Clase 12

20 de marzo de 2012

Los vectores $T(s)$ y $N(s)$ determinan un plano llamado plano osculador de f en s, un vector ortogonal al plano osculador de f en s es el vector $B(s) = T(s) \times N(s)$, $B(s)$ es por definición unitario, $\|B(s)\| = 1$ pues:

$\|u \times v\| = \|u\|^2 \|v\|^2 - (u \cdot v)^2$ como u y v son unitarios y ortogonales $\Rightarrow$

$\|u \times v\| = (1)(1) - 0 = 1 \Rightarrow$ el punto $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ está en el plano osculador $\Leftrightarrow$

$q - f(s) \perp B(s)$, así se tiene que la ecuación del plano osculador de f en s es:

$(q - f(s)) \cdot B(s) = 0$

El plano normal de f en s es el plano que pasa por $f(s)$ y tiene por vector normal a $T(s)$, su ecuación es: $(q - f(s)) \cdot T(s) = 0$

El plano rectificante de f en s es el plano que pasa por p y tiene por vector normal a $N(s)$, su ecuación es:$(q - f(s)) \cdot N(s) = 0$

El plano rectificante es ortogonal al plano osculador y al plano normal.

Ejercicio. Consideremos el camino $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dado por $f(s) = \left(cos\dfrac{s}{\sqrt{2}}, sen\dfrac{s}{\sqrt{2}}, \dfrac{s}{\sqrt{2}} \right)$ Obtener las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante de esta curva en el punto $p = f(\sqrt{2}\pi) = (-1, 0, \pi)$

$f'(s) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}} sen\dfrac{s}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}} cos\dfrac{s}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}} \right)$

$f''(s) = \left(-\dfrac{1}{2} cos\dfrac{s}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{2} sen\dfrac{s}{\sqrt{2}}, 0 \right)$

Calculamos la curvatura:

$$\kappa(s) = \|f''(s)\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} cos\frac{s}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{2} sen\frac{s}{\sqrt{2}} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}cos^2\frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4}sen^2\frac{s}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \frac{\left(-\frac{1}{2}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}sen\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)}{\frac{1}{2}} = \left(-cos\frac{s}{\sqrt{2}}, -sen\frac{s}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

Ahora calculamos el vector binormal:

$$B(s) = T(s) \times N(s) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{1}{\sqrt{2}}sen\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -cos\frac{s}{\sqrt{2}} & -sen\frac{s}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}sen\frac{s}{\sqrt{2}} - \left[\frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}\right] i + \frac{1}{\sqrt{2}}sen^2\frac{s}{\sqrt{2}}j + \frac{1}{\sqrt{2}}cos^2\frac{s}{\sqrt{2}}k =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}sen\frac{s}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Evaluando en el punto p tenemos que:

$T(\sqrt{2}\pi) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}sen\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}cos\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$N(\sqrt{2}\pi) = (-cos\pi, -sen\pi, 0) = (1, 0, 0)$

$B(\sqrt{2}\pi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}sen\pi, -\frac{1}{\sqrt{2}}cos\pi, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

De manera que ya podemos obtener las ecuaciones de los planos:

PLANO OSCULADOR: $(q - f(s)) \cdot B(s) = 0$ sustituyendo:

$$[(x, y, z) - (-1, 0, \pi)] \cdot \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$(x + 1, y, z - \pi) \cdot \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z - \pi}{\sqrt{2}} = 0$$

Finalmente, se tiene que la ecuación del plano osculador es:

$$\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

PLANO NORMAL: $(q - f(s)) \cdot T(s) = 0$ sustituyendo:

$$[(x, y, z) - (-1, 0, \pi)] \cdot \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$(x + 1, y, z - \pi) \cdot \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$-\frac{y}{\sqrt{2}} + \frac{z - \pi}{\sqrt{2}} = 0$$

Finalmente, se tiene que la ecuación del plano osculador es:

$$\frac{y}{\sqrt{2}} - \frac{z}{\sqrt{2}} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

PLANO RECTIFICANTE: $(q - f(s)) \cdot N(s) = 0$ sustituyendo:

$$[(x, y, z) - (-1, 0, \pi)] \cdot (1, 0, 0) = 0$$

$$(x + 1, y, z - \pi) \cdot (1, 0, 0) = 0$$

Finalmente, se tiene que la ecuación del plano osculador es:

$$x + 1 = 0$$

Si la curva no está reparametrizada por longitud de arco, entonces procedemos de la siguiente manera:

Sea $\bar{f} : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f} = f \circ \varphi$ la reparametrización por longitud de arco de f. El vector velocidad de $f'(t)$ está en la misma dirección del vector $T(s) = \bar{f}'(s)$ en el punto $p = f(t) = \bar{f}(s)$ donde $t = \varphi(s)$, así que con él podemos obtener la ecuación del plano normal de f en t.

$f''(t)$ pertenece al plano osculador de f en t, pues es una combinación lineal de los vectores $T(s)$ y $N(s)$ los cuales determinan dicho plano, entonces el vector $v = f'(t) \times f''(t)$ se encuentra en la dirección del vector binormal $B(s)$, con este vector v podemos determinar el plano osculador.

Tenemos determinados los vectores $u = f'(t)$ y $v = f'(t) \times f''(t)$ los cuales son ortogonales a los planos normal y osculador respectivamente, entonces el vector $w = (f'(t) \times f''(t)) \times f'(t)$ es un vector ortogonal a u y v por lo tanto debe estar en la dirección del vector $N(s)$, con este vector ya se determina el plano rectificante.

Ejemplo. Considere el camino $f(t) = (t, t^2, t^3)$ determinar las ecuaciones de los planos osculador, normal y rectificante a la curva descrita por f en el punto $p = f(2) = (2, 4, 8,)$

$$u = f'(t) = (1, 2t, 3t^2) \; f''(t) = (0, 2, 6t)$$

$$v = f'(t) \times f''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = (6t^2, -6t, 2)$$

$$w = v \times u = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 6t^2 & -6t & 2 \\ 1 & 2t & 3t^2 \end{vmatrix} = (-18t^3 - 4t, -18t^4 + 2, 12t^3 + 6t)$$

En $t = 2$ se tiene que: $u = (1, 4, 12)$ y $f''(2) = (0, 2, 12)$ $v = (24, -12, 2)$ $w = (-152, -286, 108)$

PLANO OSCULADOR: $(q - f(t)) \cdot B = 0$ sustituyendo:

$$[(x, y, z) - (2, 4, 8)] \cdot (24, -12, 2) = 0$$

$$(x - 2, y - 4, z - 8) \cdot (24, -12, 2) = 0$$

$$24(x - 2) - 12(y - 4) + 2(z - 8) = 0$$

Finalmente, se tiene que la ecuación del plano osculador es:

$$12x - 6y + z = 8$$

PLANO NORMAL: $(q - f(t)) \cdot T = 0$ sustituyendo:

$$[(x, y, z) - (2, 4, 8)] \cdot (1, 4, 12) = 0$$

$$(x - 2, y - 4, z - 8) \cdot (1, 4, 12) = 0$$

$$(x - 2) + 4(y - 4) + 12(z - 8) = 0$$

Finalmente, se tiene que la ecuación del plano normal es:

$$x + 4y + 12z = 114$$

PLANO RECTIFICANTE: $(q - f(t)) \cdot N = 0$ sustituyendo:

$$[(x,y,z)-(2,4,8)]\cdot(-152,-286,108)=0$$

$$(x-2,y-4,z-8)\cdot(-152,-286,108)=0$$

$$-152(x-2)-286(y-4)+108(z-8)=0$$

Finalmente, se tiene que la ecuación del plano rectificante es:

$$76x+143y-54z=292$$