Funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Definición 1. *Una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ que asocia a cada n-ada ordenada $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ un número real $f(x_1, x_2, ..., x_n)$*

Ejemplo La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ asocia a dada pareja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ el número real $x^2 + y^2$

Ejemplo La función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ asocia a dada terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ el número real $\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

Definición 2. *El dominio de una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es el conjunto*

$$Dom_f = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo La función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ asocia a dada terna $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ el número real $\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$ tiene como dominio el conjunto

$$Dom_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \geq x^2 + y^2 + z^2\}$$

Ejemplo La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ asocia a dada pareja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ el número real $x^2 + y^2$ en este caso el dominio es $\mathbb{R}^2$

Definición 3. *El rango de una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es el conjunto*

$$Ran_f = \{f(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R} \mid (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

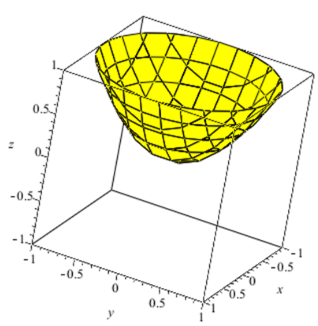
Ejemplo La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ asocia a dada pareja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ el número real $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ en este caso el rango de la función es el conjunto

$$\{z \in \mathbb{R} \mid 0 \leq z \leq 1\}$$

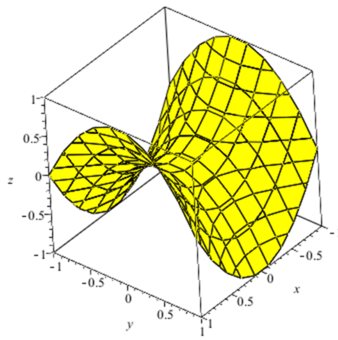
Definición 4. *La gráfica de una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es el conjunto*

$$Gra_f = \{(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n\}$$

Ejemplo La gráfica de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 + y^2$ es un paraboloide cuyo aspecto es



Ejemplo La gráfica de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 - y^2$ es un paraboloide hiperbolico (silla de montar) cuyo aspecto es



Conjuntos de Nivel

Definición 5. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y sea $c \in \mathbb{R}$. El conjunto de nivel del valor c se define como:*

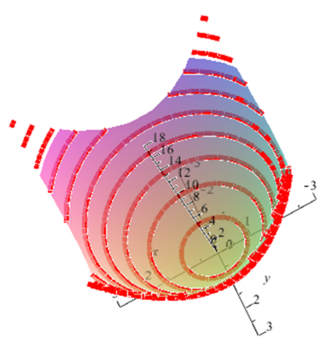
$$C_N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\}$$

Ejemplo Describir el conjunto de nivel de la función $f(x, y) = x^2 + y^2$

Solución En este caso el conjnuto de nivel es

$$C_N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = c\}$$

geometricamente son circunferencias con centro el origen y radio c

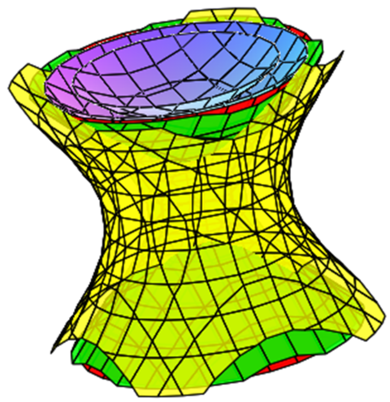


Ejemplo Describir el conjunto de nivel de la función $f(x, y) = x^2 - y^2$

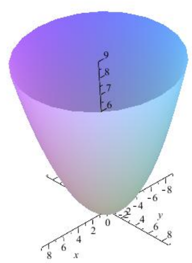
Solución En este caso el conjnuto de nivel es

$$C_N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = c\}$$

geometricamente son circunferencias con centro el origen y radio c



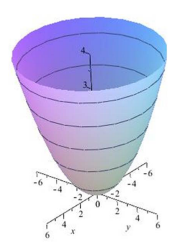
Ejemplo.-La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2+y^2$ tiene como gráfica el paraboloide de revolución $z = x^2 + y^2$

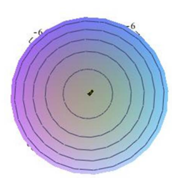


Las curvas de nivel son: el vacio para $a < 0$, y para $a > 0$ es el conjunto

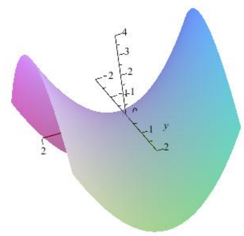
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = a\}$$

, es decir un círculo de radio $\sqrt{a}$ con centro en el origen

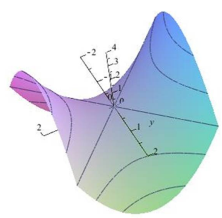
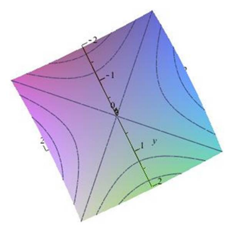




Ejemplo.-La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2 - y^2$ tiene como gráfica el paraboloide hiperbolico $z = x^2 - y^2$



Las curvas de nivel son: para $a = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 = 0$ par de rectas que se cortan en el origen, y para $a = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 = 1$ es una hiperbola paralela al eje X que lo corta en $(\pm 1, 0)$, para $a = -1 \Rightarrow x^2 - y^2 = -1$ es una hiperbola paralela al eje Y y que lo corta en $(0, \pm 1)$

Ejemplo.-La función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ tiene el siguiente conjunto de nivel

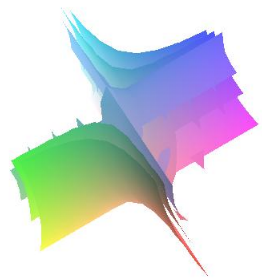
$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a\}$$

Las superficies de nivel son: para $a = 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0$ el origen, y para $a = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$ es una esfera, $a = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2$ es una esfera

Ejemplo.-La función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$ tiene el siguiente conjunto de nivel

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 - y^2 + z^2 = a\}$$

Las superficies de nivel son: para $a = 0 \Rightarrow x^2 - y^2 + z^2 = 1$ es un hiperboloide de un manto, y para $a = 1 \Rightarrow x^2 - y^2 + z^2 = 1$ es un hiperboloide de un manto, $a = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2 - y^2 + z^2} = 2$ es un hiperboloide de un manto



Límite de Funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Definición 6. *Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, y sea x_0 un punto de acumulación de Ω. Se dice que $L \in \mathbb{R}$ es el límite de f en x_0, y se denota por:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - b| < \varepsilon$ cuando $x \in \Omega$, $0 < \|x - x_0\| < \delta$

Observación: Es necesarío que x_0 sea punto de acumulacion de Ω. Usando la definición de límite, demostrar que:

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

Por demostrar, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ entonces $\left| \frac{x^4 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| < \varepsilon$ como $x^2 \leq x^2 + y^2$ entonces $x^4 \leq (x^2 + y^2)^2$ entonces $\frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \underset{(*)}{\leq} \frac{1}{x^4}$

$$\therefore \quad \left| \frac{x^4 y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| \underset{(*)}{\leq} \left| \frac{x^4 y^2}{x^4} \right| \leq |y^2| = y^2 \leq \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 < \delta^2$$

$\therefore$ Si $\delta^2 = \varepsilon$ entonces $\delta = \sqrt{\varepsilon}$