Proposición 1. *Sea $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

Entonces para una función real y continua g definida en un entorno da a tal que

$$\lim_{x\to a} g(x) = b$$

se tiene que

$$\lim_{x\to a} f(x,g(x)) = L$$

Demostración. Por la existencia del límite doble, dado $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$, tal que

$$\|(x,y)-(a,b)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)-L| < \epsilon.$$

Ahora

$$\lim_{x\to a} g(x) = b$$

quiere decir que dado $\delta > 0$ existe $\sigma > 0$, con $0 < \sigma < \delta$ tal que:

$$|x-a| < \sigma \Rightarrow |g(x)-b| < \delta.$$

Por tanto, si $|x-a| < \sigma$, se tiene que $\|(x,g(x))-(a,b)\| < \delta$. Con lo cual,

$$|f(x,g(x))-L| < \epsilon$$

□

Ejemplo.- Determinar si existe, el límite de la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Para determinar su límite podemos acercarnos por trayectorias (funciones continuas) al origen. Pongamos $y = g(x) = 0$ se tiene entonces que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,g(x)) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 0}{x^2+0^2} = 0$$

Pongamos ahora $y = g(x) = x$ se tiene entonces que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,g(x)) = \lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^2} = 0$$

Lo anterior nos dice que si existe el límite, éste tendría que ser 0, para comprobarlo usaremos la definición, se tiene entonces que debemos hallar un $\delta > 0$ tal que $\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| < \epsilon$ siempre que $\|(x,y)-(0,0)\| < \delta$. Observamos que

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x^2||y|}{|x^2+y^2|} = \frac{|x|^2|y|}{|x^2+y^2|} \leq \frac{\|\overline{x}\|^2\|\overline{x}\|}{\|\overline{x}\|^2} = \|\overline{x}\| < \delta.$$

$\therefore$ podemos tomar $\delta = \epsilon$

Ejemplo.- Determinar si existe, el límite de la función definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Para determinar su límite podemos acercarnos por trayectorias (funciones continuas) al origen. Pongamos $y=g(x)=x$ se tiene entonces que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,g(x))=\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2}$$

Pongamos $y=g(x)=0$ se tiene entonces que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,g(x))=\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x(0)}{x^2+0^2}=0$$

como $\frac{1}{2}\neq 0$ entonces $\nexists$ el límite de la función

Continuidad de Funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Definición 1. *Sea $f:\Omega\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, y sea x_0 un punto de acumulación de Ω. Se dice que $f(x_0)\in\mathbb{R}$ es el límite de f en x_0, y se denota por:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

Si dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ cuando $x\in\Omega$, $0<\|x-x_0\|<\delta$

Ejemplo.- Demostrar la continuidad en $\mathbb{R}^2$ de la función $f(x,y)=xy$.

p.d. Dado $\epsilon>0$ $\exists$ $\delta>0$ tal que $|xy-ab|\leq\epsilon$ siempre que $0<|x-a|<\delta_1$ y $0<|y-b|\leq\delta_2$ tenemos que:

$$|xy-ab|=|xy-xb+xb-ab|\leq|x(y-b)|+|b(x-a)|\leq(|x-a|+|a|)\,|y-b|+|b||x-a|\leq$$

$$(\delta+|a|)\,\delta+|b|\delta=\delta\,(\underbrace{(\delta+|a|)}_{\text{Esta la podemos acotar}}+|b|)$$

Si $\delta=1$ tenemos que $\delta(1+|a|+|b|)$ y asi tomamos

$$\delta=\mathbf{min}\left\{1,\frac{\epsilon}{1+|a|+|b|}\right\}$$

Diferenciación de funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)\epsilon \mathring{A}$. Se define la derivada pacial i-esima en $\overline{a}$ denotada $f_x(\overline{a})$, $D_x f(\bar{a})$ ó $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\bar{a})$ de la forma $f_x = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots . a_n) - f(\bar{a})}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a + he_i) - f(a)}{h}$ siendo $\bar{e}_i = (0, \ldots, \underset{i-esimo}{1}, \ldots, 0)$. Si $n = 2$ existen 2 derivadas parciales.

Sea $\bar{a} = (x_0, y_0)$ un punto del interior del dominio de $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las derivas parciales de f en el punto $\bar{a}$ denotada respectivamente por $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ son:

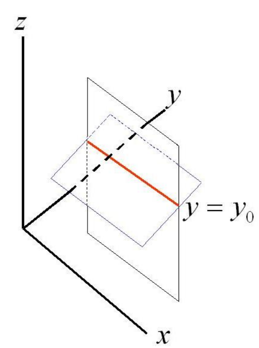
$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

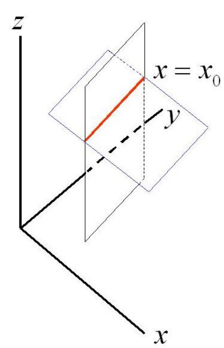
$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

Ejemplo: Si $f(x, y) = x^2 + x + 1$ entonces $f_x(0, 0) = 1$ ya que $f_x = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 + h + 1 - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h(h + 1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h + 1 = 1$ y $f_y = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{f(0, 0 + k) - f(0, 0)}{k} = \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{1 - 1}{k} = 0$

Observación: La derivada parcial en un punto de una función de varias variables en la derivada de la función de una variable, obtenida haciendo constante todas las variables, menos una. en consecuencia se pueden aplicar con esta interpretación, las reglas de derivación en una variable.

Las derivadas parciales en el punto (x_0, y_0) de la función $z = f(x, y)$ representa la pendiente de las curvas intersección C_1 y C_2 de la superficie $z = f(x, y)$ con los planos $y = y_0$, $x = x_0$ respectivamente





Ejercicio: Calcular las derivadas parciales

a) $f(x, y) = a \arcsin(x - y)$

b) $f(t, u) = \dfrac{\cos(2tu)}{t^2 + u^2}$

c) $f(x, y, z) = \dfrac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$

d) $f(x,y) = \int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2} dt \qquad x > 0,\, y > 0$

Solución :

a) $f_x = \dfrac{x}{\sqrt{1-(x-y)^2}} + \arcsin(x-y)$

$f_y = \dfrac{-x}{\sqrt{1-(x-y)^2}}$

b) $f_t = \dfrac{-(t^2+u^2)\sin(2tu)\cdot 2u - \cos(2tu)2t}{(t^2+u^2)^2}$

$f_u = \dfrac{(t^2+u^2) - \sin(2tu)2u - \cos(2tu)2u}{(t^2+u^2)^2}$

c) $f_x = \dfrac{(x^2+y^2+z^2)yz - xyz(2x)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

$f_y = \dfrac{(x^2+y^2+z^2)xz - xyz(2y)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

$f_z = \dfrac{(x^2+y^2+z^2)xy - xyz(2z)}{(x^2+y^2+z^2)^2}$

d) $f_x = e^{-xy}\dfrac{y}{2\sqrt{xy}}$

$f_y = e^{-xy}\dfrac{x}{2\sqrt{xy}}$