Teorema de la Función Inversa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Teorema 1. *Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida sobre el abierto $A \subset \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in A$.*
(1) Supóngase que f tiene derivada continua y que $f'(x_0) \neq 0$.
(2) Entonces existe un intervalo abierto I que contiene al punto x_0 y un intervalo abierto j que contiene a $f(x_0)$, tal que la función $f : I \to J$ es uno a uno y sobre.
(3) Además, la función inversa $f^{-1} : J \to I$ también tiene derivada continua y para un punto $y \in J$, si $x \in I$ es tal que $f(x) = y$, entonces

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Ejercicio Obtener la tesis del teorema de la función inversa como aplicación del teorema de la función implicita

Solución Sea $y = f(x)$ una función real de variable real con derivada continua sobre un conjunto abierto A y sea x_0 un punto de A donde $f'(x_0) \neq 0$.
Considere la función $F(x, y) = y - f(x)$ y calculemos sus derivadas parciales. Así

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -f'(x) \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1$$

Nótese que F, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ son continuas sobre el conjunto

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A\}$$

Considere ahora como solución inicial el punto (x_0, y_0) donde $y_0 = f(x_0)$. Tenemos que

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$$

De manera que se cumplen las hipótesis del Teorema de la Función Implicita. Luego entonces cerca del punto (x_0, y_0) la variable x puede representarse en términos de la variable y. Estos expresado formalmente nos dice que existe una única función implicita $x = g(y)$ con dominio un intervalo $J = (y_0 - k, y_0 + k)$ y con rango $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ tal que

$$g(y_0) = x_0$$

y, para toda y, en el intervalo J

$$F(g(y), y) = 0 \quad y \quad \frac{\partial F}{\partial x}(g(y), y) \neq 0$$

ademas, g y su derivada g' son continuas sobre J, y

$$g'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(g(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(g(y), y)} = -\frac{1}{-f'(g(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

La función g que ha sido determinada no es otra que la función inversa

Ejemplo Sea f la función definida por la regla de correspondencia $f(x) = -x^5 - x$. Si calculamos su derivada, tenemos $f'(x) = -5x^4 - 1$. Observese que $f'(x) < 0$ para toda x en los reales, por lo que f es decreciente sobre toda la recta real y a su vez es uno a uno.
Concluimos así que la inversa de f está definida sobre toda la recta real y que su gráfica es decreciente. Sin embargo, no se puede obtener la regla de correspondencia para la inversa. Sin embargo, podemos calcular su derivada. Sea y cualquier número real y supóngase que x es tal que $f^{-1}(y) = x$. Así

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{5x^4+1}$$

Teorema de la Función Inversa (sistema $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

Teorema 2. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sean*

$$\begin{gathered} f_1 : U \to \mathbb{R} \\ \vdots \\ f_n : U \to \mathbb{R} \end{gathered}$$

con derivadas parciales continuas. Considerar las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = y_2 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = y_n \end{array}\right\} \textit{Tratamos de resolver las n-ecuaciones para } x_1, x_2, ...x_n \textit{como funciones de } y_1, y_2, ...y_n.$$

La condición de existencia para la solución en una vecindad del punto x_0 es que el determinante de la matriz $Df(x_0)$ y $f = (f_i, f_2, ...f_n)$ sean distintos de cero. Explicitamente:

$$\frac{\partial(f_1, f_2, ..., f_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}\Bigg|_{x=x_0} = J(f)(x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces el sistema anterior se puede resolver de manera 'unica como $x = g(y)$ para x cerca de x_0 y y cerca de y_0

Nota La cuestión de existencia se responde por medio del teorema general de la función implícita aplicado a las funciones $y_i - f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ con las incognitas $x_1, x_2, ..., x_n$.

Ejemplo Considerar las ecuaciones

$$\frac{x^4+y^4}{x} = u(x,y), \qquad \operatorname{sen}\ x + \cos y = v(x,y)$$

¿Cerca de cuáles puntos (x, y) podemos resolver para x,y en términos de u y v?

Solución Aquí las funciones son

$$u(x,y) = f_1(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x}, \quad y \quad v(x,y) = f_2(x,y) = \text{sen } x + \cos\ y$$

De acuerdo al teorema de la función inversa

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{3x^4-y^4}{x^2} & \frac{4y^3}{x} \\ \cos\ x & -\text{sen } y \end{vmatrix} = \frac{\text{sen } y}{x^2}(y^4-3x^4) - \frac{4y^3}{x}\cos\ x$$

por lo tanto, en los puntos donde la expresión anterior no se anula, se puede resolver para x,y en términos de u y v

Mas aún, si consideramos las expresiones:

$$\begin{array}{l} G(x,y,u,v) = x - f(u,v) = 0 \\ H(x,y,u,v) = y - g(u,v) = 0 \end{array}$$

Lo que pretendemos es "despejar"de ella a u y v en términos de x e y y poder establecer así las funciones $u = \varphi(x,y), v = \psi(x,y)$. Entonces el T.F.Im. (tercera versión) nos da las condiciones para que podamos hacer esto. Sea $P = (x,y,u,v)\epsilon\mathbb{R}^4$ un punto tal que $G(p) = H(p) = 0$. Supongamos que en una bola de centro en P las derivadas parciales de G y H son continuas. Si el jacobiano

$$\frac{\partial(G,H)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u} & -\frac{\partial f}{\partial v} \\ -\frac{\partial g}{\partial u} & -\frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0$$

en P, entonces es posible "despejar"de ellas a u y v en terminos de x e y, y establecer así funciones $u = \varphi(x,y), v = \varphi(x,y)$ definidas en una vecindad V de $(x,y) = F(u,v)$, las cuales tienen derivadas parciales continuas en V que se pueden calcular como

$$\frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{\partial f}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial G}{\partial v} = -\frac{\partial f}{\partial v}\ ,\ \frac{\partial H}{\partial u} = -\frac{\partial g}{\partial u}\ ,\ \frac{\partial H}{\partial v} = -\frac{\partial g}{\partial v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(G,H)}{\partial((x,v)}}{\frac{\partial(G,H)}{\partial(u,v)}} = -\frac{1}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} det \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial v} \\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}} det \begin{vmatrix} 1 & -\frac{\partial f}{\partial v} \\ 0 & -\frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

Por lo tanto: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(G,H)}{\partial((y,v)}}{\frac{\partial(G,H)}{\partial(u,v)}}=-\frac{1}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}det\begin{vmatrix}\frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial v}\\ \frac{\partial H}{\partial y} & \frac{\partial H}{\partial v}\end{vmatrix}=-\frac{1}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}det\begin{vmatrix}0 & -\frac{\partial f}{\partial v}\\ 1 & -\frac{\partial g}{\partial v}\end{vmatrix}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

Por lo tanto: $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(G,H)}{\partial((u,x)}}{\frac{\partial(G,H)}{\partial(u,v)}}=-\frac{1}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}det\begin{vmatrix}\frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial x}\\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial x}\end{vmatrix}=-\frac{1}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}det\begin{vmatrix}-\frac{\partial f}{\partial u} & 1\\ -\frac{\partial g}{\partial u} & 0\end{vmatrix}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial u}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(G,H)}{\partial((u,y)}}{\frac{\partial(G,H)}{\partial(u,v)}}=-\frac{1}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}det\begin{vmatrix}\frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial y}\\ \frac{\partial H}{\partial u} & \frac{\partial H}{\partial y}\end{vmatrix}=-\frac{1}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}det\begin{vmatrix}-\frac{\partial f}{\partial u} & 0\\ -\frac{\partial g}{\partial u} & 1\end{vmatrix}=\frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}$$

En resumen tenemos: Sean $f,g:U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ funciones definidas en el conjunto abierto U de $\mathbb{R}^2$. Sean $x=f(u,v)$, $y=g(u,v)$. Suponga que alguna bola B de $\mathbb{R}^2$ con centro (u,v), las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$, $\frac{\partial g}{\partial u}$, $\frac{\partial g}{\partial v}$ son continuas. Si el jacobiano $\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}$ es no nulo en (u,v) entonces $\exists$ una vecindad V de $\bar{x},\bar{y}$ donde podemos definir "funciones inversas" $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$ es decir tales que $u=\varphi(x,y),v=\psi(x,y)$, y $f(\varphi(x,y),\psi(x,y))=x,g(\varphi(x,y),\psi(x,y))=y$ para $(x,y)\epsilon V$ las cuales tienen derivadas parciales continuas en V que se calculan como

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial u}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}}\qquad(*)$$

Ahora bien con las funciones $u=\varphi(x,y),\quad v=\psi(x,y)$. Podemos formar el sistema

$$G(x,y,u,v)=u-\varphi(x,y)$$
$$H(x,y,u,v)=v-\psi(x,y)$$

se tiene entonces que

$$\frac{\partial(G,H)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y}\\ \frac{\partial H}{\partial x} & \frac{\partial H}{\partial y}\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial x} & -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} & -\frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$JF^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

El resultado anterior $(*)$ nos dice como calcular las derivadas parciales $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ en una vecindad V de (x,y) al sustituir las fórmulas correspondientes en JF^{-1}, recordando que $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)} = det(JF)$.

$$JF^{-1} = \begin{vmatrix} \dfrac{\frac{\partial g}{\partial v}}{det(JF)} & -\dfrac{\frac{\partial g}{\partial u}}{det(JF)} \\ \\ -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial v}}{det(JF)} & \dfrac{\frac{\partial f}{\partial U}}{det(JF)} \end{vmatrix} = \frac{1}{det(JF)} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial v} & -\dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \\ -\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \end{vmatrix}$$

Multipliquemos JF y JF^{-1}, se obtiene

$$(JF)(JF^{-1}) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \frac{1}{det(JF)} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial v} & -\dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \\ -\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} = \frac{1}{det(JF)} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial v} & -\dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \\ -\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{det(JF)} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial v} - \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial g}{\partial u} & 0 \\ \\ 0 & -\dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{\partial f}{\partial v} + \dfrac{\partial g}{\partial v}\dfrac{\partial f}{\partial u} \end{vmatrix} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial g}{\partial v} - \dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial g}{\partial u}}{det(JF)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así concluimos que la matriz jacobiana de la función inversa de F es justamente la inversa de la matriz jacobiana de F. Es decir se tiene

$$JF^{-1} = (JF)^{-1}$$

Ejemplo Considere las ecuaciones dadas por $x = u^2 + v^3$, $\;y = u^2 + uv$. Se tiene que en $p = (1,2)$ $x = 9,\; y = 3$.

Las derivadas parciales de las funciones $x = f(u,v) = u^3 + v^3$, $y = g(u,v) = u^2 + uv$ son

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 3u^2 \;,\; \frac{\partial f}{\partial v} = 3v^2 \;,\; \frac{\partial g}{\partial u} = 2u + v \;,\; \frac{\partial g}{\partial v} = u$$

La matriz jacobiana de f es

$$JF = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial v} \\ \dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3u^2 & 3v^2 \\ 2u+v & u \end{vmatrix}$$

la cual en el punto $(1,2)$ es invertible pues

$$detJF(1,2) = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -45 \neq 0$$

Así podemos concluir que en una bola B' de $(9,3)$ se da la inversa F^{-1} de F o bien, que podemos despejar de $x = u^3 + v^3, y = u^2 + uv$ a u, v como funciones de x e y, la cual es de clase C^1 en B' y que su derivada es

$$JF^{-1}(x,y) = [JF(u,v)]^{-1} = \frac{1}{detJF}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g}{\partial v} & -\dfrac{\partial f}{\partial v} \\ -\dfrac{\partial g}{\partial u} & \dfrac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} = \frac{1}{3u^3 - 6uv^2 - 3v^3}\begin{vmatrix} u & -3v^2 \\ -(2u+v) & 3u^2 \end{vmatrix}$$

donde $x = u^3 + v^3, y = u^2 + uv$. Es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x}(u^3+v^3, u^2+uv) = \frac{u}{3u^3 - 6uv^2 - 3v^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(u^3+v^3, u^2+uv) = \frac{-3v^2}{3u^3 - 6uv^2 - 3v^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(u^3+v^3, u^2+uv) = \frac{-2u+v}{3u^3 - 6uv^2 - 3v^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(u^3+v^3, u^2+uv) = \frac{3u^2}{3u^3 - 6uv^2 - 3v^3}$$

Ejemplo Considere las ecuaciones

$$x = u + v + e^w$$

$$y = u + w + e^{2v}$$

$$x = v + w + e^{3u}$$

para $p = (u,v,w) = (0,0,0)$ se tiene que $q = (x,y,z) = (1,1,1)$ el determinante de la matriz jacobiana de la función $F(u,v,w))(x,y,z)$ es:

$$detJF = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & e^w \\ 1 & 2e^{2v} & 1 \\ 3e^{3u} & 1 & 1 \end{vmatrix}_{(0,0,0)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Si calculamos su determinante obtenemos

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times (2-1) - 1 \times (1-3) + 1 \times (1-6) = 1 + 2 - 5 = -2 \neq 0$$

$\therefore$ Podemos localmente invertir la función F, entorno al punto q, donde podemos definir funciones de clase c^1 $u(x,y,z), v(x,y,z)$ y $w(x,y,z)$. Ahora bien como

$$JF^{-1}(q) = [JF(p)]^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} \underbrace{=}_{*} \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

* Vamos a calcular la inversa usando la matriz de cofactores de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{1+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (1)^{2+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{2+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ (-1)^{3+1} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & (-1)^{3+2} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & (1)^{3+3} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transponiendo la ultima matriz tenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\therefore$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}^{-1} = \frac{1}{-2} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$\therefore$ las parciales son:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(q) = -\frac{1}{2} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(q) = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z}(q) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(q) = -1 \quad \frac{\partial v}{\partial y}(q) = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial z}(q) = 0$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(q) = \frac{5}{2} \quad \frac{\partial w}{\partial y}(q) = -1 \quad \frac{\partial w}{\partial z}(q) = -\frac{1}{2}$$