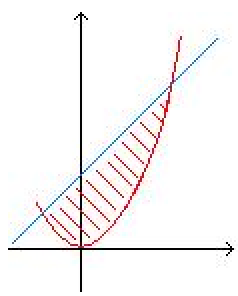
Integrales Triples

Aplicaciones a Areas y Volumenes

Sea S una región del tipo I dada por $S = \{(x,y)|a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$ si ponemos $f(x,y) = 1 \quad \forall(x,y) \in S$ obtenemos $\displaystyle\int\int_S dxdy = \int_a^b \varphi_2(x) - \varphi_1(x)dx$. Así pues las integrales pueden emplearse para calcular áreas.

Ejemplo: Hállese el área de la región R encerrada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$ Sea $D^* \subset \mathbb{R}^2$ el rectángulo $D^* = [0,1]x[0,2\pi]$ $x^2 = x + 2 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$

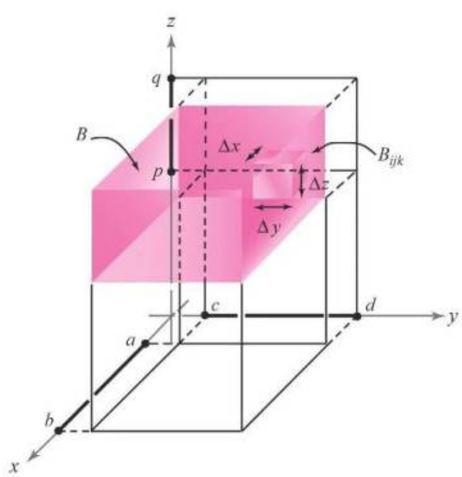


$$\int_1^2 \int_{x^2}^{x+2} dydx = \int_{-1}^2 y\Big|_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^2 x + 2 - x^2 dx$$

$$\frac{2^2}{2} + 2(2) - \frac{2(2)^3}{3} - \left[\frac{(-1)^2}{2} + 2(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right] = \frac{9}{2}$$

Integrales triples

Dada una función continua $f : B \to R$ donde R es algún paralelepipedo rectangular en $\mathbb{R}^3$ podemos definir la integral de f sobre B como un límite de sumas, partimos los tres lados de B en "n"partes iguales.



$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk})\Delta_v$$

donde $C_{ijk} \in B_{ijk}$, el ijk-ésimo paralelepipedo rectangular o caja en la partición de B y Δ_v es el volumen de B_{ijk}.

Definición: Sea f una función acotada de tres variables, definida en B. La llamamos integral triple o simplemente integral de f en B, y la denotamos

$$\int_B f dv \quad , \quad \int_B f(x,y,z)dr \quad , \quad \int\int\int_B f(x,y,z)dxdydz$$

Resultados análogos a las integrales dobles que se cumplen para integrales triples.

- Las funciones continuas definidas en B son integrables
- Funciones acotadas cuyas discontinuidades estan confinadas en gráficas de funciones continuas son integrables

Si $B = [a, b] \times [c, d] \times [u, v]$. Entonces tenemos las integrales iteradas

$$\int_u^v \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz \qquad \int_u^v \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) d \qquad \int_a^b \int_u^v \int_c^d f(x, y, z) dy dz dx$$

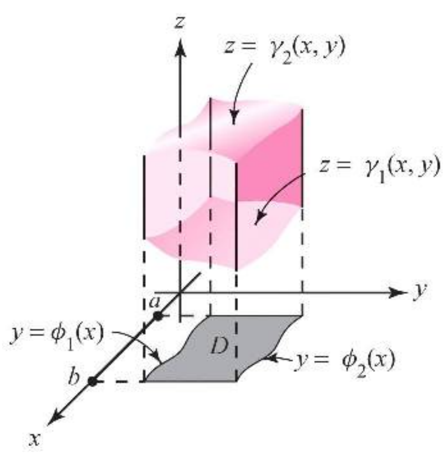
El orden de dx, dy, dz indica como se realiza la integración como en el caso de 2 variables, se cumple el teorema de fubini si f es continua, entonces las 6 posibles integrales son iguales. En otras palabras , una integral triple se puede reducir a una triple integración iterada.
La idea es considerar conjuntos acotados (cajas) $W \subset \mathbb{R}^3$ tal que $B \subset W$. Asi dada dada $f : W \to \mathbb{R}$ definimos $\bar{f}$ que coincide con f en W y cero fuera de W. Si B es una caja que contiene a W y ∂W está formada por las gráficas de un número finito de funciones continuas, $\bar{f}$ sera integrable y $\displaystyle\int_W f(x, y, z) dv = \int_b \bar{f}(x, y, z) dW$

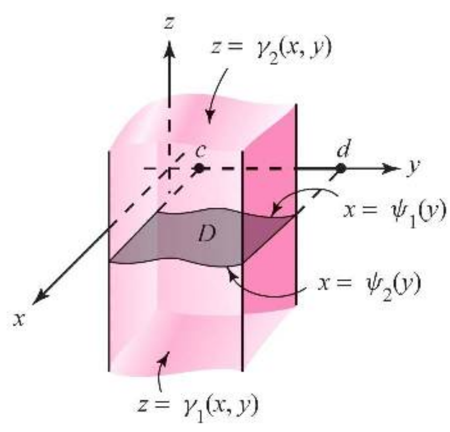
Una región W es de tipo I si:

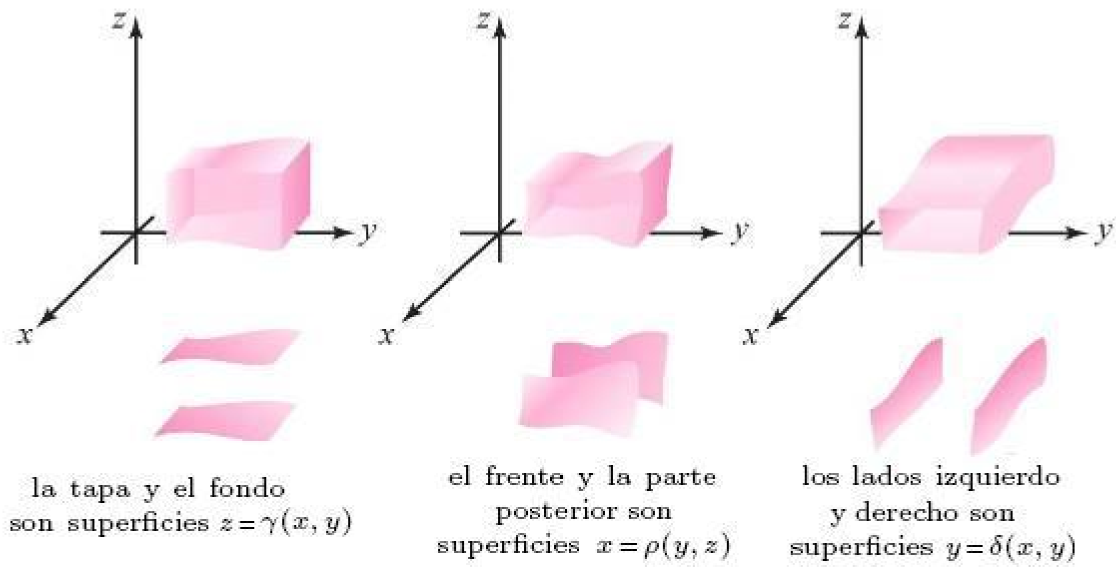
1. $a \leq x \leq b \quad \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x) \quad \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)$
2. $c \leq y \leq d \quad \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \quad \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y)$

Una región es de tipo II si se puede expresar como 1. y 2. intercambiando x y z. W es del tipo III si se puede expresar como 1. y 2. con y y z intercambiados.

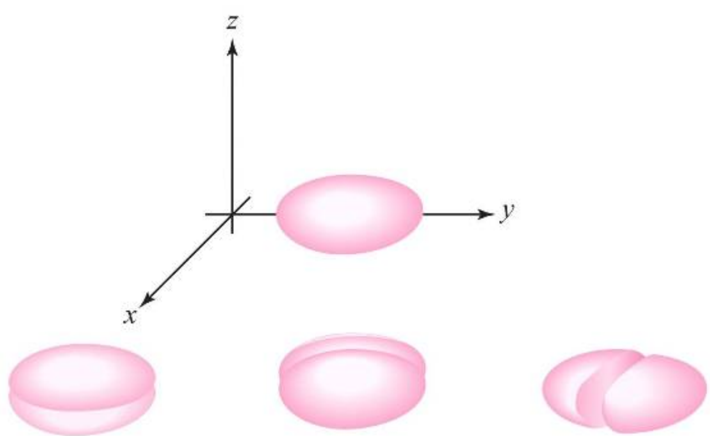
Una región W que sea del tipo I, II y III se llama del tipo IV.



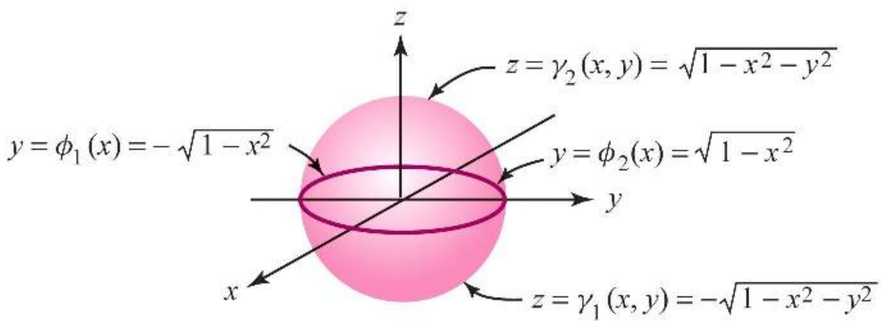




Un ejemplo de una región del tipo IV es la bola de radio r, $x^2+y^2+z^2 \leq r^2$



Ejemplo: Verificar la fórmula para el volumen de la bola $\int_W dr = \frac{4\pi}{3}$ donde W es la bola unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$



Sol. la región W es del tipo I pues

$-1 \leq x \leq 1 \quad , \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \quad , \quad \sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$

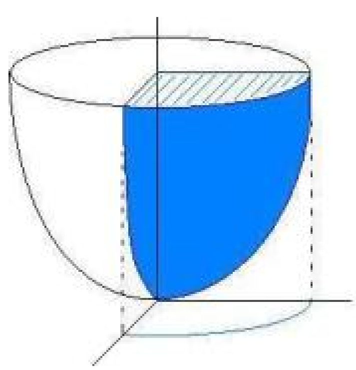
$$\therefore \int_W dr = \int_{-1}^{1} \int_{-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}^{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \int_{-(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}^{(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}} dzdydx = \int_{-1}^{1} \int_{-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}^{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} z \Big|_{-(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}^{(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}} dydz =$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} \int_{-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}^{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad \text{hacemos } a = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2 \int_{-1}^{1} \int_{-a}^{a} (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} dydx = 2 \int_{-1}^{1} \frac{\pi a^2}{2} dx = \pi \int_{-1}^{1} 1 - x^2 dx = \pi (x - \frac{x^3}{3}) \Big|_{-1}^{1} = \frac{4}{3}\pi$$

Ejemplo: Sea W la región acotada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$ y la superficie $z = x^2 + y^2$ $x \geq 0$, $y \geq 0$. Calcular $\int_W x dxdydz$

Sol. La región W está esbozada $x^2 + y^2 \leq z \leq 2$



Vista como región tipo I

$0 \leq x \leq \sqrt{2}$

$0 \leq y \leq \sqrt{2 - x^2}$

$$\int_W xdxdydz = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{(2-x^2)^{\frac{1}{2}}}\int_{x^2+y^2}^{2} dzdydx = \int_o^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} xz\Big|_{x^2+y^2}^{2} =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2)dydx = \int_0^{\sqrt{2}} x[2y-x^2y-\frac{y^3}{3}]\Big|_0^{\sqrt{2-x^2}} dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} x(2(\sqrt{2-x^2}))-x^2(\sqrt{2-x^2})-\frac{(\sqrt{2}-x)^3}{3}dx = \int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2-x^2}(2-x^2)-\frac{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} x(2-x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2}{3}x(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx = \frac{1}{3}\int_0^{\sqrt{2}}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}2xdx$$

hacemos $u = 2-x^2$, $x=0 \ \Rightarrow \ u=2 \quad du=-2x$, $x=\sqrt{2} \ \Rightarrow \ u=0$ entonces tenemos

$$\frac{1}{3} - \int_2^0 u^{\frac{3}{2}}du = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)u^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)2^{\frac{5}{5}} = \frac{2}{15}(2^{\frac{3}{2}}) = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{15} = \frac{8\sqrt{2}}{15}$$

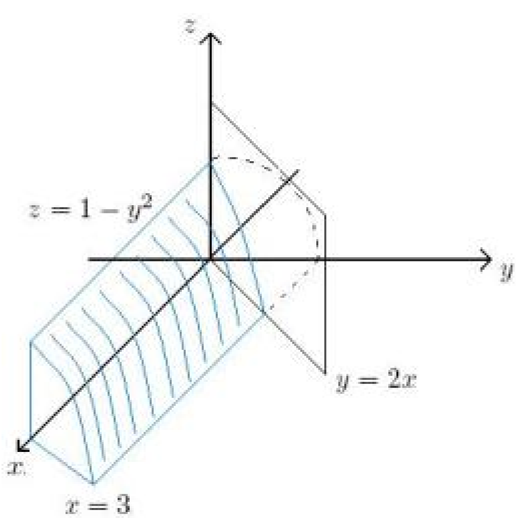
Cambiando el orden de intagración tenemos

$0 \le z \le 2$, $0 \le y \le \sqrt{z}$, $0 \le x \le \sqrt{z-y^2}$

$$\int_W xdxdydz = \int_0^2\int_0^{\sqrt{z}}\int_0^{\sqrt{z-y^2}} xdxdydz = \int_0^2\int_0^{z^{\frac{1}{2}}} \frac{z-y^2}{2}dydz = \frac{1}{2}\int_0^2 z^{\frac{3}{2}} - \frac{z^{\frac{3}{2}}}{3}dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}dz = \frac{2}{15}z^{\frac{5}{2}}\Big|_0^2 = \frac{2}{15}(2)^{\frac{5}{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{15}$$

Ejemplo: Obtener el volumen del solido del primer octante limitado por las gráficas de $z = 1-y^2$ $y = 2x$ y$x = 3$



La integración con respecto a z sería de $0 \le z \le 1-y^2$

la proyección en el el plano xy es del tipo II

$\frac{y}{2} \le x \le 3$

$0 \le y \le 1$

$$r = \int\int\int_D dv = \int_0^1 \int_{\frac{y}{2}}^3 \int_0^{1-y^2} dzdxdy = \int_0^1 \int_{\frac{y}{2}}^3 1 - y^2 dxdy = \int_0^1 x - xy^2 \Big|_{\frac{y}{2}}^3 dy =$$

$$= \int_0^1 3 - 3y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3 dy = 3y - y^3 - \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{8}y^4 \Big|_0^1 = \frac{15}{8}$$

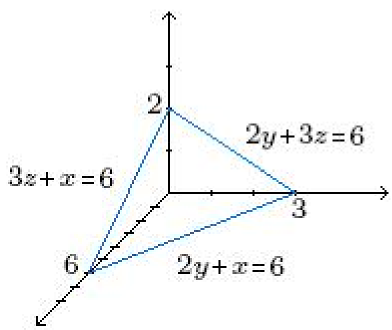
Ejemplo: Considere la integral reiterada $I = \int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} xy^2 dzdydx$

Mostrar que sus limites de integración definen una región que se puede tomar indistintamente como cualquiera de las seis formas posibles y cambiar el orden de integración para obtener las otras formas de integrales reiteradas.

$$\int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{2}} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} xyzdzdydx$$

$$z = \frac{6-x-2y}{3} \qquad Si\ z = 0(xy) \qquad Si\ x = 0(yz) \qquad Si\ y = 0(xz)$$

$$2y + x = 6 \qquad 3z + 2y = 6 \qquad 3z + x = 6$$



Si y es fija

$0 \leq y \leq 3$

$0 \leq x \leq 6 - 2y$

$0 \leq z \leq \frac{6-x-2y}{3}$

$$\int_0^3 \int_0^{2-y} \int_0^{\frac{6-x-2y}{3}} xyzdzdxdy$$

En el plano xz $\left(y = \dfrac{6-x-3z}{2}\right)$

$0 \leq x \leq 6$

$0 \leq z \leq \frac{6-x}{3}$

$0 \leq y \leq \frac{6-x-3z}{2}$

$$\int_0^6 \int_0^{\frac{6-x}{3}} \int_0^{\frac{6-x-3z}{2}} xyzdydzdx$$

$0 \leq z \leq 2$

$0 \leq x \leq 6 - 3z$

$0 \leq y \leq \frac{6-x-3z}{3}$

$$\int_0^2 \int_0^{6-3z} \int_0^{\frac{6-x-3z}{2}} xyzdydxdz$$

En el plano yz $\left(x = 2 - \frac{3}{2}y - z\right)$

$$0 \le y \le 3 \qquad\qquad 0 \le z \le 2$$

$$0 \le z \le \tfrac{6-2y}{3} \qquad\qquad 0 \le y \le \tfrac{6-3z}{3}$$

$$0 \le x \le 2 - \tfrac{3}{2}y - z \qquad\qquad 0 \le x \le 2 - \tfrac{3}{2}y - z$$

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{6-2y}{3}} \int_0^{2-\frac{3}{2}y-z} xyz dxdzdy \qquad\qquad \int_0^2 \int_0^{\frac{6-3z}{2}} \int_0^{2-\frac{3}{2}y-z} xyz dxdydz$$