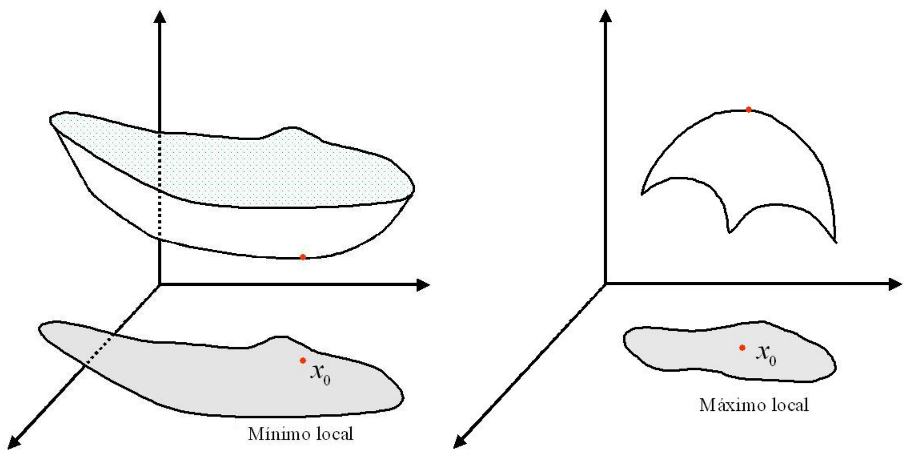
Extremos Locales parte 2

Entre las caracteristicas geometricas básicas de la gráficas de una función estan sus puntos extremos, en los cuales la función alcanza sus valores mayor y menor.

Definición 1. *Si $f : u \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función escalar, dado un punto $x_0 \in u$ se llama mínimo local de f si existe una vecindad v de x_0 tal que $\forall \quad x \in v \quad f(x) > f(x_0)$. De manera analoga, $x_0 \in u$ es un máximo local si existe una vecindad v de x_0 tal que $f(x) < f(x_0) \quad \forall \quad x \in v$. El punto $x_0 \in u$ es un extremo local o relativo, si es un mínimo local o máximo local.*



Teorema 1. *Criterio de la primera derivada Si $u \in \mathbb{R}$ es abierto, la función $f : u \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $x_0 \in u$ es un extremo local entonces $\nabla f(x_0) = 0$, esto es x_0 es un punto crítico de f.*

Demostración. Supongamos que t alcanza su máximo local en x_0. Entonces para cualquier $h \in \mathbb{R}^n$ la función $g(t) = f(x_0 + th)$ tiene un máximo local en $t = 0$. Asi, del cálculo de una variable $g'(0) = 0$ ya que como $g(0)$ es máximo local, $g(t) \leq g(0)$ para $t > 0$ pequeño

$$\therefore \quad g'(0) = \lim_{t \to t_0^+} \frac{g(t) - g(0)}{t} = 0$$

Analogamente para $t < 0$ pequeño tomamos

$$g'(0) = \lim_{t \to t_0^-} \frac{g(t) - g(0)}{t} = 0$$

Ahora por regla de la cadena

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0)h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0)h_0 = \nabla f(x_0) \cdot h$$

Asi $\nabla f(x_0) \cdot h = 0 \quad \forall\, h$ de modo que $\nabla f(x_0) = 0$. En resumen si x_0 es un extremo local, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$. En otras palabras $\nabla f(x_0) = 0$. □

Ejemplo Hallar los máximos y mínimos de la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 6y + 14$$

Solución: Debemos identificar los puntos críticos de f resolviendo $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ para x, y,

$$2x - 2 = 0 \quad 2y - 6 = 0$$

De modo que el punto crítico es $(1, 3)$. Como

$$f(x, y) = \left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 - 6y + 9\right) + 4 = (x - 1)^2 + (y - 3)^2 + 4$$

tenemos que $f(x, y) \geq 4$ por lo tanto en $(1, 3)$ f alcanza un mínimo relativo.

Ejemplo Considerar la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$. f solo tiene un punto crítico en el origen, donde el valor de f es 4. Como

$$f(x, y) = 4 - (x^2 + y^2)$$

tenemos que $f(x, y) \leq 4$ por lo tanto en $(0, 0)$ f alcanza un máximo relativo.

Ejemplo En el siguiente ejemplo mostramos que no todo punto critico es un valor extremo
Sea $f(x, y) = x^2 y + y^2 x$ tenemos que sus puntos criticos son

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + x^2 = 0$$

por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 2xy + y^2 = 0 \\ 2xy + x^2 = 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x = y \\ x = -y \end{pmatrix}$$

tomando $x = -y$ tenemos que

$$2xy + y^2 = 0 \;\Rightarrow\; -2y^2 + y^2 = 0 \;\Rightarrow\; -y^2 = 0 \Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

tomando $x = y$ tenemos que

$$2xy + y^2 = 0 \;\Rightarrow\; 2y^2 + y^2 = 0 \;\Rightarrow\; -3y^2 = 0 \Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$$

por lo tanto $(0, 0)$ es el único punto critico.
Ahora bien para $f(x, y)$ tomamos $x = y$

$$f(x, x) = 2x^3$$

la cual es $(< 0$ si $x < 0)$ y $(> 0$ si $x > 0)$ por lo tanto el punto critico $(0, 0)$ no es ni máximo ni mínimo local de f
Ahora bien para $f(x, y)$ tomamos $x = -y$

$$f(x, -x) = 0 \quad \forall x$$

por lo tanto el punto critico $(0, 0)$ no es ni máximo ni mínimo local de f

Para el caso de funciones $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ tenemos que recordando un poco de la expresión de taylor

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p(y-y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_p(z-z_0)+$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}_p(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}_p(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}_p(y-y_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}_p(z-z_0)(x-x_0)+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}_p(z-z_0)(y-y_0)\right)$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}_p(z-z_0)$$

Haciendo $x-x_0=h_1,\ \ y-y_0=h_2,\ \ z-z_0=h_3$ podemos escribir el término rojo de la siguiente manera

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}h_2^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}h_3h_1+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}h_3h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}h_3^2\right)$$

y también se puede ver como producto de matrices

$$\frac{1}{2!}(h_1\ h_2\ h_3)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{pmatrix}_p\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}$$

Si (x_0,y_0,z_0) es un punto critico de la función entonces en la expresión de Taylor

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p(y-y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_p(z-z_0)$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}_p(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}_p(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}_p(y-y_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}_p(z-z_0)(x-x_0)+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}_p(z-z_0)(y-y_0)\right)$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}_p(z-z_0)(x-x_0)$$

El término

$$\frac{\partial f}{\partial x}_p(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}_p(y-y_0)+\frac{\partial f}{\partial z}_p(z-z_0)=0$$

y por lo tanto

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{1}{2!}(h_1\ h_2\ h_3)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{pmatrix}_p\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}$$

vamos a determinar el signo de la forma

$$Q(h)=\frac{1}{2!}(h_1\ h_2\ h_3)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{pmatrix}_p\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}$$

vamos a trabajar sin el término $\frac{1}{2!}$ que no afectara al signo de la expresión, tenemos entonces

$$Q(h)=(h_1\ h_2\ h_3)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{pmatrix}_p\begin{pmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{pmatrix}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}h_2^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}h_3h_1+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}h_3h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}h_3^2$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(h_1+\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}h_2\right)^2+\left(\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}\right)h_2^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}h_3h_1+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}h_3h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}h_3^2$$

hacemos $b_1=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $h_1'=\left(h_1+\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}h_2\right)$, $b_2=\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$, $h_2'=h_2$ y obtenemos

$$=b_1h_1'^2+b_2h_2'^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}h_3h_1+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}h_3h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}h_3^2$$

que podemos escribir

$$=b_1h_1'^2+b_2h_2'^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\left(h_1+\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}h_2-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}h_2\right)h_3+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}h_3h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}h_3^2$$

$$=b_1h_1'^2+b_2h_2'^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\left(h_1'-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}h_2'\right)h_3+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}h_3h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}h_3^2$$

$$=b_1h_1'^2+b_2h_2'^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}h_1'h_3+\left(2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}\right)h_2'h_3+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}h_3^2$$

hacemos

$$2b_{23}=2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}-\frac{2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

y obtenemos

$$=b_1h_1'^2+b_2h_2'^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}h_1'h_3+2b_{23}h_2'h_3+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}h_3^2$$

que se puede escribir

$$=b_1\left(h_1'^2+2\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}}{b_1}h_1'h_3+\left(\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}h_3}{b_1}\right)^2\right)+b_2\left(h_2'^2+2\frac{b_{23}}{b_2}h_2'h_3+\left(\frac{b_{23}}{b_2}h_3\right)^2\right)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)^2}{b_1}-\frac{b_{23}^2}{b_2}\right)h_3^2$$

hacemos

$$b_3=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)^2}{b_1}-\frac{b_{23}^2}{b_2}$$

y obtenemos

$$= b_1\left(h_1'^2 + 2\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}}{b_1}h_1'h_3 + \left(\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}h_3}{b_1}\right)^2\right) + b_2\left(h_2'^2 + 2\frac{b_{23}}{b_2}h_2'h_3 + \left(\frac{b_{23}}{b_2}h_3\right)^2\right) + b_3h_3^2$$

$$= b_1\left(h_1' + \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}}{b_1}h_3\right)^2 + b_2\left(h_2' + \frac{b_{23}}{b_2}h_3\right)^2 + b_3h_3^2$$

esta última expresión será positiva si y solo si $b_1 > 0$ $b_2 > 0$ y $b_3 > 0$ en clases pasadas vimos los dos primeros, veamos ahora que

$$b_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)^2}{b_1} - \frac{b_{23}^2}{b_2} > 0$$

tenemos entonces que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)^2}{b_1} - \frac{b_{23}^2}{b_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} - \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} - \frac{2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}\right)^2}{\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} - \frac{\frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2}}{\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} - \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)^2\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 -}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2\right)}$$

$$\frac{2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2\right)}$$

$$= \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\right)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)^2}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}}{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)^2}$$

por lo tanto

$$b_3 > 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix} > 0$$

Un poco de Algebra Lineal

Si $A \in M_{n\times n}$ una matriz simétrica entonces existe una $B \in M_{n\times n}$ una matriz ortonormal tal que

$$BAB^T$$

es una matriz diagonal, es decir

$$BAB^T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Las matrices ortonormales se usan para realizar un cambio de base.
Si $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática que tiene asociada la matriz simétrica A (en una base ortonormal) es decir

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 \cdots x_n)A(x_1 \cdots x_n)^T$$

existe entonces una base ortonormal tal que la matriz asociada a F en esta nueva base es una matriz diagonal.
Tenemos que si

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

es tal que BAB^T es diagonal entonces

$$(x_1 \cdots x_n) = [x_1' \cdots x_n'] \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= [x_1' \cdots x_n']B$$

Por lo que

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 \cdots x_n)A(x_1 \cdots x_n)^T$$
$$= F(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1' \cdots x_n')BA(x_1' \cdots x_n'B)^T$$

$$= (x'_1 \cdots x'_n) BAB^T (x'_1 \cdots x_n)^T$$
$$= (x'_1 \cdots x'_n) \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} (x'_1 \cdots x_n)^T$$
$$= \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$$

por lo que F es positiva si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ son positivos, de igual manera F es negativa si $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ son negativos
Si definimos, para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$D_k = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_k \end{bmatrix}$$

entonces
$$\det(D_k) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_k$$

de tal forma que podemos decir que F es positiva si $\det(D_k) > 0$
y también F es negativa si $\det(D_k) < 0$ lo cual ocurre si $\det(D_k) < 0$ si k es impar y $\det(D_k) > 0$ si k es par para cada $k \in \{1, .., n\}$

Definición 2. *La forma $Q(x) = xAx^t$, que tiene asociada la matriz A (respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$) se dice:*
Definida positiva, si $Q(x) > 0 \quad \forall \ \ x \in \ \mathbb{R}^n$
La forma $Q(x) = xAx^t$, que tiene asociada la matriz A (respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^n$) se dice:
Definida negativa, si $Q(x) < 0 \quad \forall \ \ x \in \ \mathbb{R}^n$

Definición 3. *Si la forma $Q(x) = xAx^t$ es definida positiva, entonces f tiene un mínimo local en en x*
Si la forma $Q(x) = xAx^t$ es definida negativa, entonces f tiene un máximo local en en x

Definición 4. *Dada una matriz cuadrada $A = a_{ij} \ \ j = 1, ..., n \ \ i = 1, ..., n$ se consideran las submatrices angulares $A_k \ \ k = 1, ..., n$ definidas como*

$$A_1 = (a_{11}) \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \cdots, A_n = A$$

se define $\det A_k = \triangle_k$

Criterio 1 (a) Se tiene entonces que la forma $Q(x) = xAX^t$ es definida positiva si y solo si todos los determinantes $\triangle_k \ \ k = 1, ..., n$ son números positivos

Criterio 1 (b) La forma $Q(x) = xAX^t$ es definida negativa si y solo si los dterminantes $\triangle_k \ \ k = 1, ..., n$ tienen signos alternados comenzando por $\triangle_1 < 0, \ \ \triangle_2 > 0, ...$ respectivamente

Ejemplo: Consideremos la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = \sin x + \sin y + \sin z - \sin(x + y + z)$, el punto $P = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ es un punto crítico de f y en ese punto la matriz hessiana de f es

$$H(p) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

los determinantes de las submatrices angulares son

$$\Delta_1 = det(-2)$$

$$\Delta_2 = det \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = det H(p) = -4$$

puesto que son signos alternantes con $\Delta t < 0$ concluimos que la funcion f tiene en $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ un máximo local. Este máximo local vale $f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) = 4$