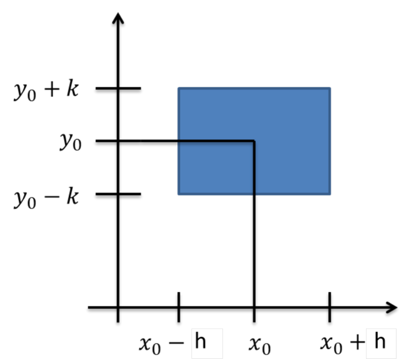
El Teorema de la función implicita versión para funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Teorema 1. *Considere la función $y=f(x)$. Sea $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ un punto tal que $F(x_0,y_0)=0$. Suponga que la función F tiene derivadas parciales continuas en alguna bola con centro (x_0,y_0) y que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$.*
Entonces $F(x,y)=0$ se puede resolver para y en términos de x y definir así una función $y=f(x)$ con dominio en una vecindad de (x_0,y_0), tal que $y_0=f(x_0)$, lo cual tiene derivadas continuas en $\mathcal{V}$ que pueden calcularse como $y'=f'(x)=-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$, $x\in\mathcal{V}$.

Demostración. Como $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\neq 0$ supongamos sin perdida de generalidad que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)>0$. Por ser $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ continua en una vecindad de (x_0,y_0) entonces exite un cuadrado S, centrado en (x_0,y_0) totalmente contenido en esa vecindad, en donde $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)>0\ \forall\ x,y\in S$.
Sea

$$S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid |x-x_0|<h \text{ y } |y-y_0|<k\}$$



En todo punto (x,y) que pertenece a S, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)>0$. Esto quiere decir que en S, F es creciente y fijando x_0 en $[x_0-h,x_0+h]$ se tiene que F es creciente en $[y_0-k,y_0+k]$ y se anula en y_0, por lo que

$$F(x_0,y_0-k)<0 \quad y \quad F(x_0,y_0+k)>0$$

Consideremos ahora el par de funciones $F(x,y_0-k)$ y $F(x,y_0+k)$ definidas en el intervalo (x_0-k,x_0+k). Donde ambas funciones solo tienen x como variable. La primera función cumple $F(x_0,y_0-k)<0$ y por ser continua en x_0, es negativa en toda una vecindad $(x_0-h_1x_0+h_1)$ de x_0.
Analogamente, la segunda función cumple $F(x_0,y_0+k)>0$ y por ser continua en x_0, es positiva en toda una vecindad $(x_0-h_2x_0+h_2)$ de x_0.
Sea $h=\min h_1,h_2$. Entonces para toda x tal que $|x-x_0|<h$ se tiene

$$F(x,y_0-k)<0 \quad y \quad F(x,y_0+k)>0$$

Fijemos x en el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$, y consideremos a $F(x, y)$, sólo como función de y, sobre $[y_0 - k, y_0 + k]$. Esta función cumple que

$$F(x, y_0 - k) < 0 \quad y \quad F(x, y_0 + k) > 0$$

por lo tanto segun el teorema del valor intermedio, existe un único y en $(y_0 - k, y_0 + k)$ tal que $F(x, y) = 0$. Así queda establecida la existencia y unicidad de la función $y = f(x)$. Donde además, $y_0 = f(x_0)$, y para todo $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$

$$F(x, f(x)) = 0, \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

□

Vamos a comprobar que la función es continua, para ello se tiene

$$x \in [x_0 - h, x_0 + h] \Rightarrow |x - x_0| < h$$

tomando $h < \delta$ se tiene

$$|x - x_0| < \delta$$

esto quiere decir que

$$|y - y_0| < k \quad es \quad decir \quad |f(x) - f(x_0)| < k$$

tomando $k = \epsilon$ se tiene que $y = f(x)$ es continua
Finalmente si

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$$

existen y son continuas entonces F es diferenciable por lo que

$$F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)k + R(h, k)$$

Tenemos que F es continua por lo que

$$F(x_0 + h, y_0 + k) - F(x_0, y_0) = 0 \quad si \quad h, k \to 0$$

también

$$R(h, k) \to 0 \quad si \quad h, k \to 0$$

por lo que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)k = 0$$

esto es

$$\frac{k}{h} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

y cuando $h, k \to 0$ se tiene

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

Importante: Este es un resultado que garantiza la existencia de una función $y = f(x)$ definida implícitamente por $F(x, y) = 0$. Esto es, puede resolverse para y en términos de x, pero no nos dice como hacer el despeje.

Ejemplo Considere la función $F(x,y) = e^{2y+x} + \sin(x^2+y) - 1$ en el punto (0,0) tenemos $F(0,0) = 0$. Las derivadas parciales de F son

$F_x = e^{2y+x} + 2x\cos(x^2+y)$
$F_y = 2e^{2y+x} + \cos(x^2+y)$ que son siempre continuas.

Además, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 3 \neq 0$ de modo que **T.F.Im.** garantiza una vecindad de $x = 0$ en la cual podemos definir una función $y = f(x)$ tal que $F(x, f(x)) = 0$. Obsérvese que en este caso no podemos hacer explícita la función $y = f(x)$ sin embargo tal función existe y su derivada es

$$y' = f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \frac{e^{2y+x} + 2x\cos(x^2+y)}{2e^{2y+x} + \cos(x^2+y)}$$

Ejemplo Considere $F(x,y) = x^4 - e^{xy^3-1}$ en el punto (1,1)
$F(1,1) = 1 - 1 = 0$, $F_x = 4x^3 - y^3e^{xy^3-1}$
Por lo tanto, $F_x|_{(1,1)} = 3$, $F_y = -3xye^{xy^3-1}$
Y así, $F_y|_{(1,1)} = -3$, y $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -3 \neq 0$.

El **T.F.Im.** nos garantiza que en los alrededores de (1,1) el nivel cero de F se ve como la gráfica de la función $y = f(x)$ y que su derivada es $y' = \dfrac{-4x^3 - y^3e^{xy^3-1}}{-3xy^2e^{xy^3-1}}$.

Observe que en este caso la función F permite hacer el despeje en términos de x.

$F(x,y) = x^4 - e^{xy^3-1} = 0$
$x^4 = e^{xy^3-1}$
$\ln(x^4) = xy^3 - 1$
$\left(\dfrac{\ln(x^4)+1}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = y = f(x)$ que al derivar se debe de llegar al mismo resultado.

Ejemplo Considere $F(x,y) = x^2 - y^3 - 1$ en el punto (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$ tal que
$F(x_0, y_0) = 0$, $F_x = 2x$, $F_y = 2y$
Por lo tanto, $F_x|_{(x_0,y_0)} = 2x_0$,
Y así, $F_y|_{(x_0,y_0)} = 2y_0$, y $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y_0 \neq 0$.
El **T.F.Im.** nos garantiza que en los alrededores de (x_0, y_0) el nivel cero de F se ve como la gráfica de la función $y = f(x)$ y que su derivada es

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

en este caso

$$y'(x) = -\frac{2x_0}{2y_0} = -\frac{x_0}{y_0}$$

si $y_0 > 0$ tal función es $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ por lo que

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}$$

si $y_0 < 0$ tal función es $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$ por lo que

$$y' = -\frac{-x}{-\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}$$

El Teorema de la función implicita versión para funciones $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Considere la función $F(x, y, z)$. Sea $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ un punto tal que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Suponga que la función F tiene derivadas parciales $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ continuas en alguna bola con centro (x_0, y_0, z_0) y que $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.
Entonces $F(x, y, z) = 0$ se puede resolver para z en términos de x, y y definir así una función $z = f(x, y)$ con dominio en una vecindad de (x_0, y_0, z_0), tal que $z_0 = f(x_0, y_0)$, lo cual tiene derivadas continuas en $\mathcal{V}$ que pueden calcularse como

$$\frac{dz}{dx}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y)} \qquad \frac{dz}{dy}(x,y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y)}$$

Importante: Este es un resultado que garantiza la existencia de una función $z = f(x, y)$ definida implícitamente por $F(x, y, z) = 0$. Esto es, puede resolverse para z en términos de x, y, pero no nos dice como hacer el despeje.

Demostración. Idea de la demostración se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

podemos suponer que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) > 0$$

Por ser $\frac{\partial F}{\partial z}$ continua en una vecindad de (x_0, y_0, z_0) existe una bola centrada en (x_0, y_0, z_0) tal que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) > 0 \;\; \forall\ (x, y, z) \in \ bola$$

en este caso

$$bola = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x - x_0| < h,\ |y - y_0| < k,\ |z - z_0| < \ell\}$$

Tenemos que la función $F(x_0, y_0, z)$ es una función creciente sobre $[z_0 - \ell, z_0 + \ell]$ y asume el valor de cero en z_0 de tal forma que

$$F(x_0, y_0, z_0 - \ell) < 0, \quad F(x_0, y_0, z_0 + \ell) > 0$$

Consideremos el par de funciones

$$F(x,y,z_0-\ell) \quad y \quad F(x,y,z_0+\ell)$$

definidas para $(x,y)\in[x_0-h,x_0+h]\times[y_0-k,y_0+k]$
La primera satisface

$$F(x_0,y_0,z_0-\ell)<0$$

la segunda cumple

$$F(x_0,y_0,z_0+\ell)>0$$

Fijemos (x,y) en $[x_0-h,x_0+h]\times[y_0-k,y_0+k]$ y consideramos $F(x,y,z)$ solo como función de z, sobre $[z_0-\ell,z_0+\ell]$. Esta función cumple

$$F(x,y,z_0-\ell)<0 \quad y \quad F(x,y,z_0+\ell)>0$$

por lo que al aplicar el Teorema del valor intermedio, obteniendose un único z en $(z_0-\ell,z_0+\ell)$ en donde $F(x,y,z)=0$.
Queda así establecida la existencia y unicidad de la función $z=f(x,y)$ con dominio $[x_0-h,x_0+h]\times[y_0-k,y_0+k]$ y rango $[z_0-\ell,z_0+\ell]$
Vamos a probar que dicha f es continua, para ello si

$$\begin{pmatrix} x\in[x_0-h,y_0+h] \\ y\in[y_0-k,y_0+k]\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} |x-x_0|<h \\ |y-y_0|<k\end{pmatrix}$$

por lo que

$$\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<|x-x_0|+|y-y_0|<h+k$$

si $h<k$

$$\|(x,y)-(x_0,y_0)\|<2k=\delta$$

donde

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|z-z_0|<\ell=\epsilon$$

por lo tanto $f(x,y)$ es continua.
Ahora si suponemos que $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$, $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ son continuas en los alrededores de (x_0,y_0,z_0) en tonces F es diferenciable y se tiene

$$F(x_0+h,y_0,z_0+\ell)-F(x_0,y_0,z_0)=\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)h+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)0+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\ell+R(h,k,\ell)$$

De donde

$$F(x_0+h,y_0,z_0+\ell)-F(x_0,y_0,z_0)\to 0$$
$$R(h,k,\ell)\to 0$$

por lo que

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)h+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)\ell=0$$
$$\Rightarrow \ \frac{h}{\ell}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)}$$

y cuando $h, \ell \to 0$ se tiene

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

Analogamente

$$F(x_0, y_0 + k, z_0 + \ell) - F(x_0, y_0, z_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)0 + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)k + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\ell + R(h, k, \ell)$$

De donde

$$F(x_0, y_0 + k, z_0 + \ell) - F(x_0, y_0, z_0) \to 0$$
$$R(h, k, \ell) \to 0$$

por lo que

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)k + \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\ell = 0$$
$$\Rightarrow \ \frac{k}{\ell} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

y cuando $h, \ell \to 0$ se tiene

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

$\square$