Bolas abiertas

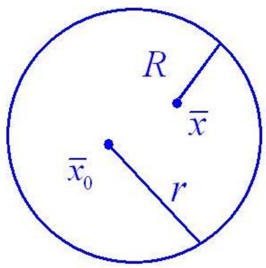
Sea d una métrica y $\bar{x}_0$ un punto en $\mathbb{R}^n$

(1) La bola abierta con centro en $\bar{x}_0$ y radio $r > 0$, es el conjunto:
$B(\bar{x}_0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < r\}$

Conjuntos Abiertos

Definición. Un conjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es abierto si para cada $\bar{x} \in V$ existe una bola abierta $B(\bar{x}, r)$ contenida en V. Es decir si para cada $\bar{x} \in V$ existe $r > 0$ tal que $B(\bar{x}, r) \subset V$.

Ejemplo: Mostraremos que una bola abierta es un conjunto abierto.



Sea entonces $y \in B(\bar{x}, r)$. Por definición se tiene que $\|\bar{y} - \bar{x}\| < R$

$$\therefore \quad \|\bar{y} - \bar{x}_0\| = \|\bar{y} - \bar{x} + \bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \|\bar{y} - \bar{x}\| + \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < R + \|\bar{x} - \bar{x}_0\| = r$$

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $r > 0$. Vamos a ver que $B(x_0, r)$ es un conjunto abierto. Sea $x \in B(x_0, r)$ proponemos $R = r - \|x - x_0\| < r$, por lo tanto $R > 0$ sea $y \in B(x, R)$ se tiene entonces que $\|y - x\| < R$ por lo tanto

$$\|y - x_0\| = \|y - x + x - x_0\| \leq \|y - x\| + \|x - x_0\| \leq R + \|x - x_0\| = r$$

por lo tanto $y \in B(x_0, r)$ $\square$

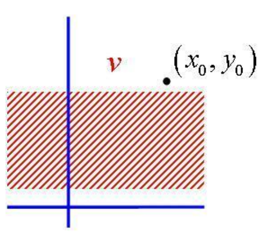
Ejemplo: El espacio $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, pues dado cualquier $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, toda bola abierta $B(\bar{x}, r)$ esta contenida en $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo: Mostraremos que el $\emptyset$ es abierto.

Demostración. Suponemos que el $\emptyset$ no es abierto $\therefore \exists\ x \in \emptyset$ para el cual no es posible hallar una bola abierta $B(\bar{x}, r)$ contenida en $\emptyset$. Pero esto no es posible ya que el $\emptyset$ no tiene elementos.

Entonces suponer que el $\emptyset$ no es abierto **!** $\therefore$ $\emptyset$ es abierto. $\square$

Ejemplo: Mostraremos que el semiplano superior $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ es abierto respecto de la norma $\| \ \|_1$.



Sea $\bar{v}_0 = (x_0, y_0) \in v \qquad \therefore y_0 > 0$
debemos mostrar que hay una bola abierta
$B_1(\bar{v}_0, v)$ contenida en el semiplano superior

Demostración. Sea $\overline{v_0} = (x_0, y_0) \in V$ se tiene entonces que $y_0 > 0$. Elegimos $r = y_0$ consideremos la bola abierta $B_1(\overline{v_0}, y_0)$ sea $\overline{v} = (x, y) \in B_1(\overline{v_0}, y_0)$ se tiene entonces que $\|\overline{v} - \overline{v_0}\| < y_0$ es decir $|x - x_0| + |y - y_0| < y_0$ y queremos ver que $y > 0$ procederemos por contradicción
Primero supondremos que y=0 se tiene entonces que

$$|x - x_0| + |y - y_0| = |x - x_0| + |y_0| < y_0$$

es una contradicción
Ahora procederemos a suponer que $y < 0$

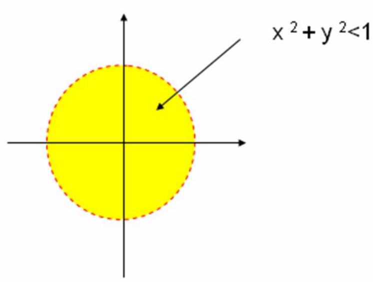
$$|x - x_0| + |y - y_0| = |x - x_0| + (-y) + y_0 < y_0$$

es también una contradicción. Por lo tanto $y > 0$ □

Definición: Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^n$

(1) Un elemento $\bar{a} \in A$ se dice que es un punto interior de A, si existe una bola abierta con centro en $\bar{a}$ contenida en A es decir si $\exists\ r > 0$ tal que $B(\bar{a}, r) \subset A$.

Ejemplo: Mostraremos que todo punto del disco $x^2 + y^2 < 1$ es un punto interior.

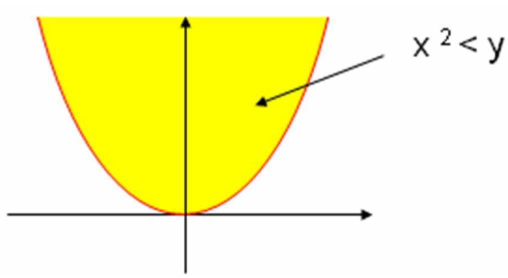


Demostración. Sea $p = (a, b)$ tal que $a^2 + y^2 < 1$ y sea $r = 1 - \|p\| = 1 - \sqrt{a^2 + b^2}$. Sea $p_1 \in B(p, r)$ se tiene entonces que

$$d(p_1, 0) = \|p_1 - 0\| = \|p_1\| = \|p_1 - p + p\| \leq \|p_1 - p\| + \|p\| < r + \|p\| = 1 - \|p\| + \|p\| = 1$$

$\therefore \|p_1\| < 1 \therefore p_1$ es un punto interior del disco unitario y como p es arbitrario, entonces todo punto del disco unitario es interior □

Ejemplo: Mostraremos que el conjunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > x^2\}$ es un conjunto abierto.



Demostración. Si (a, b) es un punto del conjunto V, entonces $b > a^2$ sea $\gamma = b - a^2$ y consideremos (x, y) tal que $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \epsilon$ lo que implica que

$$|x - a| < \epsilon \qquad y \qquad |y - b| < \epsilon$$

usando que $a^2 = x^2 - 2(x-a)a - (x-a)^2$ tenemos que

$$y > b - \epsilon = a^2 + \gamma - \epsilon > x^2 - 2(\epsilon)a - \epsilon^2 + \gamma - \epsilon \quad \underbrace{>}_{para \quad \epsilon \quad adecuado} \quad x^2$$

□

Ejemplo: Mostraremos que en $\mathbb{R}$ un intervalo abierto es un conjunto abierto.

Demostración. Sea $x \in (a, b)$ y consideremos $L = min\{x - a, b - x\}$ entonces

$$B(x, L) = (x - L, x + L) \subset (a, b)$$

esto es x es un punto interior de (a,b) y como x es arbitrario todo punto de (a,b) es interior $\therefore$ (a,b) es un conjunto abierto de $\mathbb{R}$ □

Conjuntos Cerrados

Definición. Un conjunto $F \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es cerrado si su complemento $F^c = \mathbb{R}^n - F$ es un conjunto abierto.

(2) La bola cerrada con centro $\bar{x}_0$ y radio $r \geq 0$ es el conjunto:
$\bar{B}(\bar{x}_0, r) = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n | \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq r\}$

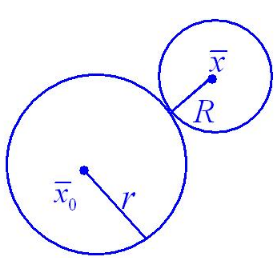
Proposición: Toda bola cerrada en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado.

Demostración: Sea $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y $r \geq 0$. Probaremos que la bola cerrada $\bar{B}(x_0, r)$ es un conjunto cerrado, es decir, que su complemento $\mathbb{R}^n - \bar{B}(x_0, r)$ es un conjunto abierto.

Sea pues $\bar{x} \in \mathbb{R}^n - \bar{B}(x_0, r)$. Mostraremos que existe una bola abierta $B(\bar{x}, R)$ contenida en $\mathbb{R}^n - \bar{B}(x_0, r)$. Como $\bar{x}$ no está en la bola cerrada $\bar{B}(x_0, r)$, se tiene entonces que $\|\bar{x} - \bar{x}_0\| > r$.

Definamos $R = \|\bar{x} - \bar{x}_0\| - r > 0$, esto equivale a $r = \|\bar{x} - \bar{x}_0\| - R$.

Veamos que $B(\bar{x}, R) \subset \mathbb{R}^n - \bar{B}(x_0, r)$



En efecto, sea $y \in B(x, R)$ se tiene entonces $\|\bar{y} - \bar{x}\| < R$ por lo tanto

$$\begin{aligned}\|\bar{x} - \bar{x}_0\| &= \|\bar{x} - \bar{y} + \bar{y} - \bar{x}_0\| \\ &\leq \|\bar{x} - \bar{y}\| + \|\bar{y} - \bar{x}_0\| \\ &< R + \|\bar{y} - \bar{x}_0\|\end{aligned}$$

luego $\|\bar{x}-\bar{x}_0\| < R + \|\bar{y}-\bar{x}_0\| \therefore \|\bar{x}-\bar{x}_0\| - R < \|\bar{y}-\bar{x}_0\|$, es decir, $r < \|\bar{y}-\bar{x}_0\|$.

Esto significa que $\bar{y} \notin \bar{B}(\bar{x}_0, r)$, es decir, $\bar{y} \in \mathbb{R}^n - \bar{B}(\bar{x}_0, R)$.