

Teorema de la Función Implícita (version (1))

Teorema 1. Considere la función $y = f(x)$. Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punto tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Suponga que la función F tiene derivadas parciales continuas en alguna bola con centro (x_0, y_0) y que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Entonces $F(x, y) = 0$ se puede resolver para y en términos de x y definir así una función $y = f(x)$ con dominio en una vecindad de (x_0, y_0) , tal que $y_0 = f(x_0)$, lo cual tiene derivadas continuas en \mathcal{V} que

$$\text{pueden calcularse como } y' = f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}, \quad x \in \mathcal{V}.$$

Vamos ahora a probar que f es continua en $(x_0 - h, x_0 + h)$ haciendo ver primero que es continua en x_0 y después mostrando que es continua en todo $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$

Demostración. Sea $0 < \epsilon < k$. Si se repite el proceso para determinar la función f , pero ahora restringidos a un cuadrado más pequeño T , centrado en (x_0, y_0) , descrito por

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < \epsilon, \quad |y - y_0| < \epsilon\}$$

obtenemos la misma función pero con dominio restringido a un intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta < h$ y con rango contenido en el intervalo $y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon$. Así, por la forma en que es determinada la función f , tenemos que para cualquier $0 < \epsilon < k$, existe $\delta > 0$ tal que para todo x , si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Por tanto, f es continua en x_0 .

Para probar que f es continua en $x \forall x \in (x_0 - h, x_0 + h)$ tómesese x_1 en $(x_0 - h, x_0 + h)$ con $x_1 \neq x_0$ y un $\epsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para garantizar que el cuadrado

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_1| < \epsilon, \quad |y - y_1| < \epsilon\}$$

centrado en (x_1, y_1) y donde $y_1 = f(x_1)$ este totalmente contenido en el cuadrado original S , y además para todo x tal que $|x - x_1| < \epsilon$, $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$. Así, repitiendo el proceso para determinar f , ahora restringiéndonos a las x que cumplen $|x - x_1| < \epsilon$, encontramos que existe una $0 < \delta_1 < \epsilon$ tal que, para todo x , si $|x - x_1| < \delta_1$ entonces $|f(x) - f(x_1)| < \epsilon$. lo cual quiere decir que f es continua en x_1 . Por consiguiente, f es continua en $(x_0 - h, x_0 + h)$ ■

Ahora probaremos que y' es continua en $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ con derivada

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Demostración. Como F tiene parciales continuas en x_0 entonces F es diferenciable en x_0 por lo tanto

$$F((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + r(h_1, h_2)$$

donde

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

tomando $x_0 + h_1 \in I$ y haciendo $y_0 + h_2 = f(x_0 + h_1)$ se tiene

$$F((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = F(x_0 + h_1, f(x_0 + h_1)) = 0$$

también

$$F(x_0, y_0) = 0$$

por lo tanto

$$F(x_0 + h_1, f(x_0 + h_1)) - F(x_0, y_0) = 0$$

esto quiere decir

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + r(h_1, h_2) = 0$$

como

$$r(h_1, h_2) = 0 \text{ para } h_1, h_2 \text{ cercanas a } 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 = 0$$

por lo tanto

$$\frac{h_2}{h_1} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

pero $h_2 = \Delta y$ y $h_1 = \Delta x$ por lo tanto

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

haciendo $\Delta y \Delta x \rightarrow 0$ se tiene

$$y'(x_0) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

este mismo razonamiento es valido para $x \in I$. ■

Teorema de la Función Implícita (Versión (2))

Considere la función $F(x, y, z)$. Sea $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ un punto tal que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Suponga que la función F tiene derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ continuas en alguna bola con centro (x_0, y_0, z_0) y que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Entonces $F(x, y, z) = 0$ se puede resolver para z en términos de x, y y definir así una función $z = f(x, y)$ con dominio en una vecindad de (x_0, y_0, z_0) , tal que $z_0 = f(x_0, y_0)$, lo cual tiene derivadas continuas en \mathcal{V} que pueden calcularse como

$$\frac{dz}{dx}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y)} \quad \frac{dz}{dy}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y)}$$

Importante: Este es un resultado que garantiza la existencia de una función $z = f(x, y)$ definida implícitamente por $F(x, y, z) = 0$. Esto es, puede resolverse para z en términos de x, y , pero no nos dice como hacer el despeje.



Ejemplo Sea $f(x, y, z) = x + y + z - ze^z$ entonces $\frac{\partial F}{\partial z} = 1 - e^z(z + 1)$ si el punto $P(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ es tal que $x_0 + y_0 + z_0 e^{z_0} = 0$ y $z \neq 0$ y como $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$. El **T.F.Im.** sugiere que podamos despejar z en términos de x y y y establecer así una función $z = f(x, y)$ con $z_0 = f(x_0, y_0)$ de modo que su gráfica en los alrededores de P coincide con $F(x, y, z) = 0$. Las parciales de la función f son

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-\partial F}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{-1}{1 - e^z(z + 1)}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-\partial F}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{-1}{1 - e^z(z + 1)}.$$

Ejercicio Si

$$\frac{dz}{dx}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y)}$$

calcular

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

Solución tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y)} \right) = -\frac{(\frac{\partial F}{\partial z}) \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \frac{dz}{dx} \right] - (\frac{\partial F}{\partial x}) \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{dz}{dx} \right]}{(\frac{\partial F}{\partial z})^2} \\ &= -\frac{(\frac{\partial F}{\partial z}) \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \frac{dz}{dx} \right] - (\frac{\partial F}{\partial x}) \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{dz}{dx} \right]}{(\frac{\partial F}{\partial z})^2} \\ &= -\frac{(\frac{\partial F}{\partial z}) \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \right) \right] - (\frac{\partial F}{\partial x}) \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \left(-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \right) \right]}{(\frac{\partial F}{\partial z})^2} \\ &= -\frac{(\frac{\partial F}{\partial z})^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} + (\frac{\partial F}{\partial x})^2 \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}}{(\frac{\partial F}{\partial z})^3} \end{aligned}$$

Teorema de la Función Implícita (Versión (3))

Teorema 2. Considere la función $z = f(x_1, \dots, x_n)$. Sea $p = (x_1, \dots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ un punto tal que $F(p) = 0$. Suponga que la función F tiene derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$, y $\frac{\partial F}{\partial y}$ continuas en alguna bola con centro P y que $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

Entonces, $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ puede resolverse para y en términos de x y definir así una vecindad v de

\mathbb{R}^n del punto (x_1, \dots, x_n) , una función $y = f(x_1, \dots, x_n)$ lo cual tiene derivadas parciales continuas en v que se pueden calcular con las fórmulas

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \frac{-\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \dots, x_n)} \text{ con } (x_1, \dots, x_n) \in v.$$

Demostración.

Una idea de como probar lo anterior es la siguiente:

Como $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ entonces tenemos que $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ ó $\frac{\partial F}{\partial y} < 0$ supongamos sin perdida de generalidad que $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ entonces tenemos que $F(x_1, x_2, \dots, x_q, y)$ es creciente cuando (x_1, \dots, x_q) es constante $F(a_1, \dots, a_q, y)$ es creciente $\forall y \in [b - \epsilon, b + \epsilon]$ ademas se tiene que $F(a_1, \dots, a_q, b) = 0$ entonces

$$F(a_1, \dots, a_q, b + \epsilon) > 0 \quad F(a_1, \dots, a_q, b - \epsilon) < 0$$

\therefore Si $(x_1, \dots, x_q) \in B_\delta(a_1, \dots, a_q)$ entonces

$$F(x_1, \dots, x_q, b + \epsilon) > 0 \quad F(x_1, \dots, x_q, b - \epsilon) < 0 \quad y \quad F \text{ continua}$$

se tiene entonces que $\exists!$ $y = f(x_1, \dots, x_q) \in [b - \epsilon, b + \epsilon]$ tal que $F(x_1, x_2, \dots, x_q, f(x_1, x_2, \dots, x_q)) = 0$ y $b = f(x_1, x_2, \dots, x_q)$. Hemos encontrado que si $(x_1, \dots, x_q) \in B_\delta(a_1, \dots, a_q)$ entonces $f(x_1, \dots, x_q) = y \in (b - \epsilon, b + \epsilon) \therefore f$ es continua.

■