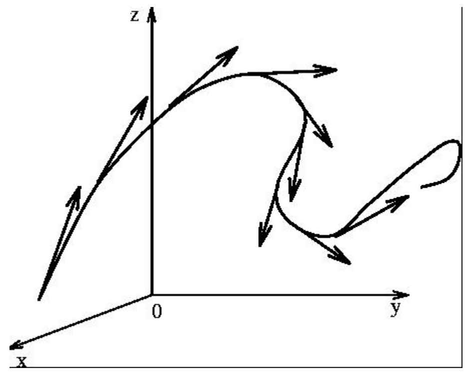
Curvatura

En una recta, el vector unitario tangente T no cambia su dirección y por tanto $T' = 0$. Si la curva no es una linea recta, la derivada T' mide la tendencia de la tangente a cambiar su diracción. El coeficiente de variación o derivada de la tangente unitaria respecto a la longitud de arco se denomina *vector curvatura* de la curva. Se designa por dT/ds donde s representa la longitud de arco.



Definición 1. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una camino dos veces diferenciable parametrizado por longitud de arco. Al número $\kappa = \|f''(s)\|$ se le llama curvatura de f es s.*

Ejemplo: Calcule la curvatura en todo punto de la recta $r(t) = (x_0, y_0, z_0) + t(u_1, u_u, u_3)$ donde $\|u\| = 1$ tenemos:

$$r'(t) = (u_1, u_2, u_3) \qquad \text{y} \qquad \|r'(t)\| = \|u\| = 1$$

Por lo tanto la curva esta parametrizada por longitud de arco Por lo tanto $\kappa = \|r''(t)\| = 0$, por lo tanto $k = 0$.

Ejemplo: Curvatura de una circunferencia. Para un círculo de radio R dado por la ecuación $r(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t)$ tenemos: La parametrizacion por longitud de arco es:

$$s = \int_0^t \|f'(u)\|du = \int_0^t Rdt = Rt \;\to\; s = Rt \;\Rightarrow\; t = \frac{s}{R}$$

de esta manera se tiene

$$r(t) = r\left(\frac{s}{R}\right) = \left(R\cos\left(\frac{s}{R}\right), R\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

$$r'(s) = \left(-\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right) \qquad \text{y} \qquad r''(s) = \left(-\frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right), -\frac{1}{R}\,\mathrm{sen}\left(\frac{s}{R}\right)\right)$$

Por lo tanto $\kappa = \|r''(s)\| = \dfrac{1}{R}$.

Esto prueba que una circunferencia tiene curvatura constante y el reciproco de la curvatura es el radio de la circunferencia cuando $k(t) \neq 0$, su inverso se denomina radio de curvatura y se designa por ρ.

Ejemplo Sea $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = (t, t^2+1)$, en este caso vamos a reparametrizar por longitud de arco

$$s = \varphi(t) = \int_0^t \|f'(u)\| du$$

$$= \int_0^t \|(1, 2u)\|$$

$$= \int_0^t \sqrt{1+4u^2} du$$

vamos a intentar el cambio de variable $2u = \sinh(x)$ donde $u = \dfrac{\sinh(x)}{2}$ de manera que

$$\int \sqrt{1+4u^2} du = \frac{1}{2} \int \sqrt{1+\sinh^2(x)} \cosh(x) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \cosh^2(x)\ dx$$

$$= \frac{1}{4} \int (1+\cosh(2x))\ dx$$

$$= \frac{1}{4} (x+\sinh(2x))$$

$$= \frac{1}{4} (x+\cosh(x)\sinh(x))$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{arcsenh}(2u) + \frac{1}{4} \cosh(\operatorname{arcsenh}(2u)) \sinh(\operatorname{arcsenh}(2u))$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{arcsenh}(2u) + \frac{1}{4} (2u + \cosh(\operatorname{arcsenh}(2u)))$$

$$\cosh(\operatorname{arcsenh}(2u)) = \sqrt{1+\sinh^2(\operatorname{arcsenh}(2u))} = \sqrt{1+4u^2}$$

Por lo que

$$\frac{1}{4} \operatorname{arcsenh}(2u) + \frac{1}{4} (2u + \cosh(\operatorname{arcsenh}(2u))) = \frac{1}{4} \operatorname{arcsenh}(2u) + \frac{1}{4} \left(2u\sqrt{1+4u^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \operatorname{arcsenh}(2u) + \frac{1}{2} \left(u\sqrt{1+4u^2}\right)$$

$$y = \operatorname{arcsenh}(2u) \ \Rightarrow\ \sinh(y) = 2u \ \Rightarrow\ \frac{e^y - e^{-y}}{2} = 2u \ \Rightarrow\ e^y - e^{-y} = 4u\ e2y - 4e^y u - 1 = 0$$

$$\Rightarrow\ e^y = \frac{4u \pm \sqrt{16u^2+4}}{2} \ \Rightarrow\ e^y = 2u \pm \sqrt{4u^2+1} \ \Rightarrow\ y = \ln\left(2u \pm \sqrt{4u^2+1}\right)$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{4} \operatorname{arcsenh}(2u) + \frac{1}{4} \left(2u\sqrt{1+4u^2}\right) = \frac{1}{4} \left(\ln\left(2u \pm \sqrt{4u^2+1}\right)\right) + \frac{1}{4} \left(2u\sqrt{1+4u^2}\right)$$

Regresando a nuestra integral por longitud de arco

$$\int_0^t \sqrt{1+4u^2}du = \frac{1}{4}\left(\ln\left(2u \pm \sqrt{4u^2+1}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(2u\sqrt{1+4u^2}\right)\Big|_0^t$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln\left(2t \pm \sqrt{4t^2+1}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(2t\sqrt{1+4t^2}\right)$$

en este caso

$$s = \varphi(t) = \frac{1}{4}\left(\ln\left(2t \pm \sqrt{4t^2+1}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(2t\sqrt{1+4t^2}\right)$$

se observa que no es posible hallar $t = \varphi^{-1}(s)$ de manera explicita.
Por lo que si se quisiera calcular la curvatura $\kappa(s)$, deberemos recurrir a una expresión para la curvatura que dependa del parámetro t.

Vector Tangente

Definición 2. *Dada una curva $f(t)$, el vector unitario tangente T es otra función vectorial asociada a la curva, y está definida por:*

$$T(t) = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|} \qquad \textit{siempre que } \|f'(t)\| \neq 0.$$

Observese que:

$$\|T(t)\| = \left\|\frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}\right\| = \frac{1}{\|f'(t)\|}\|f'(t)\| = 1$$

por lo tanto T es de magnitud constante, en cuyo caso se tiene $T \cdot T' = 0$.

Vector Normal Principal

Definición 3. *Si $T' \neq 0$ el vector unitario que tiene la misma dirección que T' se llama Normal Principal a la curva y se designa por $N(t)$. Asi pues $N(t)$ es una nueva función vectorial asociada a la curva y esta dada por la ecuación:*

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \qquad \textit{siempre que} \qquad \|T'(t)\| \neq 0$$

La regla de la cadena y la fórmula $s'(t) = \|f'(t)\|$ permite relacionar el vector curvatura dT/ds con la derivada T' respecto al tiempo mediante la ecuación:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{dT}{dt}\,\frac{dt}{ds} = T'\frac{1}{\frac{ds}{dt}} = T'\frac{1}{\|f'(t)\|}$$

y puesto que $T'(t) = \|T'(t)\|N(t)$, obtenemos:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{\|f'(t)\|}\|T'\|N(t)$$

que dice que el vector curvatura tiene la misma dirección que la normal principal $N(t)$. El factor de escala que multiplica a $N(t)$ es un número no negativo llamado curvatura de la curva en t, y se designa por $k(t)$.

Asi la curvatura de $k(t)$ definida como la longitud del vector curvatura esta dado por la fórmula siguiente:

$$k(t) = \left\| \frac{dT}{ds} \right\| = \frac{1}{\|f'(t)\|} \|T'(t)\| \, \|N(t)\| = \frac{\|T'(t)\|}{\|f'(t)\|}$$

Vamos ahora a desarrollar una fórmula que nos permita calcular la curvatura.

Si

$$T = \frac{T'(t)}{\|f'(t)\|} \Rightarrow T\|f'(t)\| = f'(t) \Rightarrow T\frac{ds}{dt} = f'(t)$$

Por lo tanto

$$f'' = T\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt}T'$$

Haciendo el producto cruz

$$f' \times f'' = T\frac{ds}{dt} \times \left(T\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{ds}{dt}T' \right) = \cancel{T\frac{ds}{dt} \times T\frac{d^2s}{dt^2}} + T\frac{ds}{dt} \times \frac{ds}{dt}T'$$

Por lo tanto

$$\|f' \times f''\| = \|T\frac{ds}{dt} \times \frac{ds}{dt}T'\| = \left(\frac{ds}{dt}\right)\|T\| \left(\frac{ds}{dt}\right)\|T'\| \operatorname{sen}(T, T') = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \|T'\|$$

En cosecuencia

$$\frac{\|f' \times f''\|}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2} = \|T'\| \Rightarrow \|T'\| = \frac{\|f' \times f''\|}{\|f'\|^2}$$

sustituimos en

$$k(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|f'(t)\|} \Rightarrow k(t) = \frac{\frac{\|f' \times f''\|}{\|f'\|^2}}{\|f'(t)\|} \Rightarrow k(t) = \frac{\|f' \times f''\|}{\|f'(t)\|^3}$$

Vector Binormal

Un tercer vector definido mediante $B = T\text{x}N$ recibe el nombre de *Vector binormal*. Notese que

$$\|B(s)\| = \|T(s) \times N(s)\| = \|T(s)\|\|N(s)\| \operatorname{sen}(T, N) = 1$$

Los tres vectores unitarios T, N y B forman un conjunto de vectores mutuamente ortogonales de orientación derecha llamado ***Triedo de Frenet***. Para el caso especial de una curva plana con ecuación $y = f(x)$ podemos escoger x como el parámetro y escribir $r(x) = x\hat{i} + f(x)\hat{j}$ entonces $r'(x) = \hat{i} + f'(x)\hat{j}$ y $r''(x) = f''(x)\hat{j}$ y al efectuar:

$$r'(x) \text{ x } r''(x) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & f'(x) & 0 \\ 0 & f''(x) & 0 \end{vmatrix} = f''(x)\hat{k}$$

Por lo tanto $\|r'(x) \text{ x } r''(x)\| = \|f''(x)\|$.

Por otro lado $\|f'(x)\| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$. Por lo tanto, para una curva plana

$$k(x) = \frac{\|f''(x)\|}{\left(\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\right)^{3/2}}$$

Ejemplo: Determine los vectores T y N, la curvatura k y el centro de la curvatura de la parábola $y = x^2$ en el punto $(1, 1)$

Solución. Si la parábola esta parametrizada por $x = t$ y por $y = t^2$, entonces su vector de posición es $f(t) = (t, t^2)$, por lo tanto $f'(t) = (1, 2t) \Rightarrow \|f'(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2}$, y $f''(t) = (0, 2)$, por lo tanto:

$$T(t) = \frac{(1, 2t)}{\sqrt{1 + 4t^2}} \qquad T(1) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \qquad N(t) = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

perpendicular a T,

$$k = \frac{\|f''(t)\|}{\left(\sqrt{1 + [f'(t)]^2}\right)^3} = \frac{2}{\left(\sqrt{1 + 4t^2}\right)^3} \qquad k(1) = \frac{2}{5\sqrt{5}} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{5\sqrt{5}}{2}$$

Por lo tanto el centro de la curvatura es

$$c(t) = f(1, 1) + \frac{1}{\frac{2}{5\sqrt{5}}}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \left(-4, \frac{7}{2}\right)$$

Y la ecuación del círculo osculador a la parábola es, por tanto:

$$(x + 4)^2 + \left(y - \frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{5\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$$

Ejemplo: Calcule la curvatura k de la hélice $x(t) = a\cos(wt)$, $y(t = a\sin(wt))$, $z(t) = bt$

Solución. Tenemos que:

$$f'(t) = (-wa\sin(wt), aw\cos(wt), b) \quad \Rightarrow \quad \|f'(t)\| = \sqrt{a^2w^2 + b^2}$$

Por lo tanto

$$T = (-aw\sin(wt), aw\cos(wt), b)\frac{1}{\sqrt{a^2w^2 + b^2}}$$

Por lo tanto

$$k = \frac{\|T'\|}{\|f'\|} = \| - aw^2\cos(wt), -aw^2\sin(wt), 0\|\frac{1}{\sqrt{a^2w^2 + b^2}} =$$

$$= \sqrt{(aw^2)^2(\cos^2(wt) + \sin^2(wt))}\ \frac{1}{\sqrt{a^2w^2 + b^2}} = \frac{aw^2}{\sqrt{a^2w^2 + b^2}}$$

En resumen:

$$\begin{array}{lll} \hat{B} = \hat{T} \text{ x } \hat{N} & \text{y por tanto} & -\hat{B} = \hat{N} \text{ x } \hat{T} \\ \hat{N} = \hat{B} \text{ x } \hat{T} & & -\hat{N} = \hat{T} \text{ x } \hat{B} \\ \hat{T} = \hat{N} \text{ x } \hat{B} & & -\hat{T} = \hat{B} \text{ x } \hat{N} \end{array}$$

Dado que $B(s) = T(s) \text{ x } N(s)$ se tiene que $B'(s) = \underbrace{T'(s) \text{ x } N(s)}_{*} + T(s) \text{ x } N'(s)$

* Este sumando es igual a cero ya que $T'(s) = f''(s)$ es un vector en la dirección de $N(s)$ y por tanto son colineales por lo que su producto cruz es cero, por lo tanto $B'(s) = T(s) \text{ x } N'(s)$.

  Ahora como $B'(s)$ es un vector ortogonal a $T(s)$ podemos concluir que $B'(s)$ es un vector en el plano osculador.

  Por lo que si $B'(s)$ es un vector paralelo a $N(s)$, entonces existe un escalar $z(s)$ tal que $B'(s) = z(s)N(s)$.

  Por otro lado $N'(s)$ es ortogonal a $N(s)$. Por lo tanto se puede escribir como $N'(s)\mu(s)T(s) + z(s)B(s)$.