Introdución a los números complejos

Bosquejo historico El sistema de los números reales fue el resultado de la busqueda de un sistema (un conjunto abstracto con ciertas reglas) que incluyera a los racionales, pero que también proporcionara soluciones a ecuaciones polinomiales tales como $x^2 - 2 = 0$.

Históricamente, una consideración similar dio origen a la extensión de los números reales. A principios del siglo XVI, Geronimo Cardano consideró ecuaciones cuadráticas (y cúbicas) tales como $x^2 + 2x + 2 = 0$, que no son satisfechas por ningún número real x. La formula cuadrática

$$-b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

da las expresiones formales para las dos soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$. Pero esta fórmula puede requerir raíces cuadradas de números negativos, por ejemplo $-1 \pm \sqrt[n]{-1}$ para la ecuación $x^2 + 2x + 2 = 0$. Cardano notó que si estos números complejos son tratados como números ordinarios con la regla $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$, estos, resolvían en efecto las ecuaciones. Hacia mediados del siglo XVI, apareció una publicación de Jeronimo Cardano (1501-1576), *Ars Magna*, en la que se presenta una solución de la ecuación cúbica.

En realidad hay una controversia sobre quién descubrió esta solución. Cardano presionó a Niccolo Tartaglia (Niccolo Fontana de Bresia (1500-1557)) para que se revelara el método de solución de la cúbica que éste habia encontrado. Tartaglia se lo dió pidiéndole que guardara el secreto. Según Carl B. Boyer en su libro Historia de la Matemática (Capítulo XV), fue Scipione del Ferro (1465-1526) profesor de matemáticas en Bolonia, una de las más antiguas universidades medievales y una escuela con una gran tradición matemática, quien descubriera la solución pero que sólo revelaría antes de su muerte a uno de sus alumnos Antonio María Fior.

Alguna noticia sobre la existencia de una solución algebraica de la ecuación cúbica debio filtrarse, al parecer, y Tartaglia nos dice que al tener conocimiento de la posibilidad de resoverla, se le ocurrio dedicarse intensamente a descubrir el método por sí mismo. Ya fuera independientemente o sobre la base de alguna sugerencia, lo cierto es que Tartaglia consiguie aprender, hacia el año 1541, a resolver ecuaciones cúbicas. Cuando se extendió esta noticia, se organizó un desafío matemático entre Fior y Tartaglia.

El método de del Ferro-Tartaglia se expresa en términos modernos como sigue:

Sea

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

se reduce la ecuación general de la cúbica con un cambio de variable $x = x - \frac{b}{3}$, para obtener la forma

$$x^3 + px + q = 0 \quad donde \quad p = c - \frac{b^2}{3} \quad y \quad q = 2\frac{b^3}{27} - \frac{cb}{3} + d$$

Sea $p \neq 0$ vamos a considerar dos incógnitas, s y t tales que $x = s + t$, sustituimos en la cúbica y desarrollamos

$$(s+t)^3 + p(s+t) + q = 0$$
$$s^3 + 3s^2t + 3st^2 + t^3 + ps + pt + q = 0$$

Observamos que si $s^3 + t^3 = -q$ y $3st = -p$ (o bien $st = -\frac{p}{3}$) entonces tendríamos que x sería solución.
Resolvemos el siguiente sistema:

$$s^3 + t^3 = -q \tag{1}$$

$$3st = -p \tag{2}$$

despejamos t en (2) y sustituimos en (1)

$$s^3 + \left(-\frac{p}{3s}\right) = -q$$

$$3^3(s^3)^2 + 3^3 s^3 q - p^3 = 0$$

y si hacemos $s^3 = \alpha$ obtenemos

$$3^3\alpha^2 + 3^3\alpha q - p^3 = 0$$

entonces las soluciones para $\alpha^2 + q\alpha - \frac{p^3}{27} = 0$ y los posibles valores para s^3 son:

$$\alpha = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{27}}$$

También se puede obtener una cuadrática en términos de t^3 y tendremos dos valores posibles:

$$\beta = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{27}}$$

Por las condiciones del sistema tenemos que :

$$s = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} \quad y \quad t = \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Por tanto

$$x = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Esta es la solución de del Ferro-Tartaglia-Cardano.
Cuando en la fórmula el discriminante $\frac{q^2}{2^2} + \frac{p^3}{27}$ resultaba negativo, ya no se podía admitir que no hubiera solución, porque una ecuación cúbica tiene al menos una raíz real.
En el caso de tener tre raíces reales distintas la fórmula conduce inevitablemente a raíces cuadradas de números negativos. Tartaglia llamó a este caso irreducible, porque no había método algebraico que lo resloviera. Cardano había resuelto ecuaciones de segundo grado con raíces complejas, pero las despreció.
El primer trabajo que tomó seriamente a los números complejos y logró la necesaria reconciliación fue Rafael Bombelli (1526-1572). Bombelli resolvió el álgebra formal de los números complejos, con el particular objeto de reducir expresiones $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ a la forma $c+d\sqrt{-1}$. Su método le permitió mostrar la realidad de algunas expresiones que resultan de la fórmula de Cardano.

Ejemplo La solución de $x^3 = 15x + 4$ es

$$x = \left(2 + 11\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(2 - 11\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}$$

de acuerdo con la fórmula de Cardano. Por otro lado, por inspección directa podemos observar que $x = 4$ es una solución. Bombelli tuvo la corazonada que las dos partes de x en la fórmula de Cardano eran de la forma $2 + n\sqrt{-1},\ 2 - n\sqrt{-1}$ y encontró elevando al cubo estas expresiones (usando $(\sqrt{-1})^2 = 1$) que verdaderamente

$$\left(2 + 11\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = 2 + \sqrt{-1}$$

$$\left(2 + 11\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = 2 - \sqrt{-1}$$

por esto la fórmula de Cardano también da $x = 4$.
A la importante expresión $\sqrt{-1}$ se le da ahora la designación $i = \sqrt{-1}$. Una convención alternativa es seguida por muchos ingenieros eléctricos, quienes prefieren el símbolo $j = \sqrt{-1}$, puesto que ellos desean reservar el símbolo i para la corriente eléctrica. Sin embargo, en el pasado se sentía que ningún significado podría realmente ser asignado a tales expresiones, que fueron llamados imaginarias. Gradualmente, en especial como resultado del trabajo de Leonard Euler en el siglo XVIII, estas cantidades imaginarias llegaron a desempeñar un papel importante. Por ejemplo, la fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos +\theta + i\ \text{sen}\ \theta$ reveló la existencia de una profunda relación entre los números complejos y las funciones trigonométricas. Se encontró que la regla

$$e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$$

resumía las reglas para la expansión del seno y del coseno de la suma de dos ángulos de una manera sencilla, y este solo resultado indicó que algún significado debería ser atribuido a estos números imaginarios.
Sin embargo, no fue hasta los trabajos de Casper Wessel (circa 1797), Jean Robert Argand (1806), Karl Friederich Gauss (1831), Sir William R. Hamilton (1837) y otros, que se clarificó el significado de los números complejos y se comprendió que no hay nada de imaginario en ellos (aun cuando este término se emplea todavía).

Definición 1. *El conjunto de los números complejos, denotado por $\mathbb{C}$, consiste en todos los números de la forma $a + ib$, donde $a, b \in \mathbb{R}$*

Es importante destacar que existe una correspondencia biunívoca de $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ mediante la asociación

$$a + ib \mapsto (a, b)$$

Por ende se pueden identificar los números complejos con los puntos del plano. La parte real del número complejo $a + ib$ es el número real a, y la parte imaginária es el número real b. De esta manera, al eje X se le llamará eje real y al eje Y se le llamará eje imaginario. Si $z \in \mathbb{C}$, $z = a + ib$ se escribirá

$$Re\ z = a \quad e \quad Im\ z = b$$

Ejemplo Tenemos que

$$z = 3 + 5i \ \Rightarrow\ Re(z) = 3,\ Im(z) = 5$$

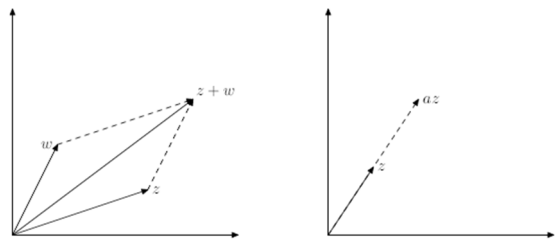
$$z = 8 - 13i \ \Rightarrow\ Re(z) = 8,\ Im(z) = -13$$

Definición 2. *Se define una operación de suma y multiplicación escolar en $\mathbb{C}$ como sigue: Si $z = a + ib$ y $w = c + id$*

$$z + w = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

$$\alpha\ z = \alpha(a + ib) = \alpha a + i\alpha b, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Geométricamente se puede ver



El significado geométrico de la suma y de la multiplicación escalar es el usual en vectores. Es claro también que la suma de complejos cumple las propiedades de conmutatividad, asociatividad, y que también todo número complejo tiene un inverso aditivo, donde el elemento neutro es el origen.
Y también se pueden multiplicar, si definimos i x i = -1 y si queremos que la multiplicación se distribuya con la suma entonces

$$(a + bi) \times (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

Ejemplo Exprese los siguientes números complejos en la forma $a + ib$

a) $(2 + 3i)(4 + i)$

b) $(8 + 6i)^2$

c) $\left(1 + \dfrac{3}{1 + i}\right)^2$

Solución Tenemos que

a) $(2 + 3i)(4 + i) = (2 \cdot 4 - 3 \cdot 1) + (3 \cdot 4 + 2 \cdot 1)i = 5 + 14i$

b) $(8 + 6i)^2 = (8 \cdot 8 - 6 \cdot 6) + (2 \cdot 8 \cdot 6)i = (64 - 36) + 96i = 28 + 96i$

c) $\left(1 + \dfrac{3}{1 + i}\right)^2 = \left(\dfrac{4 + i}{1 + i}\right)^2 = \dfrac{15 + 8i}{2i} = 4 - \dfrac{15}{2}i$

El campo de los números complejos $\mathbb{C}$

A los números complejos a veces se les designa con la letra z en lugar de x+yi.
Al conjunto de los números complejos se le denota por $\mathbb{C}$.
Algunas de las propiedades son

Cerradura de la suma Considere $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ en $\mathbb{C}$, tenemos entonces

$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = z_3 \in \mathbb{C}$$

Conmutatividad de la suma Considere $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ en $\mathbb{C}$, tenemos entonces

$$z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) = (a_2 + a_1) + i(b_2 + b_1) = z_2 + z_1$$

Asociatividad de la suma Considere $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ y $z_3 = a_3 + ib_3$ en $\mathbb{C}$, tenemos entonces

$$\begin{aligned}
[z_1 + z_2] + z_3 &= [a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2] + (a_3 + ib_3) \\
&= [(a_1 + a_2) + a_3] + i[(b_1 + b_2) + b_3] \\
&= [a_1 + (a_2 + a_3)] + i[b_1 + (b_2 + b_3)] \\
&= (a_1 + ib_1) + [(a_2 + a_3) + i[(b_2 + b_3)] \\
&= (a_1 + ib_1) + [(a_2 + ib_2) + (a_3 + ib_3)] \\
&= z_1 + [z_2 + z_3]
\end{aligned}$$

Existencia del neutro aditivo Sea $(x+iy) \in \mathbb{C}$ el neutro aditivo del campo, entonces para $(a_1+ib_1) \in \mathbb{C}$ arbitrario, se tiene que

$$(a_1 + b_1) + (x + iy) = (a_1 + ib_1)$$

por lo tanto, $x, y \in \mathbb{R}$ deben ser el neutro aditivo del campo de los números reales, y $x = y = 0$. Por lo tanto, el neutro aditivo del campo de los números complejos $\mathbb{C}$ es (0+0i)

Existencias del inverso aditivo Sea $(x + iy) \in \mathbb{C}$ el inverso aditivo del campo, entonces para $(a_1 + ib_1) \in \mathbb{C}$ arbitrario, se tiene que

$$(a_1 + b_1) + (x + iy) = (0 + i0)$$

entonces de la definición de igualdad de números complejos, se tiene

$$a_1 + x = 0 \quad y \quad b_1 + y = 0$$

por lo tanto, $x, y \in \mathbb{R}$ deben ser el inversos aditivo del campo de los números reales, y $x = -a_1$, $y = -b_1$. Por lo tanto, el inverso aditivo del campo de los números complejos de a_1+ib_1 es $(-a_1-b_1i)$

Cerradura de la multiplicación Considere $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ en $\mathbb{C}$, tenemos entonces

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) = z_3 \in \mathbb{C}$$

Conmutatividad de la multiplicación Considere $z_1 = a_1+ib_1$ y $z_2 = a_2+ib_2$ en $\mathbb{C}$, tenemos entonces

$$\begin{aligned}
z_1z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\
&= (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1) \\
&= (a_2a_1 - b_2b_1) + i(a_2b_1 + a_1b_2) \\
&= (a_2a_1 - b_2b_1) + i(b_1a_2 + b_2a_1) \\
&= (a_2 + ib_2)(a_1 + ib_1) \\
&= z_2z_1
\end{aligned}$$

Asociatividad de la multiplicación Considere $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ y $z_3 = a_3 + ib_3$ en $\mathbb{C}$, tenemos entonces

$$\begin{aligned}[z_1z_2]z_3 &= [(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)](a_3+ib_3)\\ &= [(a_1a_2-b_1b_2)a_3-(a_1b_2+a_2b_1)b_3]+i[(a_1a_2-b_1b_2)b_3+(a_1b_2+a_2b_1)a_3]\\ &= [a_1(a_2a_3-b_1b_2a_3-a_1b_2b_3-a_2b_1b_3)]+i[a_1a_2b_3-b_1b_2b_3+a_1b_2a_3+a_2b_1a_3]\end{aligned}$$

por otro lado

$$\begin{aligned}z_1[z_2z_3] &= (a_1+ib_1)[(a_2+ib_2)(a_3+ib_3)]\\ &= [a_1(a_2a_3-b_2b_3)-b_1(a_2b_3+a_3b_2)]+i[b_1(a_2a_3-b_2b_3)+a_1(a_2b_3-a_3b_2)]\\ &= [a_1a_2a_3-a_1b_2b_3-b_1a_2b_3-b_1a_3b_2]+i[b_1a_2a_3-b_1b_2b_3+a_1a_2b_3+a_1a_3b_2]\end{aligned}$$

Comparando los resultados, es evidente la igualdad de los dos procedimientos

Existencia del neutro multiplicativo Sea $(x+iy) \in \mathbb{C}$ el neutro multiplicativo del campo, entonces para $(a_1+ib_1) \in \mathbb{C}$ arbitrario, se tiene que

$$(a_1+b_1)(x+iy) = (a_1x-b_1y)+i(a_1y+xb_1)$$

entonces de la definición de igualdad de números complejos, se tiene que

$$a_1x-b_1y = a_1 \quad y \quad a_1y+xb_1 = b_1$$

por lo tanto, resolviendo el sistema de ecuaciones en las variables $x, r \in \mathbb{R}$, se tiene

$$x = 1 \quad y \quad y = 0$$

por lo tanto el neutro multiplicativo del campo del campo de los números complejos $\mathbb{C}$ es (1+0i)

Existencia del inverso multiplicativo Para hallar el inverso multiplicativo de $a+ib$ se procede

$$(a+ib)(x+iy) = 1 \;\Rightarrow\; (ax-by)+(ay+bx)i = 1$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} ax-by = 1 & (1)\\ ay+bx = 0 & (2)\end{array}$$

Multiplicando (1) por a y (2) por b y sumando

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2x-aby = a\\ aby+b^2x = 0\\ ---------\\ a^2x+b^2x = a\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\; x = \frac{a}{a^2+b^2}$$

Multiplicando (1) por b y (2) por a y

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} axb-b^2y = b\\ a^2y+bax = 0\\ ---------\\ -b^2y-a^2y = b\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; y = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

por lo tanto el inverso de $a+ib$ es

$$\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

Propiedad distributiva Considere, por una lado

$$\begin{aligned}
[(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)](a_3+ib_3) &= [(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)](a_3+ib_3) \\
&= [(a_1+a_2)a_3-(b_1+b_2)b_3]+i[(a_1+a_2)b_3+(b_1+b_2)a_3] \\
&= (a_1a_3+a_2a_3-b_1b_3-b_2b_3)+i(a_1b_3+a_2b_3+b_1a_3+b_2a_3)
\end{aligned}$$

y por el otro lado

$$\begin{aligned}
(a_1+ib_1)(a_3+ib_3)+(a_2+ib_2)(a_3+ib_3) &= (a_1a_3-b_1b_3)+i(a_1b_3+b_1a_3)+(a_2a_3-b_2b_3)+i(a_2b_3+b_2a_3) \\
&= (a_1a_3-b_1b_3+a_2a_3-b_2b_3)+i[a_1b_3+b_1a_3+a_2b_3+b_2a_3]
\end{aligned}$$

Es fácil verificar que los dos resultados coinciden, por lo tanto

$$[(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)](a_3+ib_3) = (a_1+ib_1)(a_3+ib_3)+(a_2+ib_2)(a_3+ib_3)$$

De manera semejante, considere por un lado

$$\begin{aligned}
(a_1+ib_1)[(a_2+ib_2)+(a_3+ib_3)] &= (a_1+ib_1)[(a_2+a_3)+i(b_2+b_3)] \\
&= [a_1(a_2+a_3)-b_1(b_2+b_3)]+i[a_1(b_2+b_3)+b_1(a_2+a_3)] \\
&= (a_1a_2+a_1a_3-b_1b_2-b_1b_3)+i(a_1b_2+a_1b_3+b_1a_2+b_1a_3)
\end{aligned}$$

y por el otro

$$\begin{aligned}
(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)+(a_1+ib_1)(a_3+ib_3) &= [(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+b_1a_2)]+[(a_1a_3-b_1b_3)+i(a_1b_3+b_1a_3)] \\
&= (a_1a_2-b_1b_2+a_1a_3-b_1b_3)+i(a_1b_2+b_1a_2+a_1b_3+b_1a_3)
\end{aligned}$$

Es fácil verificar que los dos resultados coinciden, por lo tanto

$$(a_1+ib_1)[(a_2+ib_2)+(a_3+ib_3)] = (a_1+ib_1)(a_2+ib_2)+(a_1+ib_1)(a_3+ib_3)$$

Ejemplo Use únicamente los axiomas de campo. Para dar una demostración formal de las siguientes igualdades:

a) $\dfrac{1}{z_1z_2} = \dfrac{1}{z_1}\dfrac{1}{z_2}$

b) $\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{z_1+z_2}{z_1z_2}$

Solución Tenemos que

a) $(z_1z_2)(z_1z_2)^{-1} = 1$, multiplicando por z_1^{-1} en ambos lados se obtiene

$$z_1^{-1}[(z_1z_2)(z_1z_2)^{-1}] = z_1^{-1}(1)$$

asociando términos se tiene que

$$(z_1^{-1}z_1)z_2(z_1z_2)^{-1} = z_1^{-1}$$

Aplicando el inverso y el neutro multiplicativo

$$(1)z_2(z_1z_2)^{-1} = z_1^{-1}$$

y multiplicando por z_2^{-1} en ambos lados

$$z_2^{-1}z_2(z_1z_2)^{-1} = z_2^{-1}z_1^{-1}$$

Usando el inverso y el neutro multiplicativo, se tiene que

$$(1)(z_1z_2)^{-1} = z_2^{-1}z_1^{-1}$$

por la conmutatividad del lado derecho

$$(1)(z_1z_2)^{-1} = z_1^{-1}z_2^{-1}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{z_1z_2} = \frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}$$

b) Tenemos que

$$z_1 + z_2 = z_1 + z_2$$

Multiplicando por $1 = \dfrac{z_1z_2}{z_1z_2}$ del lado derecho, se tiene que

$$z_1 + z_2 = (z_1 + z_2)\left(\frac{z_1z_2}{z_1z_2}\right)$$

Multiplicando por z_2^{-1} ambos lados

$$(z_1 + z_2)z_2^{-1} = (z_1 + z_2)\left(\frac{z_1z_2}{z_1z_2}\right)z_2^{-1}$$

distribuyendo en el lado izquierdo y asociando en el lado derecho

$$z_1z_2^{-1} + z_2z_2^{-1} = (z_1 + z_2)\left(\frac{z_1}{z_1z_2}\right)z_2z_2^{-1}$$

Tomando el inverso multiplicativo

$$z_1z_2^{-1} + 1 = (z_1 + z_2)\left(\frac{z_1}{z_1z_2}\right)(1)$$

Por la conmutatividad en el lado derecho

$$z_1 z_2^{-1} + 1 = z_1(z_1 + z_2)\left(\frac{1}{z_1 z_2}\right)(1)$$

Multiplicando por z_1^{-1} de ambos lados, se obtiene que

$$z_1^{-1}(z_1 z_2^{-1} + 1) = z_1^{-1} z_1 (z_1 + z_2)\left(\frac{1}{z_1 z_2}\right)$$

distribuyendo en el lado izquierdo

$$z_1^{-1} z_1 z_2^{-1} + z_1^{-1} = (z_1^{-1} z_1)(z_1 + z_2)\left(\frac{1}{z_1 z_2}\right)$$

nuevamente usando el inverso multiplicativo

$$z_2^{-1} + z_1^{-1} = (z_1 + z_2)\left(\frac{1}{z_1 z_2}\right)$$

obtenemos

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 + z_2}{z_1 z_2}$$