Compleción de los reales.

Definición. Si X es un subconjunto de $\mathbb{R}$, un número real β se dice que es una cota superior de X si, para cualquier elemento $x \in X$,se cumple que $x \leq \beta$. Análogamente, un número real α se dice que es una cota inferior de X si, para cualquier elemento $x \in X$, se cumple que $\alpha \leq x$.

Un subconjunto X de $\mathbb{R}$ se denomina acotado superiormente (respectivamente acotado inferiormente), si X tiene alguna cota superior (respectivamente inferior). Se dice que X es acotado si lo es superior e inferiormente.

Si X es un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado superiormente, una cota superior s de X se denomina supremo de X, escribiéndose $x = \sup X$, si s es menor que cualquier otra cota superior de X, esto es, si cumple las dos condiciones siguientes:

1) $x \leq s \; \forall x \in X$
2) Si $b \in X \; \forall x \in X$ entonces $s \leq b$.

De forma análoga, si X es un subconjunto de $\mathbb{R}$ acotado inferiormente, una cota inferior i de X se denomina ínfimo de X, escribiéndose $i = \text{ínf}\, X$, si i es mayor que cualquier otra cota inferior de X, es decir, si verifica las 2 condiçiõnes siguientes:

1) $i \leq x \; \forall x \in X$
2) Si $b \leq x \; \forall x \in X$, entonces $b \leq i$.

Cuando el supremo s de un conjunto X cumple $s \in X$, se dice que el supremo de X es accesible y se denomina entonces máximo de X, escribiéndose $\text{Máx}\, X$. Si el ínfimo de un subconjunto X pertenece a dicho conjunto, se denomina mínimo de X y se escribe $\text{mín}\, X$.

Ejemplos.-

a) El conjunto $\Re_0^+ = \{x \in \mathbb{R} | 0 < x\}$, no está acotado superiormente ya que no existe ningún número real β tal que $x \leq \beta \ \forall x \in \Re_0^+$. No obstante dicho conjunto está acotado inferiormente pues todo número real negativo α es cota inferior de $\Re_0^+$ ya que se cumple $\alpha < 0 < x \ \forall x \in \Re_0^+$.

b) $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$ Tiene cota inferior.
Tiene cota superior.
Tiene Máx = 1.
Tiene mín = 0.

c) $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{Z} \,\&\, n \neq 0\}$
Tiene cota inferior, como $\frac{-1}{2}$.
Tiene cota superior, como 3.
Tiene Máx = 1.
Tiene mín = $\frac{-1}{2}$.

d) $\{\frac{1}{n} + (-1)^n | n \in \mathbb{N}\}$
Tiene cota superior, como $\frac{3}{2}$.
Tiene cota inferior, como1.
Tiene Máx = $\frac{3}{2}$.
No tiene mín.

Axioma del supremo.

Si S es un conjunto de números reales no vacío y acotado superiormente, existe sup S.

<u>Teorema</u>.- Si S es un conjunto de números reales no vacío y acotado inferiormente entonces S tiene ínfimo.

Demonstración. Sea m una cota inferior de S & H el conjunto de las cotas inferiores. H es no vacío pues $m \in H$. H está acotado superiormente por cualquier elemento de S. Sea μ el supremo de H. Entonces $\mu =$ ínf S.

1) $\forall x \in S$ se verifica $\mu \leq x$ (μ es cota inferior).
2) $\forall y \in H, y \leq \mu$.
Por tanto μ es el ínfimo de S.

<u>Teorema</u>: Sea S un conjunto no vacío de números reales y acotado superiormente, entonces $M = \sup S \iff$ 1) $x \leq M \; \forall x \in S$

2) $\forall \varepsilon > 0$ existe $x \in S$ tal que $M < x + \varepsilon$

$Demostración$: $\Longrightarrow)$ Sea $M = \sup S$ entonces (1) se cumple por definición de supremo; para (2) supongamos que $\exists \varepsilon > 0$ tal que ningún $x \in S$ cumple (2), $\therefore M \geq x + \varepsilon \; \forall x \in S$, es decir, $x \leq M - \varepsilon \; \forall x \in S$ y se tiene que $M - \varepsilon < x \; \forall x \in S \; \therefore \; M - \varepsilon$ es una cota superior de S y M no puede ser entonces supremo de $S.Contradicción\ a\ la\ hipótesis$.

$\Longleftarrow)$ Supongamos que se cumple

1) $x \leq M \; \forall x \in S$
2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in S$ tal que $M < x + \varepsilon$

Por reducción al absurdo, supongamos que Mes el supremo de S, por (1) Mes cota superior de S. Sea $M' < M$ una cota superior y tomamos $\varepsilon = M - M'$ entonces si M cumple (2) $M < x + \varepsilon \; \Longrightarrow M < x + M + M' \; \Longrightarrow M' < x$ para algún $x, contradicción$ pues M' es cota superior de $S \; \therefore M = \sup S$. ■

Propiedad Arquimediana.

Dados $a > 0, b > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$tal que $na > b$.

$Demostración$: Por contradicción. Supongamos que $b \geq na \; \forall n \in \mathbb{N}$ y sea S el conjunto de todos los números na $(n = 1, 2, \ldots)$. Como $S \neq \emptyset$ y b es cota superior de S entonces $\exists \mu = \sup S$. Es claro que $na \leq \mu \leq b \; \forall n \in \mathbb{N}$. También $(n+1)a \leq \mu \; \forall n \in \mathbb{N} \; \therefore n \leq \mu - a$ de S y como $\mu - a < \mu$ entonces μ no es el sup $S. Contradicción\ al\ al\ hipótesis$.

$\therefore S$ no está acotado, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$.

Teorema: Si a es tal que $0 \leq a < \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$ necesariamente $a = 0$.

Demonstración. Supongamos que $a < 0$ entonces $a < \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$ lo cual no puede ocurrir pues los naturales no están acotados $\therefore a = 0$-

Teorema: (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$). Si $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x < y$, entonces existe un numero racional r tal que $x < r < y$.

Demonstración. Dado $y > x$, se cumple que $y - x > 0$ y por la propiedad arquimediana $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n(y - x) = ny - nx$. Si la diferencia entre dos números es mauyor a 1 necesariamente existe un número entero entre ellos (m) esto es $nx < m < ny$ en consecuencia se cumple $x < \frac{m}{n} < y$ en definitiva $r = \frac{m}{n}$ es el número racional buscado.

Corolário: Si $x, y \in \mathbb{R}$ son tales que $x < y$, entonces existe un número irracional z tal que $x < z < y$.

Demonstración: Aplicando la propiedad de densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ a los números $\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{y}{\sqrt{2}}$ tenemos que existe un número racional $r \neq 0$ tal que $\frac{x}{\sqrt{2}} < r < \frac{y}{\sqrt{2}}$. En consecuencia $x < r\sqrt[2]{2} < y$ de manera que $z = \sqrt[2]{2}$ es el número irracional buscado.

Ahora vamos a justificar que $r\sqrt[2]{2} \notin \mathbb{Q}$. Supongamos que $r\sqrt[2]{2} \in \mathbb{Q} \Longrightarrow r\sqrt[2]{2} = \frac{p}{q} \Longrightarrow \sqrt[2]{2} = \frac{1}{r}\frac{p}{q} = \frac{p\prime}{q\prime}\ \therefore$
$\sqrt[2]{2} = \frac{p\prime}{q\prime} \in \mathbb{Q}\ contradicción, \therefore\ r\sqrt[2]{2} \notin \mathbb{Q}$.