Sucesiones parte 8

Sucesiones de Cauchy

Definición 1. *Se dice que una sucesión de números reales es de Cauchy si satisface*

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ n_0 \in\ \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ si\ \ n, m\ > n_0\ \ entonces\ \ |a_m - a_n| < \epsilon$$

Ejemplo Usando la definición, muestre que la sucesión

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}$$

es una sucesión de Cauchy

Solución Queremos mostrar que

$$\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists\ n_0 \in\ \mathbb{N}\ \ tal\ \ que\ \ si\ \ n, m\ > n_0\ \ entonces\ \ \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| < \epsilon$$

En este caso tenemos que

$$m < n\ \Rightarrow\ \frac{1}{n} < \frac{1}{m}\ \Rightarrow\ 0 < \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$$

por lo tanto

$$\left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$$

de manera que

$$\frac{1}{m} < \epsilon\ \Rightarrow\ \frac{1}{\epsilon} < m$$

y Por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon}$ por lo tanto

$$n > m \geq n_0\ \Rightarrow\ n > m > \frac{1}{\epsilon}\ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \epsilon$$

por lo tanto $\{a_n\} = \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ es una sucesión de Cauchy

Ejemplo Usando la definición, muestre que la sucesión

$$\left\{\frac{2n+1}{n}\right\}$$

es una sucesión de Cauchy

Solución Queremos mostrar que

$$\forall\ \epsilon > 0 \ \ \exists\ n_0 \in\ \mathbb{N} \ \ tal \ \ que \ \ si \ \ n, m \ > n_0 \ \ entonces \ \ \left|\frac{2m+1}{m} - \frac{2n+1}{n}\right| < \epsilon$$

En este caso tenemos que

$$m < n \ \Rightarrow\ \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \ \Rightarrow\ 0 < \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \ \Rightarrow\ \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$$

de manera que

$$\left|\frac{2m+1}{m} - \frac{2n+1}{n}\right| = \left|\frac{2mn+n-2mn-m}{mn}\right| = \left|\frac{n-m}{mn}\right| = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$$

por lo tanto

$$\left|\frac{2m+1}{m} - \frac{2n+1}{n}\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m}$$

asi que

$$\frac{1}{m} < \epsilon \ \ \frac{1}{\epsilon} < m$$

y Por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon}$ por lo tanto

$$n > m \geq n_0 \ \Rightarrow\ n > m > \frac{1}{\epsilon} \ \Rightarrow\ \left|\frac{2m+1}{m} - \frac{2n+1}{n}\right| = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} < \epsilon$$

por lo tanto $\{a_n\} = \left\{\dfrac{2n+1}{n}\right\}$ es una sucesión de Cauchy

Ejemplo Usando la definición, muestre que la sucesión

$$\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$$

es una sucesión de Cauchy

Solución Queremos mostrar que

$$\forall\ \epsilon > 0 \ \ \exists\ n_0 \in\ \mathbb{N} \ \ tal \ \ que \ \ si \ \ n, m \ > n_0 \ \ entonces \ \ \left|\frac{m}{m^2+1} - \frac{n}{n^2+1}\right| < \epsilon$$

En este caso tenemos que

$$\left|\frac{m}{m^2+1}-\frac{n}{n^2+1}\right| = \left|\frac{mn^2+m-nm^2-n}{(m^2+1)(n^2+1)}\right| = \left|\frac{mn(n-m)-(n-m)}{(m^2+1)(n^2+1)}\right| = \left|\frac{(n-m)(mn-1)}{(m^2+1)(n^2+1)}\right| <$$

$$\frac{n^2m}{(m^2+1)(n^2+1)} < \frac{n^2m}{(m^2)(n^2)} = \frac{1}{m}$$

por lo tanto

$$\left|\frac{m}{m^2+1}-\frac{n}{n^2+1}\right| < \frac{1}{m}$$

asi que

$$\frac{1}{m} < \epsilon \;\Rightarrow\; \frac{1}{\epsilon} < m$$

y Por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{1}{\epsilon}$ por lo tanto

$$n > m \geq n_0 \;\Rightarrow\; n > m > \frac{1}{\epsilon} \;\Rightarrow\; \left|\frac{m}{m^2+1}-\frac{n}{n^2+1}\right| = \left|\frac{(n-m)(mn-1)}{(m^2+1)(n^2+1)}\right| < \frac{1}{m} < \epsilon$$

por lo tanto $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n}{n^2+1}\right\}$ es una sucesión de Cauchy

Ejemplo Usando la definición, muestre que la sucesión

$$\left\{\frac{n-2}{3n+4}\right\}$$

es una sucesión de Cauchy

Solución Queremos mostrar que

$$\forall\ \epsilon > 0 \ \ \exists\, n_0 \in \ \mathbb{N} \ \ tal \ \ que \ \ si \ \ n, m \ > n_0 \ \ entonces \ \ \left|\frac{m-2}{3m+4}-\frac{n-2}{3n+4}\right| < \epsilon$$

En este caso tenemos que

$$\left|\frac{m-2}{3m+4}-\frac{n-2}{3n+4}\right| = \left|\frac{(3n+4)(m-2)-(n-2)(3m+4)}{(3m+4)(3n+4)}\right| = \left|\frac{3nm-6n+4m-8-(3nm+4n-6m-8)}{(3m+4)(3n+4)}\right| =$$

$$\left|\frac{(-6n+4m-4n+6m)}{(3m+4)(3n+4)}\right| = \left|\frac{(-10n+10m)}{(3m+4)(3n+4)}\right| < \left|10\frac{m-n}{(m)(n)}\right| = 10\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right) < \frac{10}{n}$$

por lo tanto

$$\left|\frac{m-2}{3m+4}-\frac{n-2}{3n+4}\right| < \frac{10}{m}$$

asi que

$$\frac{10}{m} < \epsilon \;\Rightarrow\; \frac{10}{\epsilon} < m$$

y Por la propiedad arquimediana existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \dfrac{10}{\epsilon}$ por lo tanto

$$n > m \geq n_0 \;\Rightarrow\; n > m > \frac{10}{\epsilon} \;\Rightarrow\; \left|\frac{m-2}{3m+4} - \frac{n-2}{3n+4}\right| = \left|\frac{(-6n+4m-4n+6m)}{(3m+4)(3n+4)}\right| =$$

$$\left|\frac{(-10n+10m)}{(3m+4)(3n+4)}\right| < \left|10\frac{m-n}{(m)(n)}\right| = 10\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) < \frac{10}{n} < \epsilon$$

por lo tanto $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n-2}{3n+4}\right\}$ es una sucesión de Cauchy

Ejemplo Usando la definición, muestre que la sucesión

$$\left\{\frac{n^2+1}{n}\right\}$$

no es una sucesión de Cauchy

Solución Queremos mostrar que para $\epsilon = \dfrac{1}{2}$

$$\forall\, \epsilon > 0 \;\; \nexists\, n_0 \in \;\mathbb{N}\;\; tal \;\; que \;\; si \;\; n, m \;> n_0 \;\; entonces \;\; \left|\frac{m^2+1}{m} - \frac{n^2+1}{n}\right| < \frac{1}{2}$$

En este caso tenemos que

$$\left|\frac{m^2+1}{m} - \frac{n^2+1}{n}\right| = \left|\frac{m^2n + n - n^2m - mm}{mn}\right| = \left|\frac{mn(n-m) + n - m}{mn}\right| =$$

$$\left|m - n + \frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right| \underbrace{=}_{\substack{Si \quad n\geq 2 \\ m=n+k, \quad k\geq 1}} \left|k + \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n}\right| \underbrace{=}_{k+\frac{1}{n+k} > \frac{1}{n}} k + \frac{1}{n+k} - \frac{1}{n} = k - \frac{k}{n(n+k)}$$

$$\underbrace{>}_{\substack{n^2+nk>nk \;\Rightarrow\; n(n+k)>nk \\ \Rightarrow\; \frac{1}{n} > \frac{k}{n(n+k)} \;\Rightarrow\; \frac{-k}{n(n+k)} > -\frac{1}{n}}} k - \frac{1}{n} \underbrace{\geq}_{k\geq 1, \quad n\geq 2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}\geq\frac{1}{n}} 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

por lo tanto

$$\left|\frac{m^2+1}{m} - \frac{n^2+1}{n}\right| > \frac{1}{2}$$

por lo tanto no existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0 \;\Rightarrow\; \left|\frac{m^2+1}{m} - \frac{n^2+1}{n}\right| < \frac{1}{2}$$

por lo tanto $\{a_n\} = \left\{\dfrac{n^2+1}{n}\right\}$ no es una sucesión de Cauchy

Ejemplo Probar que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Solución Sea $x\in\mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{n+1}<x<\dfrac{1}{n}$ por lo tanto si $n\to\infty$ entonces $x\to 0$ por lo tanto

$$1+\frac{1}{n+1}<1+x<1+\frac{1}{n}\ \Rightarrow\ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<(1+x)^{\frac{1}{x}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}<\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

por lo tanto

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

y como

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Ejercicio Usar lo anterior calcular

$$\lim_{n\to\infty}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)\quad a>0\quad a\neq 1$$

Solución para esto hacemos

$$b_n=a^{\frac{1}{n}}-1\Rightarrow b_n+1=a^{\frac{1}{n}}\Rightarrow\log(b_n+1)=\frac{1}{n}\log(a)\Rightarrow n=\frac{\log(a)}{\log(b_n+1)}$$

$\therefore$

$$\lim_{n\to\infty}n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(a)}{\log(b_n+1)}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(a)}{\frac{1}{b_n}\log(b_n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(a)}{\log(b_n+1)^{\frac{1}{b_n}}}=$$

$$=\frac{\log(a)}{\lim_{n\to\infty}\log(b_n+1)^{\frac{1}{b_n}}}=\frac{\log(a)}{\log\left(\lim_{n\to\infty}(b_n+1)^{\frac{1}{b_n}}\right)}=\frac{\log(a)}{\log(e)}=\log(a)$$