2.4.2. El método de Roberval para obtener el área encerrada por una cicloide

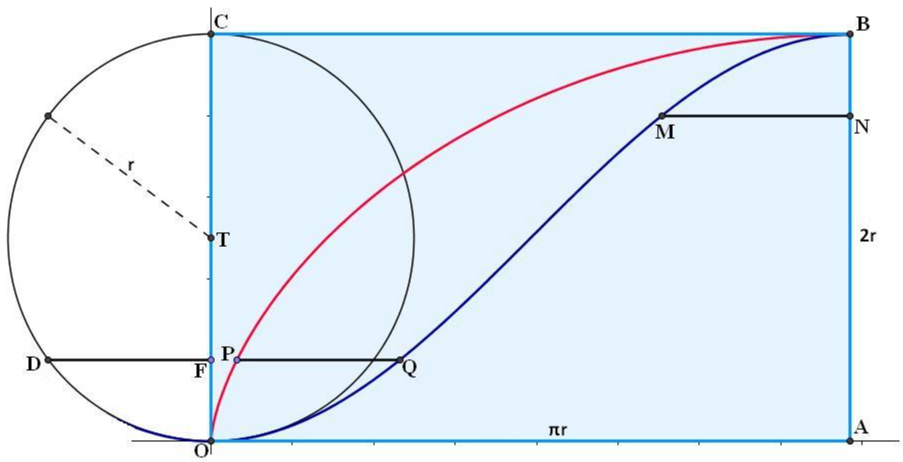

Figura 2.7: Método de Roberval para el área de una cicloide

Sea OPB la mitad de un arco de cicloide generada por el círculo de radio r centrado en T. El área del rectángulo $OABC$ es $\pi r 2r = 2\pi r^2$, es decir, que es el doble del círculo generador. ver figura 2.7

Tracemos segmentos horizontales DF, con longitud determinada por el diámetro OC y la circunferencia. Ahora trasladamos horizontalmente el segmento DF conservando la altura OF de tal manera que el punto D vaya al punto de la cicloide P y F determine un punto Q. De esta manera $DF = PQ$. Realizamos este mismo proceso con todas las semicuerdas del círculo y así obtenemos la curva OQB que se llama curva asociada a la cicloide. (De paso Morris Klein afirma que la curva OQB es $y = r\sin(\frac{x}{r})$, donde r es el radio de la circunferencia generatriz, con origen en el punto medio de OQB y el eje Ox paralelo a OA.)

Roberval afirma que la curva OQB divide al rectángulo $OABC$ en dos partes iguales porque a cada linea FQ en $OQBC$ le corresponde una linea igual MN en $OABQ$. En efecto: Sea $OF = BN$, tracemos paralelas a OA por F y N. Veamos que $FQ = NM$.

Como $PQ = WN$ por construcción, dado que $OF = BN$, también tenemos que $QO = MO'$ y los triángulos POQ y $WO'M$ son congruentes. Como la circunferencia rueda sin deslizar, el arco JP tiene igual longitud que el segmento JO.

Luego

$$FQ' = r\theta$$

.

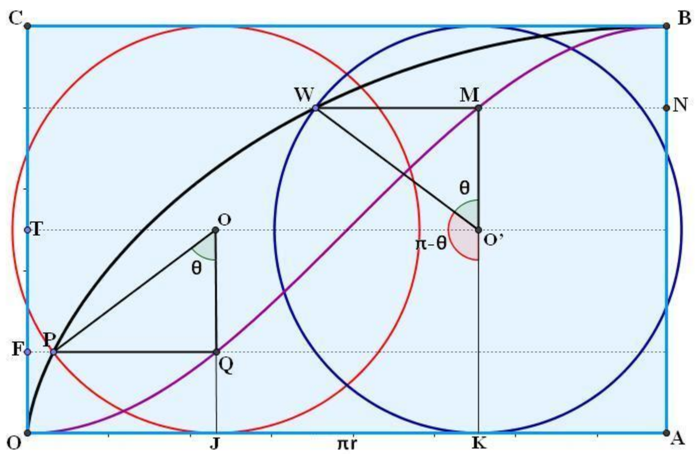

Figura 2.8: Prueba de Roberval para el área de una cicloide

Por otra parte,

$$\begin{aligned} MN &= OA - OK \\ &= r\pi - r(\pi - \theta) \\ &= r\theta. \end{aligned}$$

Por tanto

$$FQ = NM.$$

Después de lo anterior podemos aplicar el principio de Cavalieri. Ya hemos dicho que el área del rectángulo es el doble del círculo generador, entonces $OABQ$ tiene la misma área que el círculo generador, Además el área entre OPB y OQB es igual al área del semicirculo ODC, porque de la misma definición de Q se tiene que $DF = PQ$. Así:

$$\text{Área bajo el semiarco de cicloide} = \text{Área de } OABQ + \text{Área entre } OPB \text{ y } OQB$$

$$= \pi r^2 + \frac{\pi}{2} r^2 = \frac{3}{2} \pi r^2$$

En consecuencia,

el área encerrada debajo de un arco de cicloide es 3 veces el área del círculo generador.

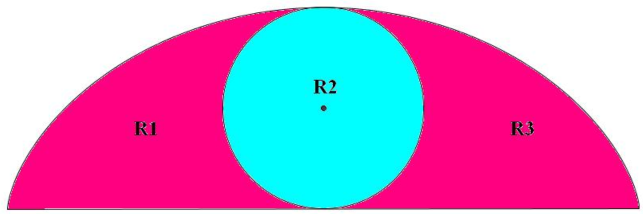

Figura 2.11: Gráfica de comparación de regiones de un arco de cicloide

Dado un punto R sobre la cicloide, si trazamos una paralela OW que parse por R y corte en M la circunferencia generatriz CMF, que ilustramos en la figura 2.12, entonces se cumple que

$$\boxed{arcCM = RM,}$$

esta igualdad se conoce como la **propiedad característica de la cicloide.**

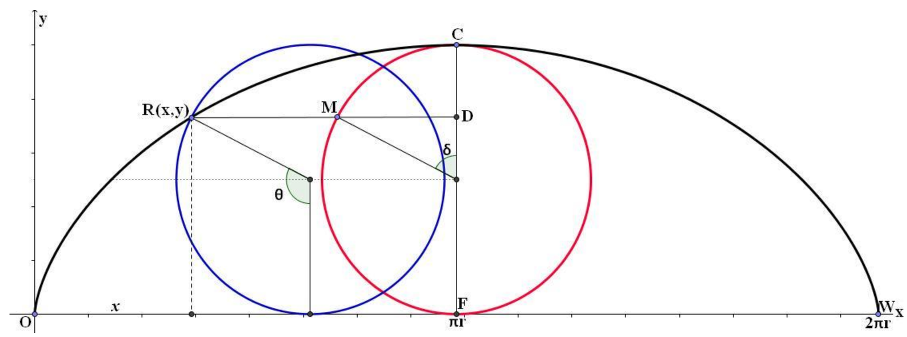

Figura 2.12: Propiedad característica de la cicloide

En efecto,

$$arcCM = r\delta$$

pero $\delta = \pi - \theta$, de donde

$$arcCM = (\pi - \theta)r.$$

Ahora

$$RD = OF - x,$$

luego

$$RD = r\pi - (r\theta - r\sin\theta).$$

Así

$$RD = r(\pi - \theta) + r\sin\theta.$$

De otro lado tenemos que:

$$MD = r\sin\delta,$$

es decir

$$MD = r\sin\theta.$$

Luego

$$RD = RM + MD$$

$$RM = RD - MD$$

$$RM = r(\pi - \theta) + r\sin\theta - r\sin\theta$$

$$RM = r(\pi - \theta)$$

$$RM = arcCM.$$

Concluimos que

$$arcCM = RM.$$

2.5.2. Método de Fermat para hallar la tangente a la cicloide

Para hallar la tangente a la cicloide, Fermat recurre a los dos siguientes principios:

Primero: Se pueden sustituir las ordenadas de las curvas por las ordenadas de las tangentes ya halladas.

Segundo: Se puede sustituir las longitudes de arco de las curvas por las partes correspondientes de la tangente ya hallada.[5] pag 178.

Consideremos la cicloide HCG de vértice C, cuya circunferencia generatriz es CMF, ver figura 2.13. Sea RB la tangente a la cicloide en el punto R.
Sea $CD = x$, $RD = f(x)$, $MD = g(x)$ y $DB = a$. Según la propiedad caracteristica de la cicloide, tenemos que:

$$f(x) = RM + MD = arcCM + g(x) \tag{2.1}$$

hagamos $DE = e$ y tracemos NE paralela a RD, que corta a RB en N y a la circunferencia en O. Como los triángulos RDB y NEB son semejantes, entonces

$$\frac{RD}{NE} = \frac{DB}{EB},$$

es decir,

$$\frac{f(x)}{NE} = \frac{a}{a-e}.$$

En consecuencia,

$$NE = f(x)\frac{a-e}{a}$$

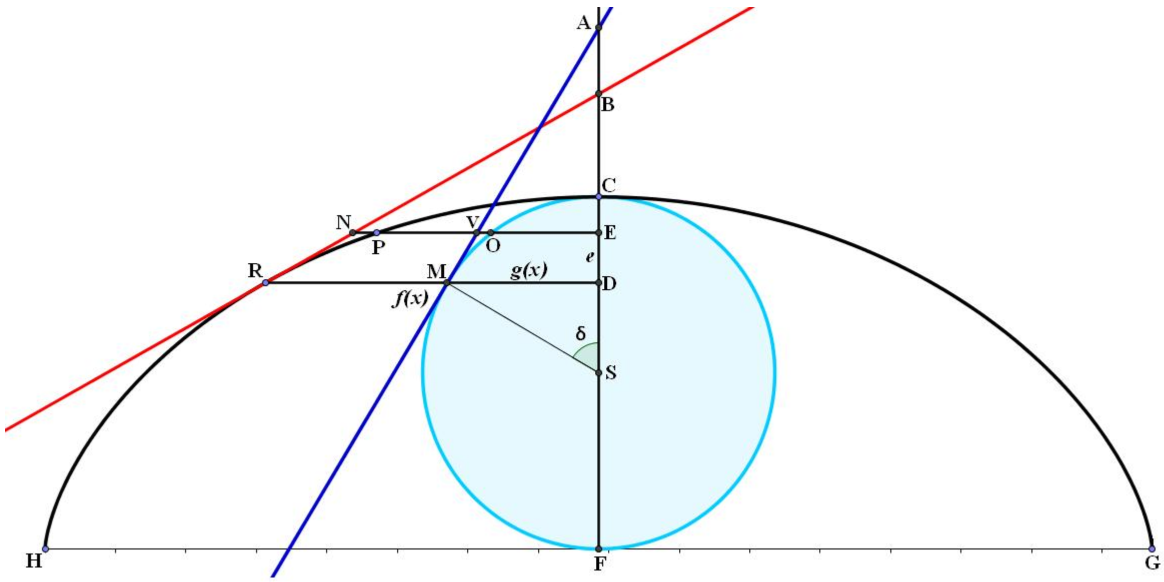

Figura 2.13: Método de Fermat para hallar la tangente a la cicloide

De acuerdo con el primer principio, reemplazamos la ordenada $f(x-e)$ de la curva por la correspondiente ordenada de la tangente, es decir, hacemos

$$f(x)(\frac{a-e}{a}) \sim f(x-e), \tag{2.2}$$

donde el simbolo $\sim$ nos está reemplazando la frase "aproximadament igual a ".
Por la propiedad caracteristica de la cicloide tenemos ahora que:

$$f(x-e) = arcCO + g(x-e),$$

pero

$$arcCO = arcCM - arcOM;$$

luego

$$f(x-e) = arcCM - arcOM + g(x-e). \tag{2.3}$$

Sea $MA = d$, la tangente a la circunferencia CMF que corta a NE en V, y sea $AD = b$, la subtangente a ésta en el punto M. De la figura 2.13, vemos que el triángulo MDA es semejante al triángulo VEA, por lo tanto

$$\frac{MD}{VE} = \frac{DA}{EA}.$$

Es decir,

$$\frac{g(x)}{VE} = \frac{b}{b-e}.$$

son consecuencia,

$$VE = g(x)\frac{b-e}{b}$$

Aplicando de nuevo el primer principio, tenemos:

$$g(x)\frac{b-e}{b} \sim g(x-e). \tag{2.4}$$

Por el segundo principio, podemos reemplazar ahora las longitudes de arco de las curvas por las partes correspondientes de las tangentes ya halladas.
Por lo tanto

$$arcOM \sim MV.$$

Ahora, de la semejanza de triángulos MDA y VEA tenemos

$$\frac{MV}{d} = \frac{e}{b},$$

y

$$MV = \frac{de}{b}.$$

luego

$$arcOM \sim \frac{de}{b} \tag{2.5}$$

Reemplazando (2.5) y (2.4) en (2.3), tenemos:

$$f(x-e) \sim arcCM - \frac{de}{b} + g(x)\frac{b-e}{b} \tag{2.6}$$

ahora, reemplazando (2.1) y (2.6) en (2.2), tenemos

$$\frac{[arcCM + g(x)](a-e)}{a} \sim arcCM - \frac{de}{b} + g(x)\frac{b-e}{e}$$

$$\frac{a(arcCM)}{a} - \frac{e(arcCM)}{a} + \frac{ag(x)}{a} - \frac{eg(x)}{a} \sim arcCM - \frac{de}{b} + \frac{b}{b}g(x) - e\frac{g(x)}{b}$$

eliminando todos los términos comunes,

$$-\frac{e}{a}(arcCM) - \frac{e}{a}g(x) \sim -\frac{de}{b} - \frac{e}{b}g(x)$$

se dividen todos los términos por e, y obtenemos

$$-\frac{arcCM}{a} - \frac{g(x)}{a} \sim -\frac{d}{b} - \frac{g(x)}{b}$$

o bien

$$\frac{arcCM}{a} + \frac{g(x)}{a} = \frac{d}{b} + \frac{g(x)}{b}.$$

Es decir,
$$\frac{arcCM + g(x)}{a} = \frac{d + g(x)}{b}.$$
Por (2.1)
$$\frac{f(x)}{a} = \frac{d + g(x)}{b} \tag{2.7}$$
Por pitágoras tenemos que $d^2 = [g(x)]^2 + b^2$, de donde
$$b^2 = d^2 - [g(x)]^2$$
$$b^2 = (d - g(x))(d + g(x)).$$
Luego
$$\frac{b}{d - g(x)} = \frac{d + g(x)}{b}. \tag{2.8}$$
Sea S el centro de la circunferecia generatriz y r el radio de la misma. Como los triángulos AMS, MDA y SMD son semejantes, entonces
$$\frac{d}{r} = \frac{b}{g(x)} = \frac{g(x)}{r - x}$$
Por la propiedad de las proporciones, de la primera y tercera fracción tenemos:
$$\frac{d - g(x)}{r - (r - x)} = \frac{d}{r}.$$
Luego
$$\frac{d - g(x)}{r - (r - x)} = \frac{d}{r} = \frac{b}{g(x)}.$$
Por lo tanto
$$\frac{g(x)}{x} = \frac{b}{d - g(x),}$$
y por (2.8)
$$\frac{g(x)}{x} = \frac{d + g(x)}{b}. \tag{2.9}$$
Igualando (2.7) y (2.9), obtenemos
$$\frac{f(x)}{a} = \frac{g(x)}{x}.$$
De esta forma, las pendientes de MC y RB son iguales. Por lo cual concluimos que la tangente en R es paralela a MC. Así, podemos hallar tangentes a la cicloide en el punto R trazando una paralela a MC por dicho punto.