Definición 1. *Sea A cualquier conjunto. La función identidad en A, denotada por Id_A, esta definida $Id_A : A \to A$ donde para cada $a \in A$ $Id_a = a$*

Teorema 1. *Sean A y B conjuntos cualesquiera. Entonces se tiene que para todo $f : A \to B$*

$$Id_B \circ f = f \quad y \quad f \circ Id_A = f$$

Demostración. Tenemos que

$$(Id_B \circ f)(a) = Id_B(f(a)) = Id_B(b) = b \quad (si\ f(a) = b)$$

$$(f \circ Id_A)(a) = f(Id_A(a)) = f(a) = b \quad (si\ f(a) = b)$$

Se tiene entonces que $Id_B \circ f : A \to B$ y también $f \circ Id_A : A \to B$ por lo que ambas funciones tienen el mismo dominio, el mismo codominio y la misma regla de correspondencia que f. Por tanto $Id_B \circ f = f$ y $f \circ Id_A = f$ □

Definición 2. *Sea $f : X \to Y$ una función se tiene entonces*

1. *Una función $g : Y \to X$ se llama inverso izquierdo de f si $g \circ f(x) = Id_X$*
2. *Una función $g : Y \to X$ se llama inverso derecho de f si $f \circ g(x) = Id_Y$*

Teorema 2. *Si $f : A \to B$ es una función inyectiva, existe la función $g : B \to A$ tal que*

$$g \circ f(x) = I_A$$

Demostración. Sea f inyectiva. Para cada $y \inf(A)$ existe un único $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Sea $a \in A$ un elemento fijo de A.
Definimos la función $g : B \to A$ así:

$$g(y) = \begin{cases} x & si \quad y \in f(A) \quad con \quad f(x) = y \\ a & si \quad \quad \quad y \notin f(A) \end{cases}$$

esta función cumple $g \circ f(x) = I_A$ □

Teorema 3. *Si $f : A \to B$ es una función suprayectiva, existe la función $h : B \to A$ tal que*

$$f \circ h(y) = I_B$$

Demostración. Sea f suprayectiva. Para cada $y \in B$ escogemos $x_y \in f^{-1}(y)$
Definimos la función $h : B \to A$ así:

$$h(y) = x_y$$

esta función cumple $f \circ h(y) = I_B$ □

La función g se llama inversa izquierda de f y la función h es la inversa derecha de f.
Si una función $f : A \to B$ tiene las dos inversas entonces ambas coinciden:

$$g = g \circ I_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = I_A \circ h = h$$

g se llama **inversa** de f

Inversa de una función

Definición 3. *Cuando una función $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene la propiedad de que la aplicación de A en $f(A)$ es biyectiva, entonces puede definirse la denominada función inversa de f respecto de la composición designada por f^{-1}, y definida en $f(A)$ mediante $f^{-1}(y) = x \quad \Rightarrow \quad f(x) = y$ tal que se cumplen las igualdades*

$$f^{-1} \circ f = I_A \qquad f \circ f^{-1} = I_{f(A)}$$

Proposición 1. *Sea $f : A \to B$*

a) Si f^{-1} es una función y $f^{-1} : B \to A$, entonces $f \circ f^{-1} = id_B$ y $f^{-1} \circ f = id_A$.

b) f es invertible si y sólo si f^{-1} es una función y $f^{-1} : B \to A$

c) Si f es invertible, el inverso derecho e izquierdo de f es f^{-1}

Demostración.

1. Por definición de inversa de una relación, $f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$. Si f^{-1} es función, entonces $f^{-1} : B \to A$ y para todo $b \in B$, existe un unico $a \in A$ tal que $f^{-1}(b) = a$. Además, $f^{-1}(b) = a$ si y sólo si $f(a) = b$. Por definición de composición, $f \circ f^{-1} : B \to B$ y $f^{-1} \circ f : A \to A$, por lo que el dominio y codominio de $f \circ f^{-1}$ y de id_B son el mismo, y el dominio y codominio de $f^{-1} \circ f$ y de id_A son el mismo. Ahora, sea $b \in B$, entonces $(f \circ f^{-1})(b) = (f \circ f^{-1})(b)$. Si $f^{-1}(b) = a$, entonces $f(a) = b$, por lo que $f(f^{-1}(b)) = b$. Por lo tanto, $f \circ f^{-1} = id_B$.
   Sea $a \in A$, entonces $(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a))$. Si $f(a) = b$, entonces $f^{-1}(b) = a$, por lo que $f(f^{-1}((a)) = a$. Por lo tanto, $f^{-1} \circ f = id_A$.

2. Supongamos que f es invertible, entonces f tiene inverso izquierdo e inverso derecho. Como f es función, en particular es relación y $f^{-1} = (y, x) \mid (x, y) \in f$. Queremos ver que f^{-1} es función de B en A, es decir que $dom\ (f^{-1}) = B$ y que si $(y, x_1) \in f^{-1}$ y $(y, x_2) \in f^{-1}$, entonces $x_1 = x_2$.
   Por definición de relación inversa y como $f : A \to B$, sabemos que $dom\ (f^{-1} \subseteq B$. Sea $b \in B$. Como f tiene inverso izquierdo, tenemos que f es sobre. De aquí que hay $a \in A$ tal que $f(a) = b$, pero entonces $(b, a)?f^{-1}$ y $b \in dom\ (f^{-1})$.
   Por lo tanto, $dom(f^{-1}) = B$. Ahora, supongamos que $(y, x_1) \in f^{-1}$ y $(y, x_2) \in f^{-1}$. Entonces $(x_1, y) \in f$ y $(x_2, y) \in f$. Como f sí es función, esto quiere decir que $f(x_1) = y$ y $f(x_2) = y$. Como f tiene inverso derecho, tenemos que f es inyectiva. Como $f(x_1) = f(x_2)$, $x_1 = x_2$. Por lo tanto, f^{-1} es función. Para demostrar el recíproco, supongamos que f^{-1} es función. Por el inciso anterior, entonces $f \circ f^{-1} = id_B$ y $f^{-1} \circ f = id_A$. Así, f^{-1} es inverso derecho e inverso izquierdo de f y f es invertible.

3. Si f es invertible, entonces por el inciso anterior, f^{-1} es función y $f^{-1} : B \to A$. Así, por el inciso (i), $f \circ f^{-1} = id_B$ y $f^{-1} \circ f = id_A$. Por lo tanto, f^{-1} es inverso derecho e izquierdo de f.

□

Corolario 1. *Una función $f : A \to B$ es invertible si y sólo si es biyectiva*

Demostración. Si $f : A \to B$ es invertible, entonces f^{-1} es inverso derecho e izquierdo de f. Por tanto, f es inyectiva y sobre, por lo que f es biyectiva.
Para el recíproco, supongamos que f es biyectiva. Por tsnto f tiene inverso derecho e inverso izquierdo, además el inverso derecho e izquierdo de f es el mismo. Por lo tanto, f es invertible. □

Ejemplo Para la función f definida en cada caso, encontrar la inversa f^{-1} si existe y, si es así, especificar su dominio.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-5}$ tenemos que f es inyectiva pues

$f(x_1 \neq f(x_2) \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{x_1-5} \neq \dfrac{1}{x_2-5} \;\Rightarrow\; x_1 - 5 \neq x_2 - 5 \;\Rightarrow\; x_1 \neq x_2$

f es suprayectiva pues si $b \in$ Rango de f tenemos que $f(a) = b$ para alguna $a \in$ Dom$f$

$\dfrac{1}{a-5} = b \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{b} + 5 = a \quad \therefore\; f(a) = \dfrac{1}{\dfrac{1}{b}+5-5} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{b}} = b$

Al ser inyectiva y sobre, tenemos que existe f^{-1} y para hallarla tenemos que

$y = f(x) \;\Rightarrow\; y = \dfrac{1}{x-5} \;\Rightarrow\; x = \dfrac{1}{y} + 5$

$\therefore\; f^{-1}(y) = \dfrac{1}{y} + 5$ y $\mathrm{Dom} f^{-1} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

Ejemplo Dada la función $f(x) = \sqrt[5]{2 - \sqrt[3]{x}}$, hallar su inversa en caso de que exista.

f es inyectiva pues $f(x_2) \neq f(x_1) \;\Rightarrow\; \sqrt[5]{2-\sqrt[3]{x_2}} \neq \sqrt[5]{2-\sqrt[3]{x_1}} \;\Rightarrow\; 2 - \sqrt[3]{x_2} \neq 2 - \sqrt[3]{x_1} \;\Rightarrow$

$-\sqrt[3]{x_2} \neq -\sqrt[3]{x_1} \;\Rightarrow\; x_1 \neq x_2$

Para ver si f es sobre tenemos que

$y = f(x) \;\Rightarrow\; \sqrt[5]{2-\sqrt[3]{x}} = y \;\Rightarrow\; 2 - \sqrt[3]{x} = y^5 \;\Rightarrow\; 2 - y^5 = \sqrt[3]{x} \;\Rightarrow\; (2-y^5)^3 = x$

$\therefore\; f^{-1}(y) = (2-y^5)^3$ y $\mathrm{Dom} f^{-1}$ es $x \in \mathbb{R}$

Ejemplo Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = (-1)^n \left[\dfrac{n}{2}\right]$. Demuestre que f tiene una función inversa.

Demostración. Ya comprobamos que f es inyectiva, ahora mostraremos que f es suprayectiva y por tanto existe una función inversa
Tenemos que f es suprayectiva si

$$\forall\ z \in \mathbb{Z}\ \ \exists\ n \in \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ f(n) = z$$

y definimos a $n \in \mathbb{N}$ de la siguiente manera

$$n = \begin{cases} 2z & si \quad z > 0 \\ 1 - 2z & si \quad z \leq 0 \end{cases}$$

de tal manera que para los enteros positivos $\mathbb{Z}$ se tiene

$$f(n) = f(2z) = (-1)^{2z}\left[\frac{2z}{2}\right] = \left[\frac{2z}{2}\right] = [z] = z$$

y para los enteros negativos

$$f(n) = f(1-2z) = (-1)^{1-2z}\left[\frac{1-2z}{2}\right] = (-1)\left[\frac{1}{2} - z\right] = (-1)[-z] = z$$

por lo tanto

$$\forall\ z \in \mathbb{Z}\ \ \exists\ n \in \mathbb{N},\quad n = \begin{cases} 2z & si \quad z > 0 \\ 1-2z & si \quad z \leq 0 \end{cases}\ \ tal\ \ que\ \ f(n) = z$$

de esta manera f es suprayectiva y como también probamos que es inyectiva, entonces esta función tiene una función inversa □