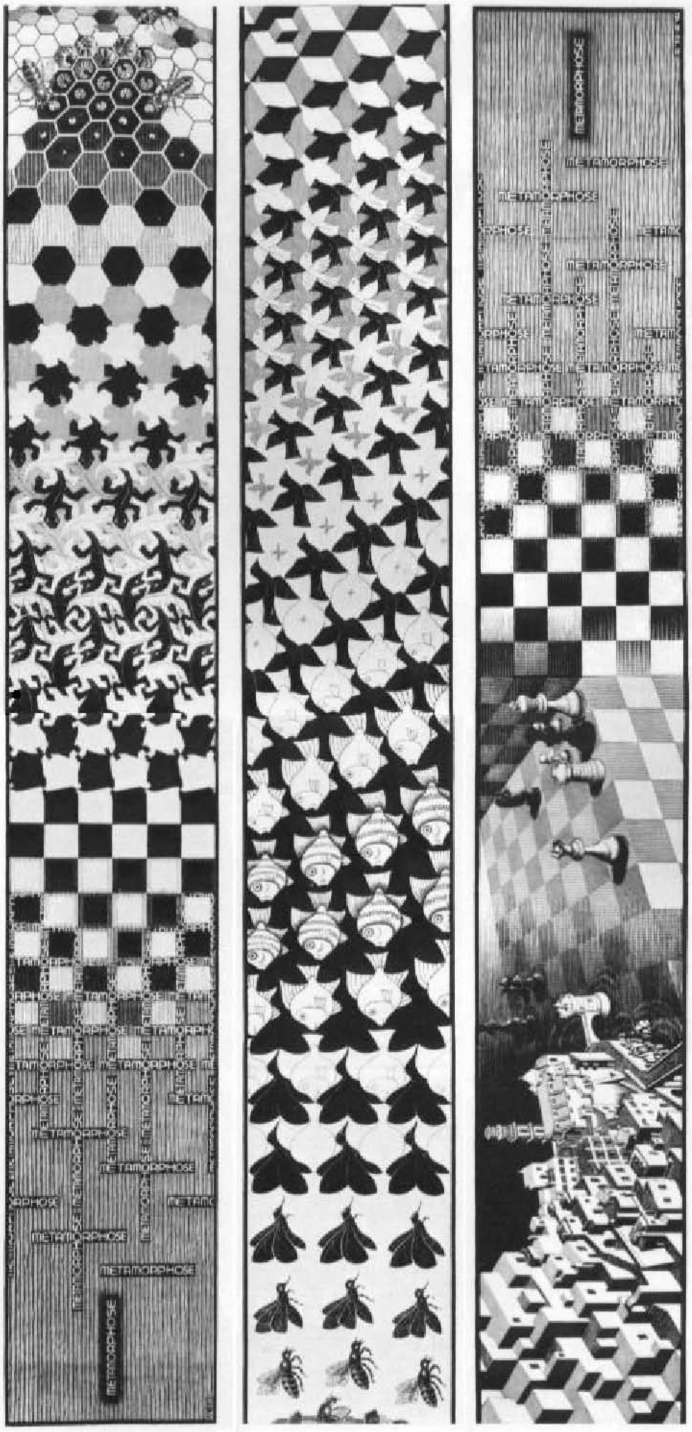


Figura 8. **Metamorfosis II,** *de M. C. Escher (xilografía, 1939-1940).*

los planos embaldosados de *Metamorfosis II* y de otros dibujos hay ya sugerencias de infinito. Pero en otras creaciones de Escher encontramos visiones mucho más atrevidas o desaforadas de este infinito. Algunos de sus dibujos muestran un tema dado en diversos niveles de realidad. En uno de los niveles podemos reconocer claramente la representación de la fantasía o imaginación, digamos, y en el otro la representación de lo real. Estos dos niveles pueden ser los únicos que se manifiestan de manera explícita. Pero la sola presencia de uno y otro nivel invita al contemplador a contemplarse a sí mismo como parte de otro nivel más; y, una vez dado este paso, el contemplador no puede menos que quedar atrapado por una cadena implícita de niveles en que para cada nivel existe siempre otro más arriba, de mayor "realidad", y asimismo otro más abajo, un nivel "más imaginario". Esto por sí solo puede ya producirnos vértigo. Pero ¿y si la cadena de niveles, en vez de ser lineal, forma un bucle? ¿Qué es entonces lo real y qué lo fantástico? El genio de Escher consiste en haber podido no sólo concebir, sino representar, negro sobre blanco, docenas de mundos mitad reales y mitad míticos, mundos llenos de Bucles Extraños que él pone ante los ojos del contemplador como invitándolo a penetrar en ellos.

Gödel

En los ejemplos de Bucles Extraños de Bach y de Escher que hemos visto hay un conflicto entre lo finito y lo infinito y por consiguiente una fuerte sensación de paradoja. La intuición nos dice que algo matemático está aquí en juego. Pues bien: en este nuestro siglo se descubrió en efecto una contraparte matemática que ha tenido las más tremendas repercursiones. Y, así como los bucles de Bach y de Escher corresponden a intuiciones muy simples y antiguas —una escala musical, una escalera—, así también el descubrimiento, por Kurt Gödel, de un Bucle Extraño en los sistemas matemáticos tiene su origen en intuiciones simples y antiguas. En su forma más desnuda o descarnada, el descubrimiento de Gödel supone la traducción de una vieja paradoja filosófica a términos matemáticos. Me refiero a la llamada *paradoja de Epiménides, o paradoja del mentiroso*. Epiménides, cretense, hizo esta inmortal aseveración: "Todos los cretenses son mentirosos". Una versión más afilada de la paradoja es sencillamente "Estoy mintiendo" o "Esta aseveración es falsa". La última versión es la que generalmente tendré en mente al referirme a la paradoja de Epiménides. Es una aseveración que de manera brutal contradice la dicotomía tan generalmente aceptada entre aseveraciones verdaderas y aseveraciones falsas, puesto que si por un momento la tomamos como verdadera inmediatamente se nos dispara por la culata y nos ponemos a pensar que es falsa. Pero una vez que hemos decidido que es falsa, un análogo tiro por la culata nos hace volver a la idea de que es verdadera. Haga el lector la prueba y lo verá.

Figura 9. Kurt Gödel.

La paradoja de Epiménides es un Bucle Extraño de un solo paso, como la *Galería de grabados* de Escher. ¿Y qué tiene que ver con la matemática? Aquí es donde entra el descubrimiento de Gödel. A Gödel se le ocurrió la idea de utilizar el razonamiento matemático para explorar el razonamiento matemático. Esa idea de hacer de la matemática una disciplina "introspectiva" resultó ser enormemente dinámica, y la más fecunda de sus implicaciones es una que él mismo encontró: el Teorema de la Incompletitud. Qué propone este Teorema y cómo lo demuestra son dos cosas distintas. De una y otra nos ocuparemos con bastante detalle en el presente libro. Podemos comparar el Teorema con una perla y el método de demostración con una ostra. La perla es estimada por su tersura y su sencillez; la ostra es un ser vivo y complejo de cuyas tripas brota esa gema misteriosamente simple.

El Teorema de Gödel aparece como Proposición VI de un artículo suyo "Sobre proposiciones formalmente indecidibles en los *Principia Mathematica* y sistemas análogos, I" (1931), y dice así:

> A cada clase *k* *w*-consistente y recursiva de *formulae* corresponden *signos de clase r* recursivos, de tal modo que ni *v* Gen *r* ni Neg (*v* Gen *r*) pertenecen a Flg (*k*) (donde *v* es la *variante libre* de *r*).

En realidad el artículo se redactó en alemán, y quizá el lector sienta que sigue estando en alemán. He aquí, pues, una paráfrasis en español más normal:

> Toda formulación axiomática de teoría de los números incluye proposiciones indecidibles.

Tal es la perla.

En esta perla es difícil ver un Bucle Extraño. Ello se debe a que el Bucle Extraño está sepultado en la ostra, o sea en la demostración. La demostración del Teorema de Incompletitud de Gödel está trabada con la escritura de una proposición matemática auto-referencial, de la misma manera que la paradoja de Epiménides es una proposición lingüística auto-referencial. Pero servirse del lenguaje para hablar acerca del lenguaje es cosa simple, mientras que no es nada fácil ver cómo una proposición relativa a números puede hablar acerca de sí misma. Hizo falta un genio para esto tan simple: conectar la idea de las proposiciones auto-referenciales con la teoría de los números. En el momento en que Gödel tuvo la intuición de que esa proposición podía crearse, dejó ya atrás el principal de los obstáculos. La hechura misma de la proposición no fue sino la elaboración de su espléndido chispazo intuitivo.

En capítulos subsiguientes examinaremos con el mayor cuidado la construcción de Gödel; pero para que el lector no se quede totalmente en ayunas, esbozaré aquí en unos cuantos brochazos el núcleo de la idea, con esperanza de que lo que voy a decir haga estallar algunas ideas en su cabeza. Es preciso, en primer lugar, que quede absolutamente claro en dónde está la dificultad. Las proposiciones matemáticas —limitémonos a las de teoría de los números— se refieren a las propiedades de los números enteros. Los números enteros no son *proposiciones*, ni tampoco lo son sus propiedades. Una proposición de teoría de los números no habla *acerca de* una proposición de teoría de los números; *es* sólo una proposición de teoría de los números. Este es el problema; pero Gödel se dio cuenta de que algo bullía por dentro.

Gödel intuyó que una proposición de teoría de los números podía hablar *acerca de* una proposición de teoría de los números (inclusive, quizá, acerca de sí misma) a condición, simplemente, de hacer que los números cumplieran la función de las proposiciones. Dicho de otro modo, en la médula de su construcción está la idea de *código*. En el Código de Gödel, llamado por lo común "numeración de Gödel", se hace que los números cumplan funciones de símbolos y de secuencia de símbolos. De esa manera, siendo una secuencia de símbolos especializados, cada proposición de teoría de los números adquiere un "número de Gödel", algo así como un número de teléfono o de placa de automóvil mediante el cual puede uno referirse a ella. Y este recurso de codificación permite que las proposiciones de teoría de los números se entiendan en dos niveles distintos: como proposiciones de teoría de los números y como *proposiciones acerca de proposiciones de teoría de los números*.

Inventado ya este esquema de codificación, Gödel tuvo que elaborar detalladamente una manera de transportar la paradoja de Epiménides a un formalismo de teoría de los números. Su trasplante final de la paradoja de Epiménides no decía "Esta proposición de teoría de los números es falsa", sino "Esta proposición de teoría de los números no tiene ninguna demostración". De aquí pueden originarse no pocas confusiones, a causa de que la gente no entiende en general el concepto de "demostración" sino en forma bastante vaga. De hecho, la obra de Gödel se inscribe como episodio del largo esfuerzo de los matemáticos por explicarse a sí mismos qué cosa son las demostraciones. El hecho importante que hay que tener en cuenta es que las demostraciones son pruebas *dentro de sistemas fijos* de proposiciones. En el caso de la obra de Gödel, el sistema de razonamiento teórico-numérico a que se refiere la palabra "demostración" es el de los *Principia Mathematica* (*P. M.*), obra gigante de Bertrand Russell y Alfred North Whitehead, publicada entre 1910 y 1913. Por lo tanto, la aseveración G de Gödel debería escribirse más adecuadamente así:

> Esta aseveración de teoría de los números no tiene ninguna demostración en el sistema de los *Principia Mathematica*.

Dicho sea de paso, esta aseveración de Gödel no es el Teorema de Gödel, tal como la aseveración de Epiménides no es la observación de que "La aseveración de Epiménides es una paradoja". Ahora podemos precisar cuál es el efecto del descubrimiento de G. Mientras que la aseveración de Epiménides crea una paradoja, puesto que no es ni verdadera ni falsa, la aseveración G de Gödel es indemostrable (dentro de los *P. M.*), pero verdadera. ¿Y cuál es la conclusión de todo esto? La conclusión es: que el sistema de los *Principia Mathematica* es "incompleto"; que hay proposiciones verdaderas de teoría de los números para cuya demostración resulta demasiado débil el método de los *P. M.*

Los *Principia Mathematica* fueron la primera víctima de este golpe pero ciertamente no la única. Las palabras "y sistemas afines" que se leen en el título del trabajo de Gödel son muy elocuentes: en efecto, si Gödel se hubiera limitado a señalar un defecto en la obra de Russell y Whitehead, no habrían faltado otros matemáticos dispuestos a mejorar el sistema de los *P. M.* y a sobreponerse al Teorema de Gödel. Pero esto no era posible: la demostración de Gödel se aplicaba a *cualquier* sistema axiomático cuyo propósito fuera lograr las metas que Whitehead y Russell se habían fijado. Un solo sistema básico bastaba para hacerse cargo de cada uno de esos sistemas. En suma, lo que demostró Gödel fue que la demostrabilidad es un concepto más endeble que la verdad, independientemente del sistema axiomático de que se trate.

Como es natural, el Teorema de Gödel tuvo un efecto electrizante en los lógicos, matemáticos y filósofos interesados en los fundamentos de la matemática, pues demostraba que ningún sistema fijo, por complicado que fuera, podía representar la complejidad de los números enteros: 0, 1, 2, 3 . . . Los lectores modernos podrán no experimentar ante esto la misma perplejidad que los de 1931, ya que en el ínterin nuestra cultura ha absorbido el Teorema de Gödel, junto con las revoluciones conceptuales de la relatividad y de la mecánica cuántica, y sus mensajes filosóficamente desorientadores han llegado hasta el gran público, aunque sea embotados por varias capas de traducción (y, casi siempre, de ofuscación). La actitud general de los matemáticos de hoy consiste en no esperar sino resultados "limitativos"; pero en 1931 la cosa cayó como un rayo en seco.

Lógica matemática: breve sinopsis

Para apreciar como es debido el Teorema de Gödel hace falta tener presente cierto contexto. Trataré, pues, de resumir en poco espacio la historia de la lógica matemática hasta el año 1931 —tarea imposible. (Quien desee una buena exposición lea el libro de DeLong, o el de Kneebone, o el de Nagel y Newman.) Lo que encontramos en los inicios de esa historia es el intento de mecanizar los procesos intelectivos del razonamiento. Ahora bien, siempre se ha dicho que nuestra capacidad de razonar es la que nos distingue de otras especies; resultaría entonces un tanto paradójico, a primera vista, mecanizar eso que es lo más humano que tenemos. Sin embargo, ya los griegos antiguos sabían que el razonamiento es un proceso sujeto a esquemas, y que, en parte al menos, está gobernado por leyes perfectamente formulables. Aristóteles codificó los silogismos y Euclides codificó la geometría; pero allí quedó el asunto, y tuvieron que pasar muchos siglos para que volviera a registrarse un avance en el estudio del razonamiento axiomático.

Uno de los descubrimientos trascendentales de las matemáticas del siglo XIX fue la existencia de varias geometrías distintas y todas igualmente válidas (al decir aquí "una geometría" se entiende una teoría de las propiedades de puntos y líneas abstractos). Durante largo tiempo se había dado por sentado que geometría era aquello que Euclides había codificado; es verdad que podían descubrirse pequeñas fallas en la presentación euclidiana, pero eso carecía de importancia; todo progreso real en el campo de la geometría significaba simplemente ampliar a Euclides. Esta idea quedó sacudida cuando, de manera más o menos simultánea, se hizo aquí y allá el descubrimiento de las geometrías no euclidianas —descubrimiento que escandalizó a la comunidad matemática, porque atacaba en su núcleo la idea de que la matemática estudia el mundo real. ¿Cómo podían existir muchas clases distintas de "puntos" y "líneas" en una realidad única? En nuestros días la solución del dilema puede ser clara hasta para los profanos; pero en estos años el dilema causó gran conmoción en los círculos matemáticos.

En el mismo siglo XIX, más tarde, los lógicos ingleses George Boole y Augustus De Morgan sometieron los esquemas estrictamente deductivos de razonamiento a una codificación que deja muy atrás la codificación aristotélica. Boole se atrevió a intitular su libro *The Laws of Thought* ("Las leyes del pensamiento"), lo cual es algo exagerado, por más que su contribución haya sido importante. Lewis Carroll, fascinado por esos métodos mecanizados de razonamiento, inventó gran número de acertijos que podían resolverse con ello. En Jena y en Turín respectivamente, Gottlob Frege y Giuseppe Peano se dieron a la tarea de combinar el razonamiento formal con el estudio de conjuntos y de números. En Göttingen, David Hilbert elaboró formalizaciones de geometría más estrictas que las de Euclides. Todos estos esfuerzos iban enderezados a una meta: aclarar qué es lo que entendemos por "demostración".

Mientras tanto, habían estado ocurriendo cosas interesantes en el campo de la matemática clásica. Hacia 1885 Georg Cantor formuló una teoría de diferentes clases de infinitos, conocida con el nombre de *teoría de conjuntos*. Esta teoría era atractiva y vigorosa, pero significaba un reto fuerte para la intuición. Al cabo de no mucho tiempo ya habían salido a relucir no pocas paradojas basadas en la teoría de conjuntos. La situación era muy aflictiva: apenas parecían los matemáticos estar recobrándose de un conjunto de paradojas —las relacionadas con la teoría de los límites, en el cálculo—, cuando se les venía encima todo un conjunto nuevo, de aspecto peor aun.

La más célebre de las nuevas paradojas es la de Russell. Por regla general, se diría, los conjuntos no son miembros de sí mismos. Así, el conjunto de todas las morsas no es una morsa; el conjunto que comprende sólo a Juana de Arco no es Juana de Arco (los conjuntos no son personas), etcétera. En este sentido, la mayor parte de los conjuntos son "conjuntos comunes y corrientes". *Existen*, sin embargo, conjuntos que "se devoran" a sí mismos, que se incluyen a sí mismos en cuanto miembros, por ejemplo el conjunto de todos los conjuntos, o el conjunto de todas las cosas excepto Juana de Arco, y así otros. Claro está que un conjunto dado es o de los comunes y corrientes, o de los que se autodevoran y por lo tanto ninguno puede ser las dos cosas a la vez. Ahora bien, nada nos impide inventar R: *el conjunto de todos los conjuntos comunes y corrientes*. A primera vista, R podrá parecer un invento bastante común y corriente, pero necesitamos revisar esa opinión en cuanto nos preguntamos: "¿Qué clase de conjunto es R: de los comunes y corrientes o de los que se autodevoran?" El lector encontrará que la respuesta es: "El conjunto R no es ni de los comunes y corrientes ni de los que se autodevoran, porque cualquiera de las dos soluciones desemboca en una paradoja." Haga la prueba y verá.

Pero *si* R no es ni lo uno ni lo otro, ¿qué cosa es? Es algo patológico, dan ganas de contestar; pero como nadie se contenta con tales respuestas evasivas, no faltaron quienes cavaron más hondo en los cimientos de la teoría de conjuntos. La pregunta crucial parecía ser: "¿Qué es lo que funciona mal en nuestro concepto intuitivo de 'conjunto'? ¿Por qué no hacer una teoría rigurosa de conjuntos que, además de corresponder fielmente a nuestras intuiciones, quede a salvo de toda paradoja?" El problema, aquí —al igual que en la teoría de los números y en la geometría—, consiste en hacer que la intuición se empareje perfectamente con los sistemas formalizados, o axiomáticos, de razonamiento.

Una variante vistosa de la paradoja de Russell es la llamada "paradoja de Grelling", en la cual se utilizan adjetivos en vez de conjuntos. Dividamos los adjetivos que se usan en español en dos categorías: la de los que se describen a sí mismos, como "esdrújulo", "hexasilábico" y "*chic*", y la de los que no se describen a sí mismos, como "potable", "incompleto" y "bisilábico". Ahora bien, si a los de la primera categoría los llamamos *autológicos* (= "autodescriptivos") y a los de la segunda *heterológicos* (= no autodescriptivos"), ¿a qué categoría pertenece el adjetivo "heterológico"? ¿Nos arriesgaremos a decir que el adjetivo "heterológico" es heterológico? Piense un poco el lector.

El único culpable de estas paradojas parece ser el fenómeno de la autorreferencia, que es como decir el Bucle Extraño. Entonces, si lo deseable es eliminar todas las paradojas, ¿por qué no procurar eliminar la autorreferencia y todo cuanto pueda servirle de raíz? La empresa no es tan simple como se creería, porque puede ser difícil saber dónde, exactamente, está ocurriendo una autorreferencia. Puede estar diseminada en todo un Bucle Extraño de varios pasos, como en esta versión "ampliada" de la paradoja de Epiménides, que hace pensar en *Manos dibujando*:

La afirmación que sigue es falsa.

La afirmación que antecede es verdadera.

Si las tomamos juntas, estas dos afirmaciones tienen el mismo efecto que la paradoja original de Epiménides; pero si las tomamos por separado son afirmaciones inocuas, y hasta potencialmente útiles. La "culpa" de este Bucle Extraño no se puede achacar a ninguna de las dos afirmaciones, sino exclusivamente a la manera como "apuntan" la una a la otra. Así también, cada uno de los tramos de *Subiendo y bajando* es absolutamente legítimo; lo único que crea una imposibilidad es la manera como se acomodan los distintos tramos entre sí. Existiendo, pues, maneras indirectas y maneras directas de producir autorreferencias, lo que hay que discurrir es cómo eliminar unas y otras de una vez por todas —siempre y cuando esté uno persuadido de que la autorreferencia es la raíz del mal.

Eliminación de Bucles Extraños

Russell y Whitehead eran de esta última opinión. Y así, sus *Principia Mathematica* son un descomunal esfuerzo por dejar limpias de Bucles Extraños la lógica, la teoría de conjuntos y la teoría de los números. La idea de su sistema era básicamente ésta:

Un conjunto del "tipo" más bajo no puede tener entre sus miembros otros conjuntos, sino únicamente "objetos". Un conjunto del tipo que sigue en la escala sólo puede abarcar conjuntos del tipo más bajo, además de objetos. En general, un conjunto de un tipo dado no puede abarcar sino conjuntos de tipo más bajo, además de objetos. Cada conjunto pertenece a un tipo específico. Es claro que ningún conjunto puede contenerse a sí mismo, porque entonces tendría que pertenecer a un tipo más alto que su propio tipo. En este sistema todos los conjuntos son "comunes y corrientes", de tal manera que a nuestro ya conocido R —el conjunto de todos los conjuntos comunes y corrientes— se le niega absolutamente la calidad de conjunto, puesto que no pertenece a ningún tipo finito. Así, pues, según todas las apariencias, esta *teoría de los tipos*, que también podría llamarse "teoría de la abolición de Bucles Extraños", logra bien su propósito de limpiar de paradojas la casa pero únicamente a costa de introducir una jerarquización a todas luces artificial, y de prohibir la formación de ciertas clases de conjuntos —como el conjunto de todos los conjuntos comunes y corrientes. Intuitivamente decimos que no es ésa la manera como nosotros imaginamos los conjuntos.

Con la teoría de los tipos quedó despachada la paradoja de Russell, pero la paradoja de Epiménides y la paradoja de Grelling continuaron intactas. Para gente cuyos intereses no rebasaban el campo de la teoría de conjuntos, eso estaba perfecto; pero para gente interesada en eliminar de manera general las paradojas se hacía necesaria alguna "jerarquización" análoga, capaz de impedir que se produjeran bucles hacia atrás dentro del lenguaje. En la base de esta jerarquía estaría un *lenguaje objeto*. Toda referencia que aquí se hiciera tendría que dirigirse forzosamente a un terreno específico —no a aspectos del propio lenguaje objeto (por ejemplo sus reglas gramaticales o determinadas oraciones). Para esos menesteres habría un *metalenguaje*. Esta experiencia de dos niveles lingüísticos es bien conocida de todos los que aprenden lenguas extranjeras. En seguida tendría que haber un *metametalenguaje* para hablar acerca del metalenguaje, y así sucesivamente. Se exigiría que cada oración perteneciera a un nivel preciso de la jerarquía. Por lo tanto, de no hallarse un nivel en el cual colocar una aseveración determinada, esta aseveración se declararía carente de sentido y se relegaría al olvido.

Podemos intentar en este punto un análisis del bucle de dos pasos en que quedó expresada poco antes la paradoja de Epiménides. La primera oración, en vista de que habla de la segunda, tiene que pertenecer a un nivel más alto que esa segunda. Por idénticas razones la segunda oración tiene que pertenecer a un nivel más alto que la primera. Como esto es imposible, las dos oraciones son "carentes de sentido". Más precisamente, tales oraciones no pueden ni siquiera formularse en un sistema basado en una jerarquía estricta de lenguajes. Esto pone una barrera a todas las versiones de la paradoja de Epiménides y de la paradoja de Grelling. (¿A qué nivel de lenguaje podría pertenecer "heterológico"?)

Ahora bien, en la teoría de los conjuntos, la cual se ocupa de abstracciones que no se están usando todo el tiempo, una estratificación como la teoría de los tipos, si bien un tanto rara, parece muy aceptable; pero cuando lo que está en juego es el lenguaje, parte tan omnipresente de la vida humana, semejante estratificación parece absurda. Nadie se concibe a sí mismo saltando arriba y abajo por la jerarquía de los lenguajes cuando habla acerca de las cosas que se van presentando. Una frase tan inocente como ésta: "En mi libro critico la teoría de los tipos" estaría doblemente prohibida en el sistema en cuestión. En primer lugar menciona el presente "libro", cosa que no puede mencionarse sino en un "metalibro", y en segundo lugar me menciona *a mí*, persona a quien de ninguna manera me es lícito referirme. Este ejemplo nos muestra qué boba resulta la teoría de los tipos cuando se la aplica a un contexto coloquial. El remedio que receta contra las paradojas —proscripción total de la autorreferencia en cualquier forma que sea— es verdaderamente peor que la enfermedad, pues estigmatiza como carentes de sentido muchas construcciones perfectamente buenas. Por cierto, la calificación de "carente de sentido" tedría que aplicarse a todo cuanto se discutiera en torno a la teoría de los tipos lingüísticos (por ejemplo, a todo lo expuesto en este párrafo), pues las cosas que se dijeran no tendrían acomodo en ninguno de los niveles —ni en el lenguaje objeto, ni en el metalenguaje, ni en el metametalenguaje, etc. Así, el hecho mismo de discurrir acerca de la teoría sería la más descarada de sus violaciones.

Nadie podría defender esas teorías diciendo que están hechas sólo para estudiar lenguajes formales, y no el lenguaje informal ordinario. Pongamos que así sea. Pero entonces concluimos que tales teorías son extremadamente académicas y tienen muy poco que decir acerca de las paradojas, salvo cuando éstas afloran en ciertos sistemas hechos especialmente y sobre medida. Por otra parte, el afán de eliminar las paradojas a toda costa, y más aun cuando ello entraña la creación de formalismos sumamente artificiales, obliga a conceder un papel desproporcionado a lo coherente, a lo bien encarrilado, con menoscabo de lo extraño, de lo excéntrico, de eso, en fin, que hace que la vida y la matemática sean cosas tan amenas. Es importante, por supuesto, procurar mantener la coherencia, pero cuando este esfuerzo nos empuja a una teoría insignemente fea, sabemos que algo anda mal.

A esta clase de debates en torno a los fundamentos de la matemática obedeció, en los primeros decenios del presente siglo, el enorme interés por codificar los métodos del razonamiento humano. Los matemáticos y los lógicos habían comenzado a abrigar serias dudas en cuanto a la solidez de los fundamentos en que se basaban incluso las teorías más concretas, por ejemplo el estudio de los números enteros (teoría de los números). Si con tal facilidad podían brotar paradojas en la teoría de conjuntos —teoría cuyo concepto básico, el de conjunto, es sin duda muy atractivo desde el punto de vista de la intuición—, ¿cómo esperar que no las hubiera en otras ramas de la matemática? Había, análogamente, la preocupación de que las paradojas de la lógica, la de Epiménides por ejemplo, resultaran ser inherentes a la matemática, y sembraran por consiguiente la duda en todo el terreno matemático, cosa especialmente inquietante para aquellos —y no eran pocos— que veían en la matemática una simple rama de la lógica (o, viceversa, en la lógica una simple rama de la matemática). Gran fuente de controversia fue justamente la pregunta de si la matemática y la lógica son cosas distintas, si existen aparte la una de la otra.

Este estudio de lo que es la matemática vino a conocerse con el nombre de *metamatemática* —y algunas veces *metalógica* a causa de la mencionada trabazón de matemática y lógica. El quehacer más urgente de los metamatemáticos fue determinar la verdadera naturaleza del razonamiento matemático. ¿Cuáles son los métodos o procedimientos legítimos, y cuáles los ilegítimos? El razonamiento matemático se había hecho siempre en un "lenguaje natural" (en francés, en latín o en cualquier otro idioma destinado a la comunicación normal), y por lo tanto había habido siempre muchas zonas de posible ambigüedad. Las palabras tenían significados distintos para los distintos hablantes, evocaban en ellos distintas imágenes, etcétera. Parecía no ya razonable, sino urgente, establecer una notación única y uniforme en que pudiera llevarse a cabo la labor matemática y con cuyo auxilio cualquier par de matemáticos pudiera resolver disputas sobre la validez o invalidez de cualquier demostración que alguien sugiriera. Para esto hacía falta una codificación completa de los modos universalmente aceptables de razonamiento humano, al menos en la medida en que el razonamiento se aplica a la matemática.

Coherencia, completitud y Programa de Hilbert

Tal fue la meta de los *Principia Mathematica*, cuyos autores se propusieron derivar toda la matemática de la lógica, ¡y sin contradicciones, por supuesto! La obra de Russell y Whitehead fue admirada en todas partes, a pesar de que nadie estaba seguro 1) de si toda la matemática quedaba realmente englobada en los métodos diseñados por ellos, y ni siquiera 2) de si esos métodos eran coherentes consigo mismos. ¿Era absolutamente claro que siguiendo los métodos de Russell y Whitehead ningún matemático del mundo podría llegar *nunca* a resultados contradictorios?

Esta pregunta torturó particularmente a David Hilbert, distinguido matemático (y metamatemático) alemán, que formuló ante la comunidad mundial de los matemáticos (y metamatemáticos) el reto siguiente: demostrar rigurosamente —siguiendo quizá esos mismos métodos diseñados por Russell y Whitehead— que el sistema definido en los *Principia Mathematica* es no sólo *coherente* (a salvo de contradicciones), sino también *completo* (o sea, que toda proposición válida de teoría de los números puede desarrollarse en efecto dentro de la armazón trazada en los *P. M.*). El reto era tremendo, aunque también criticable por ser un tanto circular, pues ¿cómo va uno a justificar sus métodos de razonamiento con base en esos mismos métodos de razonamiento? Es como querer alzarnos en el aire tirando del borde de nuestros propios zapatos. (Por lo visto, no hay manera de zafarse de esos Bucles Extraños. . .)

Hilbert, desde luego, era perfectamente consciente del dilema y por eso expresó la esperanza de que pudiera encontrarse una demostración de coherencia o completitud basada únicamente en modos "finitistas" de razonamiento. Se refería con esto a un conjunto pequeño de métodos de razonamiento de general aceptación entre los matemáticos. De esa manera imaginaba que los matemáticos podrían auparse a sí mismos tirando del borde de sus propios zapatos: esperaba, en una palabra, que una simple porción de la totalidad de los métodos matemáticos sirviera para demostrar la solidez del todo. Este objetivo que Hilbert perseguía podrá parecer un tanto esotérico, pero ocupó la cabeza de muchos de los mayores matemáticos del mundo durante los treinta primeros años del presente siglo.

Entonces, en el año 1931, publicó Gödel su artículo, que de varias maneras demolía por completo el programa de Hilbert. El trabajo de Gödel revelaba no sólo que había "agujeros" irreparables en el sistema axiomático propuesto por Russell y Whitehead, sino también, más en lo general, que absolutamente ningún sistema axiomático podía producir todas las verdades relativas a la teoría de los números, salvo que se tratara de un sistema no coherente (!). Y, por último, Gödel hacía ver que la esperanza de demostrar la coherencia de un sistema como el presentado en los *P. M.* era una quimera: en caso de que pudiera hallarse esa demostración usando sólo métodos contenidos en los *P. M.*, entonces —y es ésta una de las consecuencias más perturbadoras del trabajo de Gödel— los mismísimos *P. M.* resultarían no ser coherentes.

La ironía última de todo ello es que la demostración del Teorema de Incompletitud de Gödel suponía implantar la paradoja de Epiménides en el corazón mismo de los *Principia Mathematica*, obra que se tenía por un bastión invulnerable a los ataques de los Bucles Extraños. Es verdad que el Bucle Extraño de Gödel no destruyó los *Principia Mathematica*, pero los hizo muchísimo menos interesantes para los matemáticos, puesto que demostró que los objetivos perseguidos por Russell y Whitehead eran ilusorios.

Babbage, computadoras, Inteligencia Artificial...

Cuando salió a la luz el artículo de Gödel, el mundo estaba casi a punto de producir computadoras digitales electrónicas. La idea de máquinas calculadoras automáticas andaba en el aire desde hacía tiempo. En el siglo XVII, Pascal y Leibniz diseñaron máquinas capaces de realizar ciertas operaciones fijas (suma y multiplicación). Pero estas máquinas no tenían memoria y, para decirlo en jerga actual, no eran programables.

El primer humano que concibió el inmenso potencial computador de la maquinaria fue el londinense Charles Babbage (1792-1871). Babbage, personaje que pudo casi haber salido de las páginas de los *Pickwick Papers*, fue famoso en vida por la vigorosa campaña que emprendió para limpiar a Londres de "plagas callejeras", los organillos sobre todo. Los organilleros, por sacar de quicio al pobre hombre, venían a darle serenatas a toda hora del día y de la noche, y entonces él los expulsaba furiosamente, corriendo tras ellos por la calle. Actualmente reconocemos en Babbage a un hombre que se adelantó cien años a sus tiempos: además de ser el inventor de los principios básicos de las computadoras modernas, fue también uno de los primeros que lucharon contra la contaminación por el ruido.

Su invento inicial, la "Máquina de Diferencias", podía generar tablas matemáticas de muchos tipos mediante el "método de diferencias". Pero antes de construir ningún modelo de "M. D.", Babbage se obsesionó con una idea mucho más revolucionaria: su "Máquina Analítica". "El camino que me ha llevado a ella —escribió con muy poca modestia— es probablemente el más enmarañado y complejo que jamás ha ocupado la inteligencia humana."[4] A diferencia de todas las máquinas diseñadas hasta entonces, la "M. A." iba a poseer al mismo tiempo un "almacén" (memo-

[4] Charles Babbage, *Passages from the Life of a Philosopher*, Londres, 1864 (reimpreso en 1968), pp. 145-146.

ria) y un "molino" (unidad encargada de calcular y de hacer decisiones). Estas unidades iban a estar hechas de mil y mil complicados cilindros dentados, trabados entre sí con engranajes dispuestos en formas increíblemente complejas. Babbage tuvo una visión de números entrando y saliendo en enjambres del molino bajo el control de un *programa* contenido en tarjetas perforadas. La inspiración de esta idea le vino del telar de Jacquard, maquinaria controlada por tarjetas perforadas y capaz de tejer diseños asombrosamente complicados. Una amiga de Babbage, la brillante pero malograda condesa Ada Lovelace (hija de Lord Byron), dijo poéticamente una vez que "la Máquina Analítica *teje diseños algebraicos* tal como el telar de Jacquard teje flores y hojas". Por desgracia, su empleo del tiempo presente puede inducir a error: nunca llegó a construirse una sola "M. A." y Babbage murió en la desilusión y la amargura.

Al igual que Babbage, Lady Lovelace era muy consciente de que con el invento de la Máquina Analítica la humanidad le estaba guiñando el ojo a la inteligencia mecanizada —particularmente si la Máquina era capaz de "comerse su propia cola" (como describió Babbage el Bucle Extraño que se da cuando una máquina tiene acceso a su propio programa almacenado y lo altera). En un trabajo de 1842,[5] escribió que la "M. A." "podría actuar sobre otras cosas aparte del *número*". Y si Babbage soñaba con la creación de partidas automáticas de "gato" y de ajedrez, ella declaraba que la Máquina, con melodías y armonías codificadas en sus cilindros rotantes, "podría componer piezas de música refinadas y científicas, de cualquier grado de complejidad y de cualquier extensión". Pero casi de un mismo resuello añadía esta advertencia: "La Máquina Analítica no tiene la menor pretensión de *originar* nada. Las cosas que *sabemos cómo ordenarle* hacer, ésas sí las puede realizar todas." Aunque entendía bien las potencialidades de la computación artificial, Lady Lovelace era escéptica en cuanto a la creación artificial de inteligencia. Pero ¿acaso su aguda intuición no podía permitirle soñar en la vastedad del campo que iba a abrirse con la domesticación de la electricidad?

En nuestro siglo el ambiente estaba ya listo para las computadoras, máquinas que dejan atrás los más alocados sueños de Pascal, Leibniz, Babbage y Lady Lovelace. Entre 1930 y 1950 se diseñaron y construyeron los primeros "cerebros electrónicos gigantes", que catalizaron la convergencia de tres zonas anteriormente inconexas: la teoría del razonamiento axiomático, el estudio de la computación mecánica y la psicología de la inteligencia.

Esos mismos años vieron desarrollarse a saltos y brincos la teoría de las computadoras, teoría íntimamente ligada a la metamatemática. De hecho, el Teorema de Gödel no tardó en tener en la teoría de la computa-

[5] Lady A. A. Lovelace, comentario sobre el artículo de L. F. Menabrea, *"Sketch of the Analytical Engine Invented by Charles Babbage"* (Ginebra, 1842), reimpreso en P. y E. Morrison, *Charles Babbage and His Calculating Engines*, Nueva York, 1961, pp. 248-249 y 284.

ción un principio paralelo (descubierto por Alan Turing), que revela la existencia de "agujeros" ineluctables hasta en la computadora más potente que pueda imaginarse. Cosa irónica: justamente en los días en que se estaban trazando estos límites en cierto modo sobrecogedores, se construían también computadoras de verdad, cuyas capacidades parecían aumentar y aumentar más allá de la capacidad de profecía de sus constructores. Babbage, el hombre que dijo una vez que gustosamente daría todo el resto de su vida a cambio de regresar a la Tierra quinientos años después y hacer, guiado por alguien, un recorrido científico de la nueva era durante sólo tres días, se habría quedado mudo de estupor apenas un siglo después de su muerte —lo mismo por las máquinas nuevas que por sus inesperadas limitaciones.

Hacia 1950-1955, la inteligencia mecanizada parecía estar ya a tiro de piedra; lo malo era que por cada estorbo que se dejaba atrás aparecía siempre otro nuevo estorbo cerrando el paso a la creación efectiva de una auténtica máquina de pensar. ¿Había una razón profunda para esa inacabable y misteriosa esquividad de la meta?

No hay quién sepa dónde está la raya divisoria entre la conducta no-inteligente y la conducta inteligente; más aun, el sólo decir que existe una tajante raya divisoria es probablemente una estupidez. Pero hay capacidades que son, desde luego, características de la inteligencia:

responder muy flexiblemente a las situaciones;
sacar provecho de circunstancias fortuitas;
hallar sentido en mensajes ambiguos o contradictorios;
reconocer la importancia relativa de los diferentes elementos de una situación;
encontrar semejanzas entre varias situaciones, pese a las diferencias que puedan separarlas;
descubrir diferencias entre varias situaciones, pese a las semejanzas que puedan vincularlas;
sintetizar nuevos conceptos sobre la base de conceptos viejos que se toman y se reacomodan de nuevas maneras;
salir con ideas novedosas.

Aquí nos topamos con algo que suena a paradoja. Por su naturaleza misma, las computadoras son los animales más inflexibles, los más privados de deseos, los más seguidores de reglas. Pese a su gran rapidez, son el epítome de la inconciencia. ¿Cómo programar entonces la conducta inteligente? Una de las tesis principales del presente libro es que no hay contradicción alguna, y uno de sus principales objetivos es lograr que el lector se anime a encarar la contradicción sin ningún miedo, a saborearla, a darle vueltas, a desmenuzarla, a revolcarse en ella, para que al terminar la lectura se vea dueño de nuevas ideas sobre el abismo al parecer insalvable entre lo formal y lo informal, lo animado y lo inanimado, lo flexible y lo inflexible.

No es otra cosa lo que persiguen las investigaciones sobre Inteligencia Artificial (IA). Y es un espectáculo singular el que ofrecen esos investigadores de IA que afanosamente toman largos conjuntos de reglas y los arman en formalismos estrictos para decirles a las máquinas inflexibles de qué modo ser flexibles.

Pero ¿qué clase de "reglas" podría llegar a abarcar todo eso que para nosotros es la conducta inteligente? Desde luego, tiene que haber reglas en toda clase de niveles distintos. Tiene que haber muchas reglas "llanas y simples". Tiene que haber "metarreglas" con que modificar las reglas "llanas y simples", y en seguida "metametarreglas" con que modificar las metarreglas, y así hasta nunca acabar. La flexibilidad de la inteligencia es resultado del enorme número de reglas distintas y de niveles distintos de reglas que existen. La razón de tantas reglas que operan en tantos niveles distintos es que el ser humano se enfrenta en la vida a millones de situaciones de tipos completamente heterogéneos. En ciertas situaciones existen respuestas estereotipadas para las cuales bastan las reglas "llanas y simples". Otras situaciones son mezcla de varias situaciones estereotipadas, y entonces hacen falta reglas para decidir cuál de las reglas "llanas y simples" hay que aplicar. Otras situaciones no pueden clasificarse y entonces hacen falta reglas para inventar nuevas reglas. . . etcétera. En el meollo de la inteligencia hay, sin duda alguna, Bucles Extraños fundados en reglas que, directa o indirectamente, se alteran a sí mismas. La complejidad de nuestro entendimiento parece a veces tan abrumadora que el problema de entender la inteligencia se nos antoja insoluble; sentimos que es erróneo postular algún tipo de regla capaz de gobernar la conducta del ser humano, aunque tomemos la palabra "regla" en el sentido amplísimo (abarcador de muchos niveles) que antes le dimos.

. . . y Bach

En 1754, cuatro años después de la muerte de J. S. Bach, un teólogo de Leipzig, Johann Michael Schmidt, escribió este notable párrafo en un tratado sobre música y sobre el alma:

> Hace no muchos años llegó de Francia la noticia de que alguien había fabricado una estatua que podía ejecutar varias piezas en la *Fleuttraversiere*. La estatua se llevaba la flauta a los labios y luego la retiraba, movía los ojos, etcétera. Pero nadie ha inventado todavía una imagen capaz de pensar, de desear, de componer algo, o de hacer nada semejante. Quien desee convencerse de ello examine atentamente la última obra fugal del ya elogiado Bach, recién impresa en calcografía, pero que quedó inconclusa por haberse interpuesto la ceguera del autor, y observe el arte que en ella está encerrado; o bien (y esto le va a parecer seguramente más portentoso) examine el Coral que durante su ceguera dictó Bach a una pluma ajena: *Wenn wir in höchsten Nöthen seyn*. Estoy convencido de que no tardará en necesitar su alma si quiere captar todas las bellezas en él encerradas, y no digamos si desea tocarlo para su propio deleite, o expresar un

juicio sobre el autor. Todo cuanto proponen los campeones del Materialismo tiene que derrumbarse frente a este solo ejemplo.[6]

Muy probablemente alude Johann Michael Schmidt al principal de los "campeones del materialismo", Julien Offroy de la Mettrie, filósofo residente en la corte de Federico el Grande, autor de *L'Homme machine* ("El hombre máquina") y Materialista Por Excelencia. Han pasado ahora más de 200 años, y sigue trabada todavía la pugna entre los que están con Schmidt y los que están con La Mettrie. EL presente libro se propone, entre otras cosas, dar una perspectiva de esa pugna secular.

"Gödel, Escher, Bach"

Mi libro está estructurado de manera poco habitual: como un contrapunto de Diálogos y Capítulos. Me he decidido por esta estructura para poder presentar dos veces los conceptos nuevos; casi siempre cada concepto nuevo se introduce metafóricamente en un Diálogo que expone una serie de imágenes concretas y visuales, y luego, a lo largo del Capítulo que sigue, esas imágenes sirven de trasfondo intuitivo para una presentación más seria y abstracta del concepto en cuestión. En muchos de los Diálogos doy la impresión, en el nivel superficial, de estar refiriéndome a tal o cual idea, cuando en realidad hablo, en forma ligeramente disfrazada, de otra distinta.

En un principio los personajes de mis Diálogos eran sólo Aquiles y la Tortuga, los cuales me llegaron de Zenón de Elea a través de Lewis Carroll: Zenón de Elea, inventor de paradojas, vivió en el siglo V antes de nuestra era. Una de sus paradojas es una alegoría que tiene por protagonistas a Aquiles y la Tortuga. El primero de mis Diálogos, *Invención a tres voces*, refiere cómo inventó Zenón esa simpática pareja. En 1895 Lewis Carroll reanimó a Aquiles y a la Tortuga para ilustrar su nueva y personal paradoja del infinito. La paradoja de Carroll, que merece ser mucho mejor conocida de lo que es, desempeña un papel importante en el presente libro. Intitulada por él "Lo que dijo la Tortuga a Aquiles", se llama en mi libro *Invención a dos voces*.

En cuanto comencé a escribir Diálogos los relacioné de alguna manera con formas musicales. No recuerdo en qué momento ocurrió; lo que sé es que un día escribí "Fuga" como encabezado de uno de los primeros Diálogos y que desde entonces se me quedó clavada la idea. Más tarde decidí hacer que cada Diálogo estuviera modelado, en una u otra forma, sobre alguna de las composiciones de Bach. Esto no es tan disparatado. El propio Bach solía recordarles a sus discípulos que las diversas partes de sus composiciones debían comportarse a manera de "personas conversando unas con otras, como se hace en una compañía selecta". Tal vez he tomado esa sugerencia un poco más a la letra de lo que Bach mismo pensaba;

[6] David y Mendel, *The Bach Reader*, pp. 255-256.

espero, sin embargo, que el resultado sea fiel a su significado. Fuente de particular inspiración han sido ciertos rasgos de las composiciones de Bach que desde siempre me han impresionado y que de manera tan excelente describen David y Mendel en *The Bach Reader*:

> Su forma se basaba, en general, en las relaciones entre secciones distintas. Estas relaciones iban desde la identidad total de pasajes, por un lado, hasta la recurrencia de determinado principio de elaboración o la reaparición de una simple alusión temática, por otro. Las estructuras así originadas suelen ser simétricas, pero de ninguna manera se trata de una regla indispensable. A veces las relaciones entre las diversas secciones crean un laberinto de hilos entreverados que sólo un análisis detallado puede desenredar. Sin embargo, hay por lo general cierto número de rasgos dominantes que proporcionan una orientación adecuada a primera vista o a primer oído, y, por más que en el curso del estudio podamos ir descubriendo interminables sutilezas, jamás nos queda la menor incertidumbre en cuanto a la unidad que reúne a todas las creaciones de Bach.[7]

He procurado urdir una Eterna Trenza de Oro con estos tres hilos: Gödel, Escher, Bach. Mi intención inicial era escribir un ensayo en cuyo centro iba a estar el Teorema de Gödel. Me lo imaginé de las dimensiones de un *folleto*. Pero mis ideas se expandieron como una esfera y no tardaron en toparse con Bach y con Escher. Tardé algún tiempo en comprender la necesidad de hacer explícita esta conexión en vez de dejarla funcionar sólo como fuerza motivadora personal. Pero al final me di cuenta de que Gödel, Escher y Bach no eran, para mí, sino sombras proyectadas en distintas direcciones por alguna esencia *sólida* central. Traté de reconstruir el objeto central y lo que me resultó es este libro.

[7] *Ibid.*, p. 40.

Invención a Tres Voces

Aquiles (guerrero griego, el más veloz de todos los mortales) y una Tortuga están conversando al rayo del sol, en una pista polvorienta. A lo lejos, donde acaba la pista, hay un asta de la cual pende una bandera rectangular de gran tamaño. La bandera es de color rojo macizo, salvo un lugar en que le han recortado a la tela un agujerito en forma de anillo a través del cual puede verse el cielo.

Aquiles: ¿Qué es esa extraña bandera, allí, al final de la pista? Me recuerda en cierta forma un grabado de mi artista preferido, M. C. Escher.

Tortuga: Es la bandera de Zenón.

Aquiles: ¿No le parece a usted que el agujero que tiene es como los agujeros de la banda de Möbius que una vez dibujó Escher? Algo raro sucede en esa bandera, no cabe duda.

Tortuga: El anillo que le han recortado tiene la forma del numeral cero, que es el predilecto de Zenón.

Aquiles: ¡Pero el cero no se ha inventado todavía! Tendrán que pasar unos milenios para que lo invente un matemático hindú. Con lo cual, señora T, demuestro que esa bandera es imposible.

Tortuga: Su argumento es persuasivo, Aquiles, y me es forzoso aceptar que esa bandera es imposible en efecto. Pero de todas maneras es bonita, ¿no le parece?

Aquiles: Ah, eso desde luego: no hay duda de que es bonita.

Tortuga: ¿Habrá alguna relación entre su belleza y su imposibilidad? No es que yo sepa de estas cosas. Nunca he tenido ocasión de analizar la Belleza. Es una Esencia con Mayúscula, y veo que jamás he tenido tiempo para ocuparme de Esencias con Mayúscula.

Aquiles: A propósito de Esencias con Mayúscula, señora T, ¿nunca se ha preguntado usted cuál es la Finalidad de la Vida?

Tortuga: Caramba, no.

Aquiles: ¿No se ha preguntado nunca por qué estamos aquí, ni quién nos inventó?

Tortuga: Ah, eso es completamente distinto. Somos invento de Zenón (como veremos muy pronto); y la razón de nuestra presencia aquí es que vamos a jugar una carrera usted y yo.

Aquiles: ¿Una carrera? ¡Pero qué disparate! ¡Yo, el más veloz de todos los mortales, y usted, campeona de pachorra entre todos los pachorrudos! No le veo el menor chiste a una carrera así.

Tortuga: Podría usted darme un poco de ventaja.

Aquiles: Un mucho, diría yo.

Figura 10. Banda de Möbius, *de M. C. Escher (grabado en madera impreso en cuatro planchas, 1961).*

Tortuga: No me opongo.

Aquiles: Pero tarde o temprano la alcanzaré a usted, y lo más seguro es que temprano.

Tortuga: Si las cosas suceden de acuerdo con la paradoja de Zenón, no va a ser así. Zenón espera utilizar nuestra competencia para demostrar que el movimiento es imposible, ¿me entiende usted? Según Zenón, es sólo en la mente donde parece posible el movimiento. A decir verdad, El Movimiento Es Inherentemente Imposible. El lo demuestra con bastante elegancia.

Aquiles: Ya, ya, ahora lo recuerdo: el famoso koan zen sobre el maestro zen. Tiene usted razón, es cosa muy simple.

Tortuga: ¿Koan zen? ¿Maestro zen? ¿De qué está usted hablando?

Aquiles: Va así: dos monjes disputaban acerca de una bandera. Uno decía: "La bandera se está moviendo". El otro decía: "El aire se está moviendo". Acertó a pasar por allí el sexto patriarca, Zenón, y les dijo: "Ni el aire, ni la bandera; lo que se mueve es la mente".

Tortuga: Me temo que esté usted algo confundido, Aquiles. Zenón no es maestro zen ni cosa que se le parezca. Es un filósofo griego, nacido en la ciudad de Elea (que queda a medio camino entre los puntos A y B). Dentro de unos siglos, este Zenón se hará célebre por sus paradojas acerca del movimiento. En una de esas paradojas, justamente, va a tener papel central esta competencia de velocidad entre usted y yo.

Aquiles: Pero entonces estoy hecho un lío. Recuerdo clarísimamente cómo solía yo recitar y recitar los nombres de los seis patriarcas zen, siempre decía: "El sexto patriarca es Zenón, el sexto patriarca es Zenón. . ."

(Sopla de repente una brisa suave y tibia.)

¡Ah! ¡Mire, señora Tortuga! ¡Mire cómo ondea la bandera! Me encanta ver esas olitas que van rizando la tela tan suave. ¡Y el anillo que le recortaron está ondeando también!

Tortuga: No sea usted tonto. La bandera es imposible, por lo tanto no puede estar moviéndose. El aire es el que se mueve.

(En este momento acierta a pasar Zenón.)

Zenón: ¡Hola! ¡Muy buenas tardes! ¿Qué pasa? ¿Qué hay de nuevo?

Aquiles: Que la bandera se está moviendo.

Tortuga: Que el aire se está moviendo.

Zenón: ¡Amigos, Amigos Míos! ¡Suspendan ustedes su disputa! ¡No dejen correr más vitriolo! ¡Abandonen su discordia! Yo me comprometo a resolverles su problema en un momentito. ¡Vaya pleito! ¡Y en un día tan despejado!

Aquiles: Este fulano seguramente se está haciendo el loco.

Tortuga: No se apresure, Aquiles. Oigamos lo que quiere decirnos. Oh, Desconocido Señor, ¿querría usted hacernos partícipes de sus pensamientos en torno a este problema?

Zenón: Con todo gusto. Ni el aire ni la bandera: ninguno de los dos se está moviendo. Más aún, no hay cosa alguna que se mueva. Y la razón de ello es que he descubierto un gran Teorema que dice: "El Movimiento es Inherentemente Imposible". Teorema del cual se sigue otro teorema más grande aún, el Teorema de Zenón: "El Movimiento Inexiste".

Aquiles: ¿"Teorema de Zenón"? Dígame, señor, ¿es usted de casualidad el filósofo Zenón de Elea?

Zenón: Sí, Aquiles. El mismo.

Aquiles: (*rascándose la cabeza, muy perplejo*): ¿Y eso? ¿Cómo habrá averiguado mi nombre?

Aquiles: ¿Estarían ustedes dispuestos a prestarme oídos mientras les explico por qué mi Teorema es verdadero? Esta misma tarde, después de salir del punto A, he tomado el camino de Elea sin más propósito que encontrar a alguien que quisiera concederme un poco de atención y escuchar mi bien afilado argumento. Pero todo el mundo anda corriendo de aquí para allá, y nadie me ha hecho caso. No tienen ustedes idea del desaliento que le entra a uno cuando se topa con negativa tras negativa. Pero perdón, no quiero abrumarlos con problemas míos. Una sola cosa les pido. ¿Accederían ustedes a complacer a este filósofo viejo y tonto durante unos cuantos momentos —unos cuantos, de veras— escuchando sus excêntricas teorías?

Aquiles: ¡Pero claro, no faltaba más! Ilumínemos usted, tenga la bondad. Y me consta que estoy hablando no sólo por mí, sino también por mi compañera, la señora Tortuga, que hace apenas unos momentos se expresaba de usted con gran veneración y mencionaba especialmente sus paradojas.

Zenón: Gracias. Pues verán ustedes: mi Maestro, el quinto patriarca, me enseñó que la realidad es una, inmutable e inalterable, y que toda pluralidad, todo cambio y todo movimiento son meras ilusiones de los sentidos. Algunos se han reído de esas ideas; pero yo les demostraré a ustedes lo absurdo de sus burlas. Mi argumento es sencillísimo. Voy a ilustrarlo con dos personajes que son Invento mío: Aquiles (guerrero griego, el más veloz de todos los mortales) y una Tortuga. en mi cuento, un transeúnte que se topa con ellos los persuade a jugar, en una pista polvorienta, una carrera cuya meta es una bandera distante que ondea al soplo de la brisa. Vamos a suponer que a la Tortuga, por ser un corredor mucho más lento, se le da una ventaja de, digamos, diez varas. Comienza entonces la carrera. De unas cuantas zancadas ha llegado Aquiles al punto de donde partió la tortuga.

Aquiles: ¡Ja!

Zenón: Y ahora la ventaja que la tortuga le lleva a Aquiles es sólo de una vara. Llegar a ese punto es, para Aquiles, cuestión de un instante.

Aquiles: ¡Jo jo!

Zenón: Durante ese instante, sin embargo, la Tortuga ha conseguido avanzar otro poquito. En un relámpago, Aquiles cubre también esta distancia.

Aquiles: ¡Je je je!

Zenón: Sólo que en ese relámpago brevísimo la Tortuga ha logrado adelantar un poquitín más, de manera que Aquiles continúa a la zaga. Como ustedes pueden ver, para que Aquiles alcance a la Tortuga va a ser preciso que este juego de alcánzame-si-puedes" se juegue un número INFINITO de veces, lo cual equivale a decir que Aquiles no podrá alcanzar NUNCA a la Tortuga.

Tortuga: ¡Ji ji ji ji!

Aquiles: Hmm. . . hmm. . . hmm. . . hmm. . . hmm. . . Este argumentito me suena mal. Pero por más vueltas que le doy, no hallo dónde está lo malo.

Zenón: ¿No es excelente como quebradero de cabeza? Es mi paradoja predilecta.

Tortuga: Perdóneme usted, Zenón, pero creo que su cuento no está ilustrando el principio que debiera. Porque, mire: usted acaba de exponernos eso que dentro de unos siglos va a llamarse "la paradoja de Aquiles" de Zenón, la cual demuestra (¡ejem!) que Aquiles no alcanza nunca a la Tortuga; pero la demostración de que El Movimiento Es Inherentemente Imposible (y, por consiguiente, de que El Movimiento Inexiste) está en otra de sus paradojas, la "paradoja de la dicotomía", ¿no es así?

Zenón: ¡Pero qué cabeza la mía! tiene usted toda la razón, por supuesto. Es la que explica cómo, para llegar de A a B, hay que recorrer primero la mitad del trayecto, y para cubrir la distancia restante también hay que recorrer primero la mitad, y así más y más veces. Pero, como ustedes ven, estas dos paradojas están hechas en realidad de una sola materia. Hablando con franqueza, yo no he tenido sino una sola Gran Idea, y simplemente la exploto de distintas maneras.

Aquiles: Estoy segurísimo de que esos argumentos contienen una falla. No consigo ver dónde, pero no pueden estar bien.

Zenón: ¿Duda usted de la validez de mi paradoja? ¿Por qué no la sometemos a una prueba? ¿Ve usted esa bandera roja allí, donde acaba la pista?

Aquiles: ¿La imposible, basada en un grabado de Escher?

Zenón: Esa misma. ¿Qué le parece si usted y la señora Tortuga la toman como meta de una carrera? Estará usted de acuerdo en darle a la señora T una justa ventaja de. . . mmm. . . no sé. . .

Tortuga: ¿Qué tal diez varas?

Zenón: Me parece perfecto: diez varas.

Aquiles: Cuando usted guste.

Zenón: ¡Estupendo! ¡Qué emoción! ¡La prueba empírica de un Teorema mío que está rigurosamente demostrado! Señora Tortuga, ¿quiere usted ocupar su posición a diez varas de donde estamos?

(La tortuga avanza diez varas en dirección de la bandera)

Tortuga y Aquiles: ¡Listos!

Zenón: ¡En sus marcas! ¡Prepárense! ¡Ya!

CAPITULO I

El acertijo MU

Sistemas formales

UNA DE LAS NOCIONES CENTRALES de este libro es la de *sistema formal.* El tipo de sistema formal que utilizo fue creado por el lógico norteamericano Emil Post durante la década de los veinte, y es denominado a menudo "sistema de producción de Post". Este capítulo expone un sistema formal; espero que, además, el lector sienta el deseo de ampliar aunque sea mínimamente esta noción: así, a fin de provocar su curiosidad, he planteado un modesto acertijo.

"¿Puede usted producir MU?", es el desafío. Para comenzar, se deberá disponer de una *cadena* (se trata de una cadena de letras).[1]

Para interrumpir el suspenso, digamos que esa cadena será MI. Serán establecidas determinadas reglas, cuya aplicación permitirá transformar una cadena en otra distinta. Si alguna de tales reglas es utilizable en cierto momento, y se desea aplicarla, no hay inconveniente en hacerlo, pero no habrá nada que indique cuál regla es la adecuada en caso de que sean varias las utilizables. Es necesario optar, y en ello consiste la práctica del juego a través del cual todo sistema formal puede llegar a asemejarse a un arte. El requisito principal, obviamente, es que no se debe proceder al margen de las reglas. "Requisito de Formalidad", podemos llamar a esta limitación, que probablemente *no* deba ser subrayada en el transcurso de este capítulo; sin embargo, y por extraño que parezca, predigo que cuando juegue con algunos sistemas formales de los capítulos siguientes, el lector descubrirá que está *violando* repetidas veces el Requisito de Formalidad, excepto si ha trabajado anteriormente con sistema formales.

Lo primero por decir a propósito de nuestro sistema formal *—el sistema MIU—* es que emplea *sólo* tres letras del alfabeto: M, I, U. Esto significa que las cadenas del sistema MIU estarían formadas exclusivamente por esas tres letras. Las que siguen son algunas de las cadenas del sistema:

[1] Para referirnos a las cadenas, emplearemos las siguientes convenciones: si aparecen en la misma tipografía que el resto del texto, serán señaladas mediante comillas simples o dobles. La puntuación que corresponda a la frase, y no a la cadena de que se hable, estará ubicada *fuera* de las comillas, como es lógico. Por ejemplo, la primera letra de esta oración es "P", mientras que la primera letra de 'esta oración' es 'e'. Sin embargo, cuando la cadena aparezca en otra tipografía, no se usarán comillas, a menos que sea imprescindible por razones de claridad. Por ejemplo, la primera letra de otra es o.

MU
UIM
MUUMUU
UIIUMIUUIMUIIUMIUU

Pese a que todas las precedentes son cadenas legítimas, aún no están "en poder" del jugador. En realidad, la única que éste posee hasta ahora es MI. Sólo mediante la aplicación de las reglas, que a continuación enuncio, podrá ampliar el lector su colección privada. He aquí la primera regla:

REGLA I: Si se tiene una cadena cuya última letra sea I, se le puede agregar una U al final.

Dicho sea de paso, por si no se lo ha advertido, al decir "cadena" se da por sentado que las letras están situadas en un orden establecido. Por ejemplo, MI e IM son dos cadenas diferentes. Una cadena de símbolos no es precisamente un "saco" de símbolos, donde el orden interno sería indiferente.

He aquí la segunda regla:

REGLA II: Supongamos que se tenga M*x*. En tal caso, puede agregarse M*xx* a la colección.

Unos pocos ejemplos ilustrarán esto.

Dado MIU, se puede obtener MIUIU.
Dado MUM, se puede obtener MUMUM.
Dado MU, se puede obtener MUU.

En consecuencia, la letra '*x*' simplemente representa cualquier cadena, pero una vez que se ha decidido cuál es la cadena representada, es preciso ajustarse a tal decisión (hasta que se vuelva a aplicar la regla: entonces será posible decidir otra cosa). Observemos el tercero de los ejemplos anteriores, que muestra cómo, una vez que se tiene MU, se puede incorporar otra cadena a la colección, ¡pero primero es necesario obtener MU! Quisiera hacer un último comentario acerca de la letra '*x*': el modo en que ésta integra el sistema formal no es el mismo que caracteriza a 'M', 'I' y 'U'. Nos resulta útil contar con alguna manera de referirnos en general, simbólicamente, a las cadenas del sistema, y ésa es la función de '*x*': representar cadenas arbitrarias. Si alguien suma a su "colección" una cadena que contenga una '*x*', está cometiendo un error, porque las cadenas del sistema MIU nunca pueden incluir '*x*'.

Ahora, la tercera regla:

REGLA III: Si en una de las cadenas de la colección aparece la secuencia III, puede elaborarse una nueva cadena sustituyendo III por U.

Ejemplos:

Dado UMIIIMU, se puede elaborar UMUMU.
Dado MIIII, se puede elaborar MIU (también MUI).
Dado IIMII, la aplicación de esta regla no permite ninguna transformación (las tres III deben ser consecutivas).
Dado MIII, se elabora MU.

Bajo ninguna circunstancia ha de pensarse en emplear la regla en sentido inverso, como en el ejemplo siguiente:

Dado MU, obtener MIII. ⇐ Erróneo.

Las reglas son unidireccionales.
He aquí la última:

REGLA IV: Si aparece UU en el interior de una de las cadenas, está permitida su eliminación.

Dado UUU, se obtiene U.
Dado MUUUIII, se obtiene MUIII.

Eso es todo; a continuación, hay que tratar de obtener MU. No hay que preocuparse si no se lo consigue: lo principal es hacer un pequeño intento, a fin de tomarle el gusto a este acertijo. Diviértase el lector.

nas, axiomas, r as

La solución del acertijo MU aparece en otra parte de este libro. Lo importante ahora no es leer la solución, sino investigarla. Si el lector ya hizo algunos intentos para producir MU, tendrá elaborada su colección personal de cadenas. Estas, generadas mediante el empleo de las reglas, se llaman *teoremas*. El sentido del término "teorema" es, aquí, por completo diferente al que es común en el ámbito de la matemática, la cual llama de ese modo a las afirmaciones formuladas en lenguaje corriente cuya veracidad ha sido probada por medio de una demostración rigurosa; por ejemplo, el Teorema de Zenón sobre la "inexistencia" del movimiento, o el Teorema de Euclides acerca de la infinitud de los números primos. En los sistemas formales, en cambio, no hay necesidad de considerar los teoremas como afirmaciones: son, simplemente, cadenas de símbolos y, por otra parte, en lugar de ser *demostrados*, sólo son *producidos*, como si los elaborara una máquina con arreglo a determinadas reglas *tipográficas*. Con el objeto de subrayar esta importante distinción en los significados de la palabra "teorema", adoptaré en más la siguiente convención: cuando "teorema" aparezca con mayúscula inicial, se tratará de la acepción ordinaria: un teorema es una afirmación formulada en lenguaje corriente cuya veracidad alguien probó a través de cierto tipo de demostración lógica. Cuando aparezca en minúsculas, "teorema" estará empleado en su sentido técnico: una cadena producible dentro de algún sistema formal. Bajo estas condiciones, el acertijo MU plantea si MU es un teorema del sistema MIU.

Al empezar, proporcioné gratuitamente un teorema al lector, MI. Este teorema "gratuito" es un *axioma*; se repite ahora el caso de que el significado técnico difiere por completo del significado habitual. Un sistema formal puede tener cero, uno, varios o inclusive infinitos axiomas; en el curso de este libro aparecerán ejemplos de todas estas variantes.

Todo sistema formal cuenta con reglas de derivación de símbolos, tales como las cuatro reglas del sistema MIU. Estas reglas son denominadas *reglas de producción*, o bien *reglas de inferencia*; utilizaré en adelante ambas expresiones.

Por último, el concepto que quiero comentar en este desarrollo es el de *derivación*. Lo que sigue es una derivación del teorema MUIIU:

(1)	MI	axioma
(2)	MII	de (1), aplicando la regla II
(3)	MIIII	de (2), aplicando la regla II
(4)	MIIIIU	de (3), aplicando la regla I
(5)	MUIU	de (4), aplicando la regla III
(6)	MUIUUIU	de (5), aplicando la regla II
(7)	MUIIU	de (6), aplicando la regla IV

Una derivación de un teorema es una demostración, explícita y punto por punto, del modo en que es producido el mismo de acuerdo a las reglas del sistema formal. El concepto de derivación está acuñado siguiendo el modelo del de prueba, pero una derivación es pariente lejana de una prueba, en realidad. Si alguien dice que *probó* MUIIU, sonaría raro, pero no sonaría tan raro si se dice que se ha *derivado* MUIIU.

Interior y exterior del sistema

Muchas personas abordan el acertijo MU dedicándose a derivar, de una manera enteramente azarosa, gran cantidad de teoremas, sólo por ver qué sucede. Muy pronto, esas personas comienzan a advertir ciertas propiedades en los teoremas que han elaborado: es aquí donde la inteligencia humana introduce la descripción. Por ejemplo, probablemente no era obvio para el lector que todos los teoremas iban a comenzar con M hasta que no hizo unos pocos intentos. Y luego, ya descubierto el modelo, el lector habrá podido comprenderlo a través del análisis de las reglas, cuyo atributo es obligar a que cada nuevo teorema reciba su primera letra de un teorema precedente; en último caso, por consiguiente, todas las letras iniciales de los teoremas pueden ser obtenidas a partir de la primera letra del axioma MI: y esto constituye una demostración de que todos los teoremas del sistema MIU deben comenzar con M.

Ha ocurrido aquí algo muy significativo: lo anterior muestra una diferencia entre seres humanos y máquinas. Es perfectamente posible —y muy fácil, en realidad— programar una computadora para que genere teorema tras teorema del sistema MIU; y podríamos incluir en la programación la orden de que sólo se detenga al generar U. El lector ya sabe que una computadora así programada no se detendría nunca. Y ello no lo asombra, pero ¿qué ocurre si le pide a un amigo que trate de generar U? Le parecerá natural que, pasado un rato, el amigo se lamente de no poder evitar la inicial M, y de estar persiguiendo, en consecuencia, un objetivo imposible. Aun cuando se trate de una persona no muy aguda, no dejará de formular algunas observaciones a propósito de lo que está haciendo, y tales observaciones le permitirán comprender con claridad el problema: en el programa de computación que hemos descrito la comprensión estará ausente.

Seré muy explícito acerca de lo que quiero decir cuando señalo que lo anterior ilustra una diferencia entre seres humanos y máquinas. Quiero significar que es *posible* programar una máquina para que realice una tarea rutinaria, de un modo tal que la máquina jamás advierta ni siquiera los hechos más obvios vinculados con lo que está haciendo; en cambio, apercibirse de determinados hechos vinculados con lo que se está haciendo es algo inherente a la conciencia humana. Pero el lector ya sabía muy bien esto. Si alguien oprime el "1" de una máquina sumadora, y luego repite la operación, y la sigue repitiendo sin cesar durante horas y horas, la máquina no aprenderá jamás a anticiparse al operador sumando un nuevo "1" por sí misma, a pesar de que cualquier persona asimilaría muy rápidamente el comportamiento repetitivo. O bien, para agregar un ejemplo simple, un automóvil jamás captará la idea de que es necesario no chocar con otros automóviles o con obstáculos cuando circule; por mucho o muy bien que haya sido conducido, tampoco llegará a aprender ni siquiera los trayectos más habituales de su propietario.

La diferencia, entonces, reside en que a la máquina le es *posible* actuar sin advertirlo, cosa imposible para el ser humano. Hago notar que no estoy diciendo que todas las máquinas son necesariamente incapaces de efectuar observaciones refinadas: sólo algunas máquinas lo son. Tampoco estoy afirmando que toda persona, siempre, efectúa ese tipo de observaciones; en realidad, la gente actúa a menudo sin ejercitar la observación. Sin embargo, puede conseguirse que las máquinas sean absolutamente no observadoras, cosa que no es posible con los seres humanos. La mayoría de las máquinas construidas hasta ahora, por cierto, están bastante cerca de la inobservancia total. Es probable que ello motive la opinión generalizada de que la inobservancia es el rasgo característico de las máquinas. Por ejemplo, si alguien dice que cierta tarea es "mecánica" no quiere expresar que no puede ser realizada por una persona, sino que únicamente una máquina podría efectuarla una y otra vez sin quejarse, o sin aburrirse.

Brincos fuera del sistema

Uno de los atributos inherentes a la inteligencia es la capacidad de alejarse mediante un brinco de lo que está haciendo, con el objeto de examinarlo; en todos los casos esto es buscar, y a menudo con éxito, modelos. Ahora bien, dije que la inteligencia puede brincar fuera de su labor, pero eso no quiere significar que así ocurra siempre; sin embargo, muchas veces basta una leve incitación para conseguirlo. Por ejemplo, una persona que está leyendo un libro puede quedarse dormida; en lugar de seguir la lectura hasta terminarla, actúa del mismo modo que cuando se deja el libro a un lado y se apaga la luz. Se ha desplazado "fuera del sistema", y sin embargo ello nos parece lo más natural del mundo. O si no, supongamos que una persona A está viendo televisión cuando una persona B entra en la habitación y muestra evidente desagrado. La persona A puede creer que comprende el problema, e intentar solucionarlo mediante el abandono del sistema en curso (ese programa de televisión); en consecuencia, acciona el botón selector en busca de un programa mejor. Pero la persona B puede tener un concepto más radical acerca de qué es "abandonar el sistema": es decir, ¡apagar la televisión! Hay casos, por cierto, donde únicamente contados individuos tienen la lucidez de percibir un sistema que está gobernando la existencia de muchas personas, un sistema que *nunca* antes había sido identificado como sistema; a partir de ese momento, esos individuos suelen dedicar su vida a la empresa de convencer al resto de que realmente el sistema está allí, ¡y que es preciso abandonarlo!

¿Hasta qué punto las computadoras han sido enseñadas a brincar fuera del sistema? Citaré un ejemplo que sorprendió a algunos testigos. En un torneo de ajedrez por computadoras que tuvo lugar no hace mucho, en Canadá, un programa —el más endeble de todos los que competían— presentó la característica inusual de abandonar antes que el juego terminase. No practicaba un buen ajedrez, pero tuvo al menos la rescatable cualidad de advertir las situaciones sin salida, y retirarse de inmediato, sin aguardar que el programa rival desarrollase el aburrido ritual del jaque mate. A pesar de que perdió todas sus partidas, mostró un estilo; muchos de los expertos locales en ajedrez quedaron impresionados. En resumen, si se define "el sistema" como "efectuar movidas en un juego de ajedrez", resulta claro que este programa contó con una refinada y anteprogramada capacidad para abandonar el sistema. Por otra parte, si se entiende que "el sistema" es "todo lo que ha sido programado para que la computadora haga", *no* hay duda de que la computadora no contó con aquella capacidad.

Cuando se estudian sistemas formales, es importante distinguir *entre* lo que se hace *dentro* del sistema, por un lado, y por otro las enunciaciones u observaciones que se formulan *acerca* del sistema. Supongo que el lector habrá abordado el acertijo MU, lo mismo que la mayoría de la gente, manteniéndose al principio en el interior del sistema, pero que luego, poco a poco, se ha ido impacientando cada vez más hasta el punto de salir del sistema, sin pensarlo mucho, tratando de evaluar los resultados obtenidos, y preguntándose por qué no había podido producir MU. Quizá descubrió una razón para explicar por *qué* no obtuvo MU: esto es pensar acerca del sistema. Quizá produjo MIU en algún punto del desarrollo que elaboró: esto es actuar dentro del sistema.

Ahora bien, mi interés no es presentar ambas modalidades como si fuesen absolutamente incompatibles; tengo la seguridad de que todo ser humano, en alguna medida, es capaz de actuar dentro de un sistema y, simultáneamente, de pensar acerca de lo que está haciendo. En la esfera de los asuntos humanos, por cierto, a menudo es casi imposible separar las cosas de forma que pertenezcan nítidamente al "interior del sistema" o al "exterior del sistema"; sería simplista pensar de tal manera, teniendo en cuenta que la vida está compuesta por demasiados engranajes, entrelazamientos y sistemas muchas veces incoherentes. Sin embargo, en ocasiones es útil formular muy claramente ideas simples, a fin de poder emplearlas como modelos en la comprensión de ideas más complejas. Por eso es que estoy hablando ahora de sistemas formales; pero ya es hora de volver a discutir el sistema MIU.

La vía M, la vía I, la vía U

El acertijo MU fue enunciado de modo tal que alentase un cierto grado de búsqueda dentro del sistema MIU, a través de la derivación de teoremas. Pero no se afirmó que necesariamente había que mantenerse dentro del sistema para obtener resultados. En consecuencia, se alentó también cierta oscilación entre las dos modalidades de trabajo. Una forma de diferenciar estas últimas sería contar con dos hojas de papel: una, reflejaría lo que hacemos en ejercicio de "nuestra habilidad mecánica", por lo que sólo escribiríamos en ella *letras* M, I, y U; la otra reflejaría "nuestra capacidad de pensar", y volcaríamos en ella todo lo que nuestra inteligencia sugiera: formulación de reflexiones, esbozo de ideas, utilización de abreviaturas taquigráficas (como la letra '*x*'), sintetización de varios pasos en uno solo, modificación de las reglas del sistema para ver qué surge, y todo lo que se nos pueda ocurrir al respecto. Es posible percatarse de que los números 3 y 2 juegan un papel importante, ya que la acumulación triple de Íes, y la doble de Ues, se elimina, y que la regla II permite duplicar la extensión (fuera de la M). Por lo tanto, la segunda hoja podrá contener alguna conjetura a propósito de ello. Más adelante haremos alguna referencia a aquellas dos modalidades de abordamiento de los sistemas formales, a las que denominaremos *Vía mecánica* (*vía M*) y *Vía inteligente* (*vía I*). Para completar nuestras vías de modo que tengamos una por cada letra del sistema MIU, incluiremos una tercera: la *No vía* (*vía U*), que consiste en la vía Zen de aproximación a las cosas. Volveremos sobre esto algunos capítulos más adelante.

Procedimientos de decisión

Se puede observar que este acertijo comprende reglas caracterizadas por dos tendencias opuestas: *reglas ampliadoras* y *reglas reductoras*. Hay dos reglas (I y II) que permiten aumentar la extensión de las cadenas (aunque sólo mediante fórmulas muy rígidas y precisas, por supuesto); y hay otras dos que permiten reducirlas un tanto (también a través de requisitos rígidos). Parece haber una variedad inacabable de instancias en las cuales pueden ser aplicados estos diferentes géneros de reglas, y como consecuencia se puede esperar que, de una manera u otra, se termine produciendo MU. Ello puede traducirse en una ampliación gigantesca de la cadena, para luego extraerle elemento tras elemento hasta que no queden sino dos símbolos; o bien, menos satisfactoriamente, puede implicar sucesivos estadios de ampliación y reducción alternados, seguidos por otros similares, y así en más. Pero no existe garantía alguna acerca de lo que puede ocurrir. Ciertamente, ya hemos observado que U no puede ser producida de ninguna forma, y no podrá ser de otro modo, aunque el lector se dedique a ampliar y a reducir hasta el día del juicio final.

No obstante, el caso de U y el caso de MU parecen ser enteramente distintos. Un rasgo muy obvio de U es lo que obliga a reconocer la imposibilidad de producirla: no la precede una M (teniendo en cuenta que todos los teoremas deben comenzar con M). Es de gran utilidad apelar a este método tan simple para detectar no teoremas. Ahora bien, ¿quién dice que esta verificación permitirá detectar *todos* los no teoremas? Hay incontables cadenas que comienzan con M, pero no son producibles; quizá MU sea una de ellas. Esto significaría que la "prueba de la primera letra" es de utilidad limitada: sirve únicamente para descubrir un cierto número de no teoremas, pero otros se le escapan. Queda la posibilidad, sin embargo, de que una verificación algo más elaborada distinga perfectamente las cadenas que pueden ser producidas por aplicación de las reglas, de las que no llenan esta condición. Tenemos que enfrentar aquí el siguiente interrogante: "¿Qué entendemos por verificación?" A lo mejor no se percibe cuál es el fundamento de tal pregunta, o su importancia, en el presente contexto. Para aclarar esto, daré el ejemplo de una "verificación" que, de alguna manera, viola el espíritu de esa palabra.

Imaginemos un genio que tiene todo el tiempo del mundo, y disfruta dedicándolo a producir teoremas del sistema MIU, de un modo más bien metódico. La que sigue, por ejemplo, es una de las direcciones que posiblemente elegiría el genio:

Paso 1: Emplear todas las reglas aplicables al axioma MI. Esto produciría dos nuevos teoremas: MIU, MII.

Paso 2: Emplear todas las reglas aplicables a los teoremas obtenidos en el paso 1. Esto produciría tres nuevos teoremas: MIIU, MIUIU, MIIII.

Paso 3: Emplear todas las reglas aplicables a los teoremas obtenidos en el paso 2. Esto produciría cinco nuevos teoremas: MIIIIU, MIIUIIU, MIUIUIUIU, MIIIIIIII, MUI.

.

.

.

Tarde o temprano, este método produce todos los teoremas, porque las reglas son empleadas en todos los órdenes concebibles (véase la figura 11). Todas las alternancias ampliación-reducción que mencionamos antes van a surgir aquí, sin ninguna duda. Empero, no está claro cuánto habrá que

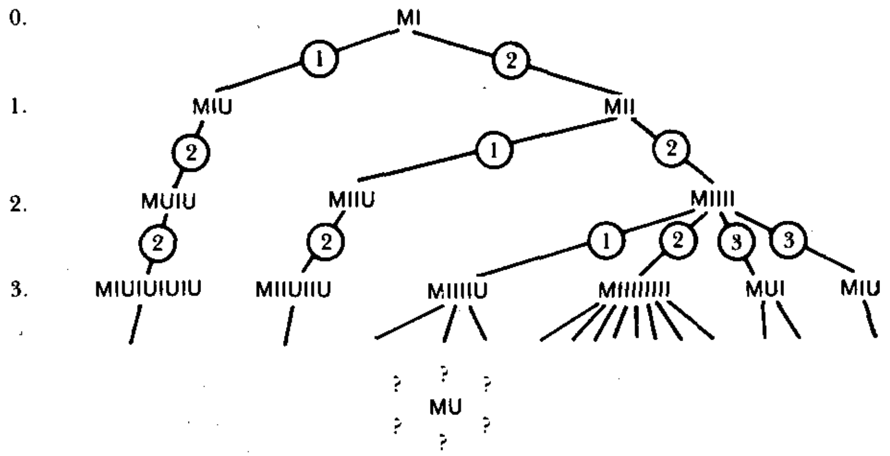


Figura 11. Un "árbol" sistemáticamente construido de todos los teoremas del sistema MIU. El nivel N *contendrá aquellos teoremas cuya derivación contiene* N *pasos. Los números rodeados por círculos qué regla fue empleada. ¿Este árbol incluirá a* MU?

esperar para que aparezca una cadena determinada, ya que el orden de los teoremas responde a la brevedad de su derivación. No se trata de un orden muy conveniente, si se está interesado en una cadena en particular (MU, por ejemplo), de la que ni siquiera se sabe si cuenta con alguna derivación, y mucho menos entonces qué extensión puede tener ésta.

Ahora, formularemos la "verificación de teoremidad" propuesta:

> Es necesario esperar hasta que la cadena en cuestión se produzca; si así ocurre, se sabe que es un teorema. Y si así no ocurre nunca, se sabrá que no es un teorema.

Esto suena ridículo, porque presupone que no tenemos inconveniente en esperar pacientemente la respuesta durante un lapso infinito, lo cual nos conduce al punto de partida: qué es una "verificación". Es de importancia primordial contar con la garantía de que obtendremos nuestra respuesta dentro de un lapso finito. Si existe una prueba de la teoremidad, una verificación que se complete dentro de un lapso finito, su nombre es *procedimiento de decisión*, correspondiente al sistema formal de que se trate.

Cuando se cuenta con un procedimiento de decisión, se tiene con él una caracterización muy concreta de la naturaleza de todos los teoremas del sistema. A primera vista, puede parecer que las reglas y axiomas del sistema formal proveen una caracterización de los teoremas del sistema, que no es menos completa que la aportada por el procedimiento de decisión. La palabra engañosa aquí es "caracterización". Sin duda, las reglas de inferencia y los axiomas del sistema MIU caracterizan, *tácitamente*, a las cadenas que son teoremas. Más *tácitamente* aun, caracterizan a las cadenas que *no* son teoremas. Pero una caracterización tácita no basta para satisfacer todas las finalidades, ni mucho menos. Si alguien sostiene que dispone de una caracterización de todos los teoremas, pero que necesita un plazo infinitamente largo para deducir si una cadena en particular es un teorema, nos inclinaríamos a decir, probablemente, que algo falta en esa caracterización: no es lo bastante concreta todavía. El descubrimiento de que existe un procedimiento de decisión, entonces, constituye un avance de gran importancia. El significado de este descubrimiento consiste en la posibilidad de realizar una prueba que verifique la teoremidad de una cadena; aun en el caso de que la prueba sea complicada, *la finalización queda garantizada*. Como principio, la verificación es simple, mecánica, finita y plena de certidumbre, pues reside en la sola comprobación de que la primera letra de una cadena sea M. ¡Un procedimiento de decisión es la "prueba del papel tornasol" de la teoremidad!

Además, los sistemas formales requieren que el conjunto de *axiomas* esté caracterizado por un procedimiento de decisión, que actúe como prueba del papel tornasol de la axiomidad. Así se asegura que, al menos al comienzo, se puede ingresar sin problemas al campo de trabajo. Esta es la diferencia que separa al conjunto de los axiomas del conjunto de los teoremas: el primero siempre está dotado de un procedimiento de decisión, que en el segundo puede faltar.

Estoy seguro de que el lector, cuando afrontó por vez primera el sistema MIU, se encontró precisamente con estos problemas. El único axioma era conocido, y las reglas de inferencia eran simples, de modo que los teoremas quedaban tácitamente caracterizados; empero, no estaba claro qué consecuencias surgían de tal caracterización. Específicamente, no estaba claro en absoluto si MU es un teorema o no lo es.

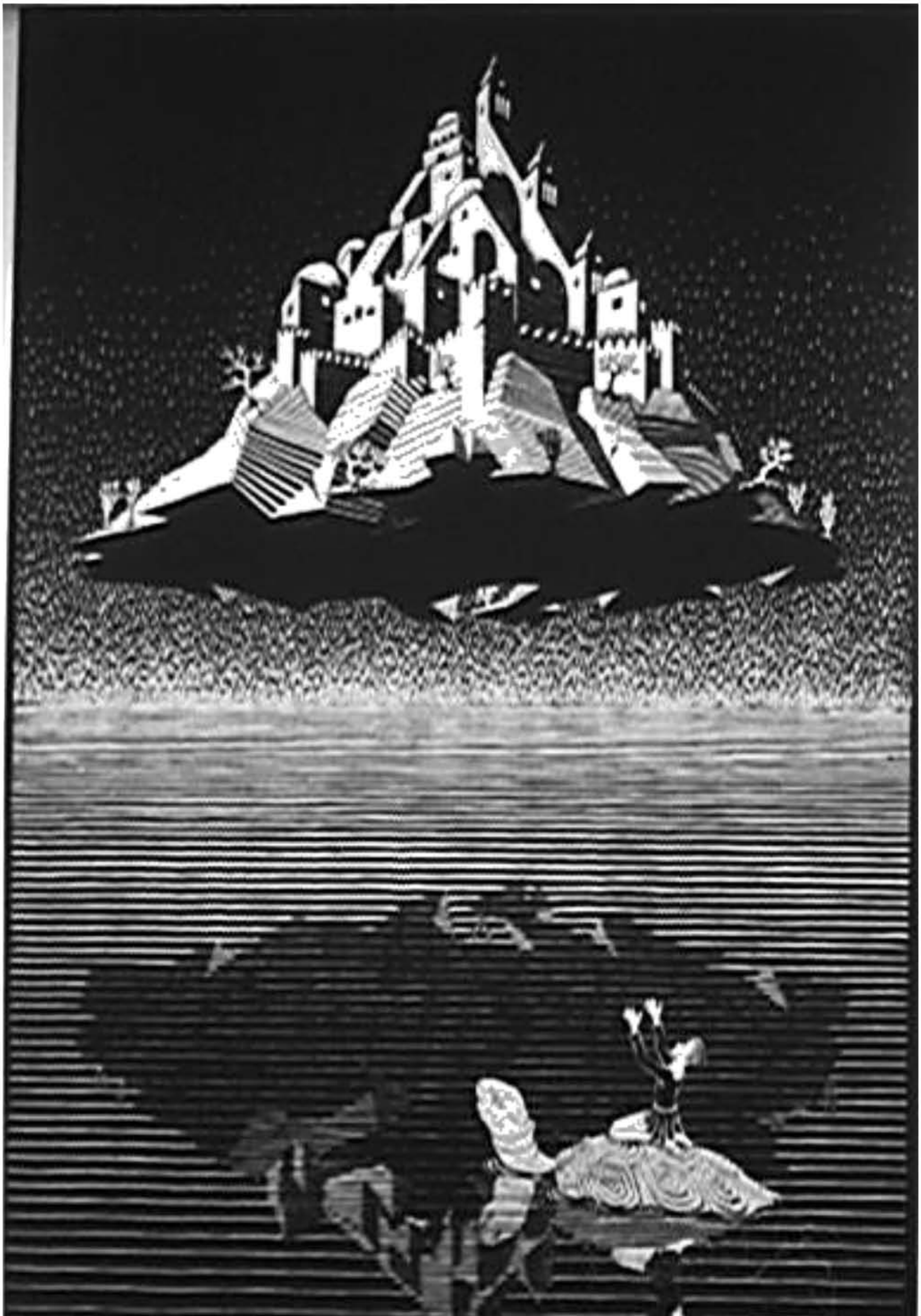


Figura 12. Castillo en el cielo, *de M. C. Escher (xilografía, 1928).*

Invención a dos voces

o
Lo que dijo la Tortuga a Aquiles

por Lewis Carroll[2]

Aquiles había alcanzado a la Tortuga, y se sentó cómodamente sobre ella.

"¿Así que llegó al final de la pista?", dijo la Tortuga, "¿a pesar de que consiste en una serie infinita de distancias? Creía que algún sabihondo había probado que eso no podía ser."

"PUEDE ser", dijo Aquiles, "¡HA sido! *Solvitur ambulando*. Entenderá que las distancias han ido DISMINUYENDO en forma constante, y entonces. . ."

"¿Y si hubieran ido AUMENTANDO en forma constante?", interrumpió la Tortuga. "¿Qué pasaría?"

"Pasaría que yo no estaría aquí", respondió Aquiles en tono recatado, "y usted habría dado varias vueltas al mundo, entretanto."

"Usted me APLASTA —con sus elogios, quiero decir— ", dijo la Tortuga, "pues hay mucho peso en USTED, ¡sin NINGUNA duda! Bueno, ¿querría saber ahora de una pista que casi toda la gente cree poder recorrer en dos o tres pasos, pero que EN REALIDAD está formada por un número infinito de distancias, cada una de ellas más larga que la anterior?"

"¡Por cierto que sí!", dijo el guerrero griego, sacando de su casco (pocos griegos usaban BOLSILLOS en aquella época) un enorme cuaderno y un lápiz. "¡Adelante! Y hable lentamente, por favor. ¡LA TAQUIGRAFIA no ha sido inventada todavía!"

"¡Ese precioso Primer Postulado de Euclides!", susurró la Tortuga como en sueños. "¿Admira usted a Euclides?"

"¡Con pasión! Por lo menos, lo que uno PUEDE admirar un tratado que será escrito algunos siglos más adelante."

"Bien, tomemos ahora una pequeña parte de la demostración del Primer Postulado: sólo DOS pasos, y la conclusión que se extrae de ellos. Anote con cuidado en su cuaderno. Para referirnos adecuadamente a esos pasos y a la conclusión, los llamaremos A, B y Z:

A. Las cosas que son iguales a una tercera son iguales entre sí.
B. Los dos lados de este Triángulo son iguales a un tercero.
Z. Los dos lados de este Triángulo son iguales entre sí.

[2] Lewis Carroll, "What the Tortoise Said to Achilles", *Mind*, n.e., 4 (1895), pp. 278-80.

Los lectores de Euclides admitirán, creo, que Z es la consecuencia lógica de A y B; entonces, ¿si uno acepta que A y B son verdaderos, DEBE aceptar que Z es verdadero?"

"¡Sin duda alguna! El alumno más torpe de una escuela secundaria —en cuanto se inventen las escuelas secundarias, dentro de unos dos mil años— estará de acuerdo."

"Y si algún lector NO acepta la veracidad de A y B, supongo que de todos modos puede aceptar que la SECUENCIA es VALIDA."

"Estoy seguro de que tal lector debe existir. Y podría pensar: 'acepto la veracidad de la Proposición Hipotética según la cual, si A y B son verdaderos, Z debe ser verdadero; pero NO acepto la veracidad de A y B.' Tal lector haría bien en olvidarse de Euclides y dedicarse al futbol."

"¿No podría haber asimismo un lector que dijera: 'acepto la veracidad de A y B, pero NO la Proposición Hipotética'?"

"Es claro que sí. También este lector debería dedicarse al futbol."

"¿Y NINGUNO de ambos lectores", *prosiguió la Tortuga*, "siente todavía necesidad lógica alguna de aceptar la veracidad de Z?"

"Así es", asintió Aquiles.

"Bien, ahora quiero que ME considere un lector del SEGUNDO tipo, y me fuerce lógicamente a aceptar la veracidad de Z."

"Una tortuga jugando al futbol. . .", empezó Aquiles.

". . .una anormalidad, por supuesto", lo interrumpió inmediatamente la Tortuga. "Nada de digresiones. Primero obtengamos Z, y luego pasemos al futbol."

"¿Debo forzarlo a aceptar Z?", dijo pensativamente Aquiles. "Y en este momento está dispuesta a aceptar que A y B son verdaderos, pero NO que la Hipotética lo sea. . ."

"Llamémosla C", dijo la Tortuga.

". . .entonces, usted no acepta que:

C. Si A y B son verdaderos, Z debe ser verdadero."

"Eso es", dijo la Tortuga.

"Por lo tanto, tengo que pedirle que acepte C."

"Así lo haré", dijo la Tortuga, "tan pronto como lo haya anotado en su cuaderno. ¿Qué más ha escrito en él?"

"Sólo unos pocos apuntes", dijo Aquiles, agitando nerviosamente las hojas, "unos pocos apuntes sobre. . . sobre las batallas en que me he distinguido."

"¡Todas las páginas en blanco, por lo que veo!", observó jovialmente la Tortuga. "¡Vamos a necesitar TODAS!" (Aquiles se estremeció.) "Ahora, escriba lo que le dicto:

A. Las cosas que son iguales a una tercera son iguales entre sí.
B. Los dos lados de este Triángulo son iguales a un tercero.

C. Si A y B son verdaderos, Z debe ser verdadero.
Z. Los dos lados de este Triángulo son iguales entre sí."

"Si acepta A, B y C, DEBE aceptar Z: esto tendría que ser llamado D, y aparecer en lugar de Z, INMEDIATAMENTE a continuación de los otros tres", dijo Aquiles.

"¿Y por qué?"

"Porque se sigue LOGICAMENTE. Si A y B y C son verdaderos, Z DEBE ser verdadero. No discutirá ESO, me imagino."

"Si A y B y C son verdaderos, Z DEBE ser verdadero", repitió pensativamente la Tortuga. "Se trata de OTRA Hipotética, ¿verdad? Y si yo no consiguiera percibir su veracidad, ¿podría aceptar A y B y C, pero negar Z?"

"Podría", admitió el candoroso héroe, "pero tal obtusidad sería fenomenal, sin duda. De todos modos, es un acontecimiento POSIBLE, por lo que debo pedirle que admita UNA Hipotética más."

"Perfectamente, lo haré con mucho gusto en cuanto lo anote. Lo llamaremos, pues,

D. Si A y B y C son verdaderos, Z debe ser verdadero.

¿Ya lo escribió en su cuaderno?"

"¡Sí!", exclamó gozosamente Aquiles, al tiempo que guardaba el lápiz en su estuche. "¡Y por fin llegamos al extremo de nuestra pista ideal! Puesto que acepta A y B y C y D, POR SUPUESTO acepta Z."

"¿Yo?", dijo inocentemente la Tortuga. "Aclaremos esto: Acepto A y B y C y D, pero suponga que TODAVIA me niego a aceptar Z."

"Entonces la Lógica debería oprimirle el gaznate, y OBLIGARLA a hacerlo", replicó Aquiles con voz victoriosa. "La Lógica le diría: 'Puede advertirlo sin ayuda, ¡puesto que ha aceptado A y B y C y D, DEBE aceptar Z!' Ya ve que no tiene alternativa."

"Cualquier cosa que la LOGICA se digne decirme merece ser ANOTADO", dijo la Tortuga, "así que escríbalo en su cuaderno, por favor. Lo llamaremos

E. Si A y B y C y D son verdaderos, Z debe ser verdadero.

Hasta que yo no haya aceptado ESTO, no tengo por qué aceptar Z: es un requisito completamente NECESARIO, ¿se da cuenta?"

"Me doy cuenta", dijo Aquiles, con algo de melancolía.

En este momento, el narrador fue reclamado por apremiantes problemas bancarios que lo obligaron a abandonar a la dichosa pareja durante varios meses. Cuando los volvió a encontrar, Aquiles continuaba sentado sobre la sufrida Tortuga, y escribía en su cuaderno, el cual daba la impresión de estar casi lleno. La Tortuga estaba diciendo: "¿Ha anotado el último paso? Salvo que haya perdido la cuenta, es el número mil uno. Faltan algunos millones todavía. Y le pido un favor personal, ¿tendría a bien considerar qué cantidad de conocimientos aportará nuestro diálogo a los Lógicos del Siglo Diecinueve. . .? ¿Tendría a bien admitir un juego de palabras que mi prima, la Falsa Tortuga, inventará por entonces con el fin de atribuirle un nuevo epíteto? Será algo así como 'el héroe de los pies ligeros, rápidamente atortugado por la sabiduría'."

"Como quiera", respondió el fatigado guerrero, hundido ya en la desesperanza y sepultando el rostro entre sus manos, "con tal que me permita contestarle con un juego de palabras jamás compuesto por la Falsa Tortuga: '¡*Aquí-les* presento una tortuga que asesina con calma!'"

CAPITULO II

Significado y forma en matemática

LA *INVENCION A DOS VOCES* INSPIRO mis dos personajes. Del mismo modo que Lewis Carroll se permitió libertades con la Tortuga y el Aquiles de Zenón, yo me las tomé con la Tortuga y el Aquiles de Lewis Carroll. En el diálogo de éste, los mismos acontecimientos se van sucediendo una y otra vez, sólo que en cada oportunidad se sitúan en un nivel más alto que el anterior; esto es de una asombrosa analogía con el Canon en Perpetuo Ascenso de Bach. El diálogo carrolliano, pese a su agudeza, deja en pie un profundo problema filosófico: *¿Las palabras y los pensamientos están regidos, o no, por reglas formales?* Tal es el problema que se plantea este libro.

En este capítulo, y en el siguiente, examinaremos algunos otros sistemas formales. Esto nos abrirá una perspectiva mucho más amplia a propósito del concepto de sistema formal. Al finalizar estos dos capítulos, el lector tendrá una noción muy completa de las posibilidades con que cuentan los sistemas formales, y por qué interesan a los matemáticos y a los lógicos.

El sistema pq

El sistema formal de este capítulo es el que llamaremos *sistema pq*. No es de gran interés para los matemáticos o los lógicos, porque en realidad se trata simplemente de una invención mía. Su importancia reside, exclusivamente, en el hecho de que ilustra de manera muy satisfactoria muchas de las ideas básicas de este libro. El sistema pq cuenta con tres símbolos:

p q -

Es decir, las letras p y q, y el guión.

El sistema pq tiene una cantidad infinita de axiomas. Como no podemos enunciarlos todos, nos hace falta contar con una descripción de lo que son. En verdad, necesitamos algo más que una descripción de los axiomas: necesitamos un medio que nos indique si determinada cadena es o no un axioma. Una simple descripción de los axiomas puede brindar una caracterización completa, pero al mismo tiempo endeble, de los mismos, tal como vimos que ocurría con el método de caracterización de teoremas en el sistema MIU. Queremos evitar la situación de estarse esforzando *durante* un lapso prolongado, quizá infinito, nada más que para descubrir si cierta cadena es un axioma o no. En consecuencia, vamos a definir los axiomas de manera tal que se disponga de un procedimiento de decisión evidente, capaz de determinar la axiomidad de las cadenas formadas por los símbolos p, q y guión.

DEFINICIÓN: *x*p-q*x*- es un axioma, siempre que *x* esté compuesto sólo por guiones.

Advierto que '*x*' debe representar la misma cadena de guiones las dos oportunidades en que aparece. Por ejemplo, --p-q--- es un axioma. La expresión '*x*p-q*x*-' no es un axioma, por supuesto (porque '*x*' no pertenece al sistema pq), sino más bien una matriz que moldea todos los axiomas; se la llama *esquema de axioma*.

El sistema pq tiene solamente una regla de producción:

REGLA: Supongamos que *x*, *y*, y *z* representan cadenas específicas formadas exclusivamente por guiones. Y supongamos que se sabe que *x*p*y*q*z* es un teorema. Luego, *x*p*y*-q*z*- es un teorema.

Por ejemplo: *x* vale '--', *y* vale '---', y *z* vale '-'. La regla nos indica que
Si --p---q- resulta ser un teorema, entonces
--p----q--, también lo será.

Tal como es característico de las reglas de producción, el enunciado establece una vinculación entre la teoremidad de ambas cadenas, pero no afirma la teoremidad de ninguna de las dos por sí mismas.

Un ejercicio sumamente útil para el lector consistirá en tratar de descubrir un procedimiento de decisión para aplicar a los teoremas del sistema pq. No es tarea difícil, si se la intenta durante un rato.

El procedimiento de decisión

Doy por sentado que el lector ya hizo el ensayo. En primer lugar, y aunque parezca demasiado obvio, quisiera puntualizar que todos los teoremas del sistema pq tienen tres grupos separados de guiones, y que los elementos de separación son únicamente una p, y una q, ubicadas en ese orden. (Esto se puede fundar en un razonamiento "heredado": se trata del mismo medio utilizado para probar que todos los teoremas del sistema MIU tenían que empezar con M.) Lo anterior significa que, considerando solamente su forma, podemos excluir cadenas como la siguiente: --p--p--p--q--------.

Ahora bien, destacar la frase "considerando solamente su forma" puede parecer una simpleza, pues ¿qué otra cosa hay en una cadena además de su forma?, ¿qué otra cosa cuenta con una función para determinar sus propiedades? Ninguna, sin duda. Empero, será necesario retener estas consideraciones cuando sigamos hablando de los sistemas formales, pues la noción de "forma" comenzará a hacerse más complicada y abstracta, y nos será preciso reflexionar con mayor detenimiento en el significado del término "forma". Como quiera que sea, llamaremos *cadena bien formada* a toda cadena que empiece con un grupo de guiones, tenga luego una p, seguida por un segundo grupo de guiones, luego una q, y por último otro grupo de guiones.

Volvamos al procedimiento de decisión. El criterio de teoremidad consistirá en que la suma de los dos primeros grupos de guiones deberá coincidir con la extensión del tercer grupo. Por ejemplo, --p--q---- es un teorema, porque 2 más 2 es igual a 4, en tanto que --p--q- no lo es, porque 2 más 2 no es igual a 1. Observando el esquema del axioma se percibe la razón por la cual éste es el criterio adecuado: es evidente que el esquema admite exclusivamente axiomas que satisfagan el criterio de adición. Asimismo, corresponde recordar la regla de producción: si la primera cadena satisface el criterio de adición, también lo hará la segunda e, inversamente, si la primera no satisface dicho criterio, tampoco lo hará la segunda. La regla convierte al criterio de adición en una propiedad hereditaria de los teoremas: todo teorema determina la presencia de la propiedad en sus descendientes. Esto muestra por qué es correcto el criterio de adición.

Por otra parte, existe una circunstancia que también nos permitiría decir con seguridad que el sistema pq cuenta con un procedimiento de decisión, aun sin haber descubierto todavía el criterio de adición. Se trata de que el sistema pq no sufre la complicación de reglas de *ampliación* y *reducción* creando tensiones opuestas: tiene nada más que reglas de ampliación. Un sistema formal que nos indique cómo elaborar teoremas más prolongados a partir de otros más breves, pero nunca lo inverso, es seguro que incluye un procedimiento de decisión aplicable a sus teoremas.

Supongamos que se nos pone delante una cadena cualquiera. Lo primero por hacer será verificar si es o no un axioma (estoy dando por supuesto que existe un procedimiento de decisión para la axiomidad, pues de otro modo no habría salida). Si es un axioma, es por definición un teorema, y no hace falta verificarlo. Pero supongamos que no es un axioma. Entonces, para ser un teorema, debe provenir de una cadena más breve, a través de la aplicación de alguna de las reglas. Repasando una a una las diversas reglas, es posible establecer con precisión no sólo las reglas que pueden haber producido la cadena, sino también, y en forma exacta, cuáles cadenas más breves están en condiciones de ser sus antecesoras dentro del "árbol genealógico". De este modo, el problema se "reduce" a la determinación de si alguna de las nuevas cadenas más cortas es un teorema. Cada una de estas últimas puede, a su vez, ser sometida a la misma verificación. Lo peor que puede ocurrir es una proliferación de cadenas por verificar, cada vez en mayor número y más breves.

Si se continúa en este retorno milimétrico, se logrará llegar muy cerca de la fuente de todos los teoremas: el esquema de axioma. Se puede avanzar indefinidamente hacia cadenas más breves; en consecuencia, o se descubre por último que una de las cadenas cortas aparecidas es un axioma, o se llega a un atolladero, donde ninguna de esas cadenas es un axioma, y ninguna de ellas puede ser reducida una vez más en el marco de alguna de las reglas, o de algún otro expediente de retorno. Esto indica que, en realidad, los sistemas formales dotados exclusivamente de reglas de ampliación no despiertan un gran interés; es el juego recíproco de reglas de ampliación y de reducción lo que otorga un atractivo especial a tales sistemas.

Abajo arriba *vs.* arriba abajo

El método anterior puede ser denominado un procedimiento de decisión *arriba abajo*, que contrasta con un procedimiento *abajo arriba*, del cual hablaré a continuación. Tiene cierto parecido con el método de generación de teoremas del sistema MIU seguido por el genio paciente, pero incluye un esquema de axioma que le agrega complejidad. Imaginemos un "saco", al que iremos arrojando los teoremas a medida que los produzcamos. Procederemos así:

1a. Arrojaremos el axioma posible más simple (-p-q--) dentro del saco.
1b. Aplicaremos la regla de inferencia al elemento anterior, y colocaremos el resultado dentro del saco.
2a. Arrojamos dentro del saco el axioma ubicado en segundo orden de simplicidad.
2b. Aplicamos la regla a todos los elementos metidos en el saco, al que arrojamos también los resultados.
3a. Arrojamos dentro del saco el axioma ubicado en tercer orden de simplicidad.
3b. Aplicamos la regla a todos los elementos metidos en el saco, al que arrojamos también los resultados, etc., etc.

Un instante de reflexión nos permitirá percatarnos de que, de esta manera, no podremos menos que producir todos los teoremas del sistema pq. Por otra parte, andando el tiempo el saco se llenará con teoremas cada vez más extensos, lo cual es también una consecuencia de la falta de reglas de reducción. Si se tiene una cadena en particular, como --p---q-----, cuya teoremidad quiere verificarse, basta con proceder de acuerdo a los pasos enumerados, examinando atentamente todas las cadenas que aparezcan. Si surge la que nos interesa, ¡albricias!, es un teorema. Si en determinado momento, el elemento que debe ir al saco es más extenso que la cadena en cuestión, debemos desentendernos: no es un teorema.

Este procedimiento de decisión es señalado como de *abajo arriba* porque se mueve desde lo básico, es decir, los axiomas, mientras que el procedimiento anterior es de *arriba abajo* porque se desplaza en sentido inverso, hacia lo básico.

Los isomorfismos conducen a la significación

Nos dirigiremos ahora hacia el tema central de este capítulo, y por cierto del libro entero. Posiblemente ya se le haya ocurrido al lector que los teoremas pq son semejantes a sumas. La cadena --p---q----- es un teorema porque 2 más 3 es igual a 5. Se podría pensar inclusive que el teorema --p---q----- es un *enunciado*, escrito mediante una notación arbitraria, cuyo *significado* es que 2 más 3 son 5. ¿Es ésta una manera razonable de analizar las cosas? En realidad, debo decir que elegí deliberadamente 'p' para hacer presente 'más',* 'q' para hacer presente 'igual'. . .** Entonces, ¿la cadena --p---q----- en verdad *significa* "2 más 3 igual a 5"?

¿Qué nos podrá hacer percibir esto? Mi respuesta sería que hemos advertido un *isomorfismo* entre los teoremas pq y las sumas. En la Introducción, la palabra "isomorfismo" fue definida como una transformación destinada a conservar la información. Ahora podemos ingresar algo más profundamente en este concepto, y examinarlo desde otra perspectiva. La palabra "isomorfismo" es utilizada cuando dos estructuras complejas pueden ser proyectadas una sobre otra, de tal modo que cada parte de una de ellas tiene su parte correspondiente en la otra: "correspondiente" significa que ambas partes cumplen papeles similares en sus respectivas estructuras. Este empleo proviene de una noción más precisa, perteneciente a la matemática.

Un matemático se regocija cuando logra descubrir un isomorfismo entre dos estructuras previamente conocidas. Se trata a menudo de una "iluminación", y se convierte en fuente de asombro. La percepción de un isomorfismo entre dos estructuras ya conocidas es un avance significativo del conocimiento, y sostengo que tales percepciones son lo que genera *significaciones* en la mente humana. Una cosa más acerca de la percepción de isomorfismos: dado que estos últimos se presentan bajo muy diversas figuras y dimensiones, por decir así, no siempre es fácil estar seguro de haber descubierto un isomorfismo. En consecuencia, "isomorfismo" es una palabra caracterizada por toda la ambigüedad habitual de las palabras, lo cual es una carencia, pero también una ventaja.

* 'Plus', en el texto original. [T.]
** 'Equals', en el texto original. [T.]

En el presente caso, disponemos de un excelente prototipo del concepto de isomorfismo. Por una parte, hay un "nivel inferior" en nuestro isomorfismo, esto es, una proyección entre las partes de las dos estructuras:

p $\Leftarrow\Rightarrow$ más
q $\Leftarrow\Rightarrow$ igual a
- $\Leftarrow\Rightarrow$ uno
-- $\Leftarrow\Rightarrow$ dos
--- $\Leftarrow\Rightarrow$ tres
etc.

Esta correspondencia entre palabra y símbolo tiene un nombre: *interpretación*.

Por otra parte, en un nivel más alto, se sitúa la correspondencia entre proposiciones verdaderas y teoremas. Pero debe tenerse muy en cuenta que esta correspondencia de nivel superior puede no ser advertida si no se establece previamente una interpretación de los símbolos. Sería más preciso, pues, hablar de correspondencia entre proposiciones verdaderas y teoremas *interpretados*. De todas maneras, hemos puesto de manifiesto una correspondencia entre dos órdenes, tal como es característico en todo isomorfismo.

Cuando uno se encuentra con un sistema formal del que no se conoce nada, con la esperanza de descubrir en él alguna significación recóndita, el problema es cómo asignar interpretaciones significativas a sus símbolos: en otros términos, cómo hacerlo de modo tal que surja una correspondencia de nivel superior entre proposiciones verdaderas y teoremas. Es posible que se lancen muchos puñetazos de ciego antes de hallar un conjunto satisfactorio de palabras que se relacionen con los símbolos. Es algo muy similar a los intentos por abrir una brecha en un código, o descifrar inscripciones en un idioma desconocido, como en el caso del Lineal B de Creta: la única forma de proceder es por la vía del ensayo y el error, bajo la guía de conjeturas fundadas. Cuando se hace una elección adecuada —una elección "significativa"—, las cosas empiezan súbitamente a ordenarse, y la tarea avanza con gran rapidez; muy pronto, todo se ubica en su lugar. La excitación que acompaña a una experiencia de esta clase ha sido bien reflejada por John Chadwick en *The Decipherment of Linear B*.

Pero no es frecuente, ni mucho menos, encontrarse en situación de "decodificar" un sistema formal aparecido en las excavaciones de una antigua civilización. Los matemáticos (y, desde hace poco tiempo, los lingüistas, los filósofos y algunos otros especialistas) son los únicos que utilizan sistemas formales, e invariablemente se ajustan a una interpretación, asociada a los sistemas formales que emplean y difunden. Su propósito es establecer un sistema formal cuyos teoremas reflejen, isomórficamente, algún segmento de la realidad. La elección de los símbolos, por ende, reconoce una fuerte motivación en estos casos, como se lo ve en la adopción de reglas tipográficas de producción. Tal fue mi actitud cuando ideé el sistema pq. Está a la vista por qué elegí determinados símbolos: no es casual que los teoremas del sistema pq sean isomórficos con respecto a las sumas, puesto que opté deliberadamente por una forma que las reflejase tipográficamente.

Interpretaciones significativas y no significativas

El lector puede optar por intepretaciones distintas a la mía. No necesita conseguir que cada teorema resulte verdadero, pero no habría motivo para elaborar una interpretación donde, digamos, todos los teoremas resulten falsos; menor fundamento, aun, tendría una interpretación bajo la cual no haya correlación alguna, ni positiva ni negativa, entre teoremidad y veracidad. En consecuencia, cabe distinguir entre dos tipos diferentes de interpretación. En primer lugar, podemos encontrarnos con una interpretación *no significativa*, bajo la cual no se advierte la menor asociación isomórfica entre los teoremas del sistema y la realidad. Tales interpretaciones abundan: cualquier elección hecha enteramente al azar corresponderá a este tipo. Por ejemplo, tomemos la siguiente:

p $\Leftarrow\Rightarrow$ caballo
q $\Leftarrow\Rightarrow$ feliz
- $\Leftarrow\Rightarrow$ manzana

Tenemos así una nueva interpretación para -p-q--: "manzana caballo manzana feliz manzana manzana"; una expresión poética que quizá interese a los caballos, y que hasta podría inclinarlos en favor de este modo de interpretar las cadenas pq. Lamentablemente, esta interpretación tiene muy escasa "significación"; bajo la interpretación, los teoremas no dan la impresión de ser más verdaderos, o más aceptables, que los no teoremas. Un caballo puede gustar de "feliz feliz feliz manzana caballo" (correspondiente a qqq-p) casi tanto como de un teorema interpretado.

Llamaremos *significativa* a la segunda clase de interpretación. Bajo ésta, los teoremas y las verdades se corresponden: es decir, existe isomorfismo entre los teoremas y determinada porción de la realidad. Es por ello que conviene distinguir entre *interpretaciones* y *significados*. Cualquier palabra podía haber sido adoptada como interpretación de 'p', pero adopté "más" porque es la única elección *significativa* en la que puedo pensar. En síntesis, el significado de 'p' parece ser 'más', pese a que sea posible un millón de interpretaciones diferentes.

Significados activos *vs.* pasivos

Es probable que lo más importante de este capítulo, para quienes lo comprendan acabadamente, sea lo siguiente: el sistema pq parece obligarnos a reconocer que los *símbolos de un sistema formal, aunque inicialmente carezcan de significado, no pueden evitar el asumir alguna clase de "significado", en cuanto se descubre un isomorfismo*. Ahora bien, hay una diferencia muy grande entre el significado relativo a un sistema formal, y el vinculado al lenguaje: cuando hemos aprendido el significado de una palabra dentro de un idioma dado, pasamos a elaborar nuevos enunciados basados en aquél. Hasta cierto punto, el significado se convierte en *activo*, ya que actúa como una nueva regla de creación de frases. Esto quiere decir que nuestro dominio del idioma no se asemeja a un producto terminado: las reglas de elaboración de frases se multiplican en la medida en que aprendemos nuevos significados. En un sistema formal, en cambio, los teoremas son definidos *a priori* por las reglas de producción. Podemos elegir "significados" que se funden en un isomorfismo (si nos es posible encontrarlo) entre teoremas y proposiciones verdaderas, pero ello no nos autoriza a extender el campo, agregando nuevos teoremas a los ya establecidos: el Requisito de Formalidad, en el Capítulo I, nos previene precisamente acerca de esto.

En el sistema MIU, por supuesto, no había motivo para sentir la tentación de ir más allá de las cuatro reglas, porque no se buscó ni se descubrió ninguna interpretación. Pero aquí, en nuestro nuevo sistema, los "significados" recién hallados para cada símbolo pueden llevarnos a pensar que la cadena

--p--p--p--q--------

es un teorema. Cuando menos, uno puede *desear* que esta cadena sea un teorema, pero eso no cambia el hecho de que no lo es. Y también constituiría un serio error pensar que "debe" ser un teorema, sólo porque 2 más 2 más 2 más 2 es igual a 8. Tampoco sería correcto atribuirle algún significado, puesto que no es una cadena bien formada, y nuestra interpretación significativa procede exclusivamente de la observación de cadenas bien formadas.

En un sistema formal, el significado debe permanecer *pasivo*; podemos leer cada cadena siguiendo los significados de los símbolos que la integran, pero no estamos facultados para crear nuevos teoremas sobre la única base de los significados que hemos asignado a los símbolos. Los sistemas formales interpretados se ubican en la frontera que separa a los sistemas sin significado de los sistemas con significado: puede pensarse de sus cadenas que "expresan" cosas, pero es imprescindible tener en cuenta que ello ocurre exclusivamente como consecuencia de las propiedades formales del sistema.

¡Double entendre!

Y ahora, quiero destruir cualquier ilusión que se haya forjado en el sentido de haber descubierto *los* significados de los símbolos del sistema pq. Consideremos la siguiente correlación:

p ⇔ igual a
q ⇔ restado de
\- ⇔ uno
-- ⇔ dos
etc.

Así, --p---q----- recibe una interpretación nueva: "2 igual a 3 restado de 5". Se trata por supuesto de una proposición verdadera; todos los teoremas resultarán verdaderos bajo esta nueva interpretación, la cual, por otra parte, es casi tan significativa como la anterior. Pero, "¿cuál es *el* significado de la cadena?" Una interpretación es significativa en la medida en que manifiesta con precisión determinado isomorfismo asociado al mundo real. Cuando aspectos diferentes del mundo real son isomórficos entre sí (en este caso, la suma y la resta), un solo sistema formal puede ser isomórfico con respecto a ambos aspectos mencionados, y asumir en consecuencia dos significados pasivos. Esta clase de doble valor en símbolos y cadenas constituye un fenómeno de la mayor importancia. En este momento parecerá trivial, caprichoso, inoportuno, pero cuando lo retomemos dentro de contextos más complejos aportará una gran riqueza de ideas.

Lo que sigue es un resumen de nuestras observaciones acerca del sistema pq. Bajo cualquiera de las dos interpretaciones significativas dadas, toda cadena bien formada tiene como contrapartida una afirmación gramatical; algunas cadenas son verdaderas, otras falsas. Una *cadena bien formada*, dentro de los sistemas formales, es aquella que, al ser interpretada símbolo por símbolo, produce oraciones *gramaticales*. (Se sobrentiende que esto último depende de la interpretación que se siga, pero por lo común se aplica un patrón determinado.) Dentro de las cadenas bien formadas, aparecen los teoremas. Estos son definidos por un esquema de axioma y una regla de producción. Mi propósito, cuando ideé el sistema pq, fue imitar la suma: cada teorema debía expresar una suma verdadera, sujeta a interpretación; inversamente, toda suma verdadera de dos enteros positivos debía poderse traducir, de manera precisa, en forma de cadena, la cual sería así un teorema. Tal propósito fue conseguido; tómese nota, por ende, de que toda suma falsa —como "2 más 3 igual a 6"— es traducible a cadenas que estarán bien formadas, pero que no son teoremas.

Sistemas formales y realidad

El anterior es nuestro primer ejemplo de un caso donde un sistema formal se fundamenta en un segmento de la realidad, y parece reproducirla a la perfección, ya que sus teoremas son isomórficos respecto a las verdades concernientes a esa parte de la realidad. No obstante, la realidad y los sistemas formales son independientes entre sí. Nadie necesita tener presente que hay un isomorfismo entre ambos. Cada una de estas esferas se sostiene por sí misma: uno más uno es igual a dos, sepamos o no que -p-q-- es un teorema; y -p-q-- sigue siendo un teorema aunque no lo asociemos con la adición.

Es improbable que la aplicación de este sistema formal, o de cualquier otro, arroje nuevas luces sobre la veracidad, en el campo de su interpretación; por cierto, el hecho de producir teoremas pq no nos hace aprender sumas nuevas. Sin embargo, sí hemos aprendido algo acerca de la naturaleza de la adición, vista como un proceso, a saber: que se la puede figurar con facilidad mediante una regla tipográfica que rige símbolos sin significación. Esto no es muy sorprendente, tratándose de una operación tan simple como la suma; con frecuencia se dice que es factible aprehender la adición observando los mecanismos giratorios de una caja registradora.

De todos modos, queda claro que hemos rasguñado enérgicamente la superficie, en la medida en que los sistemas formales lo permiten; es natural preguntarse qué porción de la realidad puede ser imitada, en su comportamiento, por un conjunto de símbolos sin significación, gobernados por reglas formales. ¿Será posible transformar toda la realidad en sistema formal? Pareciera que, en un sentido muy amplio, puede responderse afirmativamente: es posible sugerir, por ejemplo, que la realidad no es, en sí misma, más que un sistema formal extremadamente complicado. Sus símbolos no se diseminan sobre un papel sino, todo lo contrario, dentro de un vacío tridimensional (espacio): son las partículas elementales que dan su composición a todas las cosas. (Suposición implícita: que hay una finalidad en la sucesión descendente de la materia, de modo que la expresión "partículas elementales" tiene sentido.) Las "reglas tipográficas" son aquí las leyes de la física, las cuales nos dicen cómo proceder, dadas la posición y la velocidad de todas las partículas en un momento determinado, para modificar esos valores y dar lugar a un nuevo conjunto de posiciones y velocidades, propios del momento "siguiente".

Luego, los teoremas de este gran sistema formal serían las configuraciones posibles que asumen las partículas en diferentes instantes de la historia del universo. El único axioma es (*era*, quizá) la configuración original de todas las partículas "en el principio de los tiempos".

Sin embargo, esta concepción tiene dimensiones tan colosales que su interés es únicamente especulativo; además, la mecánica cuántica (y otros sectores de la física) plantean al respecto algunas dudas, que se extienden inclusive a las presuntas potencialidades teóricas de la idea. Básicamente, nos estamos preguntando si el universo actúa en forma determinista, lo cual sigue siendo un problema abierto.

Matemática y manipulación simbólica

En vez de abordar un campo tan gigantesco, limitaremos nuestro "mundo real" a la matemática. Lo primero que surge en este caso es un serio interrogante: luego de modelar un sistema formal relativo a cierta porción de la matemática, ¿cómo estar seguros de haber procedido correctamente, en especial si no estamos totalmente familiarizados con esa parte de la matemática? Supongamos que el objetivo del sistema formal es aportarnos nuevos conocimientos en esa disciplina, ¿cómo sabremos que la interpretación de cada teorema es verdadera, a menos que hayamos probado que el isomorfismo es perfecto?, ¿y cómo probaremos que el isomorfismo es perfecto, si no contamos desde el comienzo con un conocimiento total acerca de las verdades de la disciplina?

Supongamos que en una excavación, no importa en qué sitio, hemos descubierto un misterioso sistema formal. Intentaríamos diversas interpretaciones del mismo, y quizá tuviéramos la suerte de hallar una que, aparentemente, consiga que todo teorema resulte verdadero, y todo no teorema, falso. Pero esto es algo que sólo podríamos verificar directamente en un número finito de casos. Lo más probable es que la cantidad de teoremas sea infinita. Así, ¿cómo *sabremos* que todos los teoremas expresan verdades bajo esta interpretación, salvo que conozcamos todo lo que hay que conocer acerca del sistema formal, y también del ámbito de interpretación correspondiente?

En alguna medida, se plantea esta singular situación siempre que intentamos correlacionar la realidad de los números naturales (es decir, los enteros no negativos: 0, 1, 2, . . .) con los símbolos tipográficos de un sistema formal. Vamos a hacer ahora un esfuerzo para comprender qué relación existe entre lo que llamamos "verdad" en teoría de los números, y lo que nos es posible obtener a través de la manipulación de los símbolos.

Por ello, nos remitiremos someramente a los fundamentos para estar en condiciones de clasificar como verdaderos a algunos enunciados de teoría de los números, y a otros como falsos. ¿Cuánto es 12 veces 12? Cualquiera sabe que 144, pero, ¿cuántos, de entre quienes dan esa respuesta, han diseñado alguna vez en su vida un rectángulo de 12 por 12, y contado luego los cuadraditos interiores? La mayor parte, seguramente, considerará innecesaria semejante tarea, ofreciendo como prueba, en cambio, unos pocos trazos sobre un papel; los siguientes:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \underline{\times 12} \\ 24 \\ \underline{12} \\ 144 \end{array}$$

Y ésta sería la "demostración". Prácticamente todo el mundo está convencido de que, si se cuentan los cuadraditos, habrá 144; son muy pocos los que experimentan dudas acerca de este resultado.

El conflicto entre ambos puntos de vista se hace más agudo si nos formulamos el problema de determinar el valor de 987654321 × 123456789. En primer lugar, es virtualmente imposible construir un rectángulo adecuado y, lo que es más grave, aun cuando se lo pudiera diseñar harían falta ejércitos de personas, trabajando durante siglos, para contar todos los cuadrados; pese a todo, solamente alguien muy crédulo aceptaría el resultado así obtenido. Muy probablemente, en alguna parte, de alguna manera, se haya hecho un pequeño intento de esta índole.

¿Es posible conocer la respuesta al presente problema? Si se tiene confianza en el proceso simbólico que se traduce en la manipulación de los dígitos con arreglo a ciertas reglas sencillas, la contestación a la pregunta anterior es afirmativa. Este proceso es presentado a los alumnos de las escuelas como un artificio que permite obtener resultados correctos; muchos de estos alumnos, absorbidos por las operaciones, no advierten la armonía, y tampoco la razón, de ese proceso. Las leyes de derivación de dígitos mediante la multiplicación se basan, principalmente, en unas pocas propiedades de la suma y de la multiplicación, de las cuales se da por supuesto que son aplicables a todos los números.

Las leyes básicas de la aritmética

La clase de supuesto de que hablo es la ilustrada más abajo. Podemos figurarnos que diseminamos algunas barras:

/ // // // / /

Luego las contamos, y al mismo tiempo invitamos a otra persona a contarlas también, pero comenzando por el extremo opuesto. ¿Es seguro que se obtendrá el mismo resultado? La respuesta que surge de un proceso de cálculo es independiente del modo en que se lo realice. Esto constituye, en rigor, un supuesto relativo a dicho proceso, y tiene un carácter tan básico que carecería de sentido dedicarse a probarlo: se lo acepta o no, pero en este último caso una demostración no contribuiría en nada.

A partir de esta clase de supuesto se llega a la conmutatividad y a la asociatividad de la adición (es decir, respectivamente, que $b + c = c + b$, y que $b + (c + d) = (b + c) + d$, siempre, en ambos casos). El mismo supuesto puede conducirnos a la conmutatividad y a la asociatividad de la multiplicación: basta pensar en muchos cubos reunidos de manera de formar un gran cuerpo sólido rectangular. La conmutatividad y la asociatividad de la multiplicación consisten simplemente en el supuesto de que, si se hace girar en diferentes direcciones dicho cuerpo, la cantidad de cubos seguirá siendo la misma. Pero tal supuesto no es verificable en todos los casos, porque el número de éstos es infinito. Los damos por demostrados, con la convicción más profunda que se pueda concebir (en el caso de que alguna vez se nos ocurra pensar en ello). La suma de dinero que llevamos en el bolsillo no se modifica cuando caminamos por la calle, empujándonos con otra gente; el número de libros que poseemos no se modifica aunque los empaquemos en una caja, los subamos a un automóvil, los traslademos cien kilómetros más allá, descarguemos la caja, los desempaquemos, y los ubiquemos en nuevos anaqueles. Todo esto forma parte de lo que queremos significar cuando decimos *número*.

Hay cierto tipo de personas que, ni bien es formulado algún hecho innegable, halla divertido abocarse a mostrar por qué ese "hecho" es, después de todo, falso. Pertenezco a ese tipo, y tan pronto enuncié los ejemplos anteriores acerca de barras, dinero y libros, imaginé situaciones donde tales ejemplos se equivocan. Puede que el lector haya hecho otro tanto. De este modo, mostraremos que los números como abstracciones, en verdad, son por entero diferentes de los números que utilizamos en la vida cotidiana.

La gente gusta de inventar expresiones que violan las bases de la aritmética, pero que son capaces de ilustrar verdades "más profundas", como se puede ver en "1 y 1 hacen 1" (referido a un par de enamorados), o en "1 más 1 más 1 es igual a 1" (la Trinidad). Es fácil advertir fallas en estas expresiones: por ejemplo, que la utilización del término "+" es inadecuada en ambos casos. Pero los casos semejantes abundan. Dos gotas de lluvia, sobre el cristal de una ventana, se unen; ¿es válido ahora decir que uno más uno es igual a uno? Y cuando una nube se separa en dos, ¿no evidencia lo mismo? No resulta fácil en absoluto distinguir con precisión entre aquellos casos donde lo que está sucediendo puede ser llamado "suma", y aquellos otros donde se necesita otra palabra. Si uno reflexiona sobre este problema, es probable que se decida por algún criterio de diferenciación de los objetos en el espacio, apto para asegurar la separación de cada uno de ellos con respecto a todos los demás. Pero entonces, ¿cómo contar las ideas?, ¿o el número de gases que contiene la atmósfera? Si se las busca, no es arduo encontrar en distintas fuentes afirmaciones como:

"En la India hay 17 idiomas y 462 dialectos". Enunciaciones tan precisas encierran un toque de extrañeza, si se tiene en cuenta que no hay límites exactos entre "idioma" y "dialecto".

Números ideales

Los números son reacios a comportarse satisfactoriamente como realidades. Sin embargo, existe la vieja e innata creencia, en el común de la gente, de que no están obligados a hacerlo. Hay algo nítido y puro en la noción abstracta de número, al alejarla de sumas, gotas, nubes o dialectos. Tiene que haber un modo de hablar de los números evitando el recurso rudimentario de apelar a la intromisión de la realidad.

Las muy precisas reglas que rigen los números "ideales" constituyen la aritmética, y sus extensiones más avanzadas han dado lugar a la teoría de los números. No hay más que una sola pregunta pertinente acerca del tránsito desde los números como cosas prácticas, hacia los números como cosas formales: una vez que hemos resuelto tratar de encapsular la teoría de los números íntegra en un sistema ideal, ¿nos será realmente posible cumplir por completo la tarea?. ¿los números son tan puros, cristalinos y armoniosos que su naturaleza puede ser enteramente encuadrada por las reglas de un sistema formal? *Liberación* (figura 13), una de las más bellas obras de Escher, presenta un prodigioso contraste entre lo formal y lo informal, vinculados por una fascinante zona de transición. ¿Los números son tan libres como los pájaros?, ¿sufren igual que ellos al ser sometidos a un sistema de reglas imperativas?, ¿existe una zona de transición mágica entre los números de la realidad y los números trazados sobre papel?

Cuando hablo de las propiedades de los números naturales, no me estoy refiriendo a propiedades tales como la suma de dos enteros determinados. Esta puede ser establecida mediante el cálculo, y nadie que pertenezca a este siglo pone en duda la posibilidad de mecanizar procesos como contar, sumar, multiplicar, etc. A lo que aludo es a la clase de propiedades que los matemáticos se interesan por investigar, buscando respuestas que el proceso de cálculo —ni siquiera en el plano teórico— puede proveer. Veamos un ejemplo clásico de estas propiedades de los números naturales, analizando la afirmación "hay una cantidad infinita de números primos": en primer lugar, no existe proceso de cálculo alguno capaz de confirmar o refutar tal afirmación: todo lo que podemos hacer es dedicar un tiempo a contar los números primos, para luego conceder que hay "un montón" de ellos. Ningún esfuerzo de cálculo resolverá la cuestión de si la cantidad de primos es finita o infinita; la cuenta nunca estaría completa.

La proposición conocida como "Teorema de Euclides" (obsérvese la mayúscula "T") no tiene nada de obvio, en absoluto. Puede parecer razonable, o interesante, pero no obvia. Aun así, los matemáticos posteriores a Euclides siempre la han reputado verdadera, ¿por qué motivo?

Figura 13. Liberación, *de M. C. Escher (litografía, 1955).*

El motivo es que el *razonamiento* se los dice. Razonaremos, pues, siguiendo una variante de la demostración de Euclides. Esta muestra que si se elige un número, cualquiera sea, habrá un primo que es mayor. Elijamos un número: N; multipliquemos después todos los enteros positivos entre sí, empezando por la unidad y terminando en N. En otras palabras, formamos el factorial de N, cuya simbolización es "$N!$". El producto obtenido es divisible por todos los números incluidos en la serie. Si a $N!$ se le suma 1, el resultado

no puede ser múltiplo de 2 (porque cuando se divide por 2, el resto es 1);
no puede ser múltiplo de 3 (porque cuando se divide por 3, el resto es 1);
no puede ser múltiplo de 4 (porque cuando se divide por 4, el resto es 1);

no puede ser múltiplo de N (porque cuando se divide por N, el resto es 1).

Dicho de otro modo, $N! + 1$ únicamente es divisible por números mayores que N, en caso que sea divisible por números distintos a la unidad y a sí mismo. De modo que, o N es primo, o sus divisores primos son mayores que él. Y, en cualquiera de ambos casos, hemos mostrado que tiene que existir un primo por encima de N. El proceso sigue siendo el mismo sea cual fuere el valor de N: siempre habrá un primo de valor mayor. Y así acaba la demostración de la infinitud de los primos.

Señalemos, por otra parte, que el último paso es llamado *generalización;* lo volveremos a encontrar más adelante, dentro de un contexto más formalizado. Consiste en desarrollar una demostración, tomando como base un número determinado (N), y luego establecer que N carece de especificidad, por lo que la demostración se generaliza.

La prueba de Euclides es característica de lo que constituye la "matemática real". Es, además, simple, precisa y bella. Enseña que, cuando se parte de un punto en particular, es posible recorrer un largo camino a través de etapas relativamente cortas. En nuestro caso, los puntos de partida están dados por ciertas nociones básicas relativas a la multiplicación, la división, etc. Las breves etapas son los pasos que sigue el razonamiento. Y, a pesar de que cada uno de estos pasos parece obvio, el resultado final no lo es. Nos es imposible verificar de modo directo la veracidad de la proposición; no obstante, le damos fe, porque confiamos en el razonamiento seguido. Si aceptamos razonar, parecería que no nos queda alternativa; si hemos estado de acuerdo con cada paso dado por Euclides, tendremos que estar de acuerdo con la conclusión que formula. Y éste es un hecho muy feliz, porque significa que los matemáticos siempre coincidirán en reputar "verdaderas" a ciertas proposiciones, y "falsas" a ciertas otras.

Esta demostración es ejemplo de un proceso sistemáticamente ordenado: cada aserción se relaciona de manera inevitable con las anteriores. Por eso es calificada como "prueba", y no como "evidencia suficiente". En matemática, el propósito perseguido es siempre aportar una prueba rigurosa en sustento de las proposiciones que no son obvias. La circunstancia misma de que los pasos estén articulados por medio de una sucesión rigurosa parece sugerir la existencia de una *estructura modelada* para eslabonar entre sí las distintas aserciones. Esta estructura puede ser expuesta más adecuadamente a través de un vocabulario específico —un vocabulario convencional, consistente en símbolos—, apto solamente para expresar afirmaciones relativas a números. De tal forma, podremos examinar la prueba en su versión traducida. Se tratará de un conjunto de enunciados cuya correspondencia, establecida línea por línea, estará formulada de modo aprehensible. Pero los enunciados, puesto que serán representados por un conjunto pequeño convencional de símbolos, asumirán la apariencia de *modelos*. En otros términos: aun cuando al ser leídos en voz alta impresionen como aserciones acerca de números y las propiedades de éstos, al ser analizados sobre una hoja de papel tendrán forma de modelos abstractos, y la estructura sistemática de la prueba puede comenzar a asemejarse a una lenta transformación de modelos, regida por la aplicación de unas pocas reglas tipográficas.

Soslayando el infinito

Aunque la prueba de Euclides demuestra que *todos* los números están dotados de cierta propiedad, rehúye tratar separadamente cada uno de los infinitos casos cubiertos por la demostración. Alude a ellos utilizando frases como "cualquiera sea N", o bien "sea cual fuere el valor de N". Podríamos desarrollar de nuevo la prueba empleando la expresión "todo N". Si se conoce el contexto pertinente, y la manera correcta de usar las expresiones anteriores, no será necesario abordar una cantidad infinita de casos, sino solamente dos o tres conceptos, entre ellos el de "todo". Éste, en sí mismo finito, abarca sin embargo una infinitud; mediante su empleo, dejamos a un lado la circunstancia evidente de que hay un número infinito de hechos que necesitaríamos probar.

Aplicamos la palabra "todo" a través de unas pocas formas, las cuales son definidas por el proceso de razonamiento establecido; es decir, hay reglas que gobiernan tal aplicación. Puede que no seamos conscientes de ello, y que creamos operar sobre la base del *significado* de dicha palabra; sostener esto último, empero, no es sino un rodeo para manifestar que somos guiados por reglas que en ningún momento explicitamos. Durante toda nuestra existencia, hemos empleado palabras reguladas por determinados modelos, pero en lugar de llamar "reglas" a los modelos, atribuimos el curso de nuestros procesos de pensamiento al "significado" de las palabras. Reconocer esto ha implicado un descubrimiento primordial en el largo camino hacia la formalización de la teoría de los números.

Si analizáramos más profundamente la demostración de Euclides, veríamos que está compuesta por muchos y muy pequeños pasos: casi infinitesimales. Si los formuláramos todos, línea por línea, la demostración se convertiría en algo enormemente complicado. Hay mayor claridad para nuestro entendimiento cuando diversos pasos son reunidos en uno, dando lugar a un solo enunciado. Asimismo, al emprender el examen despacioso de la prueba, comenzamos a distinguir estructuras individuales en su interior. Dicho de otra forma, la disección puede avanzar hasta allí, y permitirnos así captar la naturaleza "atómica" del proceso de razonamiento. Una demostración puede ser fragmentada en una serie de saltos minúsculos pero discontinuos, que parecen discurrir con fluidez cuando son observados desde una posición ventajosa. En el Capítulo VIII, mostraremos un modo de descomponer la demostración en unidades atómicas, y veremos qué extraordinaria cantidad de pasos son englobados. Pero quizá esto no sea sorprendente. Cuando Euclides ideó su prueba, las operaciones producidas en su cerebro seguramente movilizaron millones de neuronas (células nerviosas), muchas de las cuales habrán entrado en actividad centenares de veces en sólo un segundo. La simple formulación de una frase activa centenares de miles de neuronas. Como los pensamientos de Euclides fueron altamente complejos, se justifica que su demostración contenga una cantidad colosal de pasos. (Puede que sea escasa la vinculación directa entre la actividad neuronal del cerebro de Euclides, y una prueba en nuestro sistema formal, pero las complejidades de ambos son comparables. Es como si la naturaleza exigiera no olvidar la complejidad de la prueba relativa a la infinitud de los primos, a pesar de que los sistemas respectivos sean muy diferentes entre sí.)

En los capítulos venideros, expondremos un sistema formal que, 1) incorpora un vocabulario convencional que permite formular todos los enunciados atinentes a los números naturales, y 2) cuenta con reglas que corresponden a todos los tipos de razonamiento que se consideren necesarios. Un interrogante de la mayor importancia será el de si las reglas que estableceremos para guiar la manipulación simbólica tienen en realidad las mismas potencialidades (dentro del marco de la teoría de los números) que nuestras facultades habituales de razonamiento, o bien si, de manera más genérica, es teóricamente posible igualar el nivel de nuestras capacidades mentales, a través del empleo de un sistema formal.