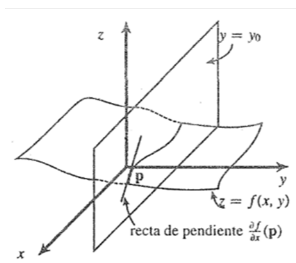
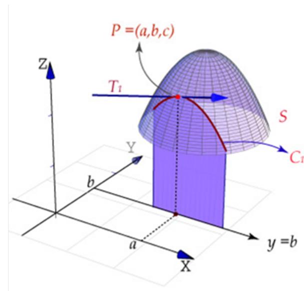
Diferenciación de funciones $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_n)\epsilon \mathring{A}$. Se define la derivada pacial i-esima en $\overline{a}$ denotada $f_x(\overline{a})$, $D_x f(\bar{a})$ ó $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\bar{a})$ de la forma $f_x = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots . a_n) - f(\bar{a})}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a + he_i) - f(a)}{h}$ siendo $\bar{e}_i = (0, \ldots, \underset{i-esimo}{1}, \ldots, 0)$. Si $n = 2$ existen 2 derivadas parciales.

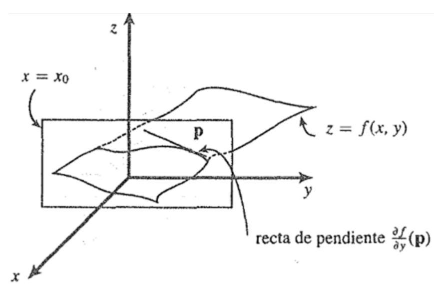
Sea $\bar{a} = (x_0, y_0)$ un punto del interior del dominio de $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las derivas parciales de f en el punto $\bar{a}$ denotada respectivamente por $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ son:

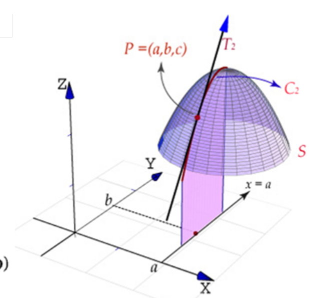
$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$





$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$





Ejemplo Sea $f : I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^2y^3$

Calcular f_x, f_y

En este caso

$$\begin{aligned} f_x &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(x + h)^2y^3 - x^2y^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2xy^3 + hy^3 = 2xy^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_y &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2(y+h)^3 - x^2y^3}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 3x^2y^2 + hy^3 \\ &= 3x^2y^2 \end{aligned}$$

Ejemplo Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Calculemos $f_x(0,0)$

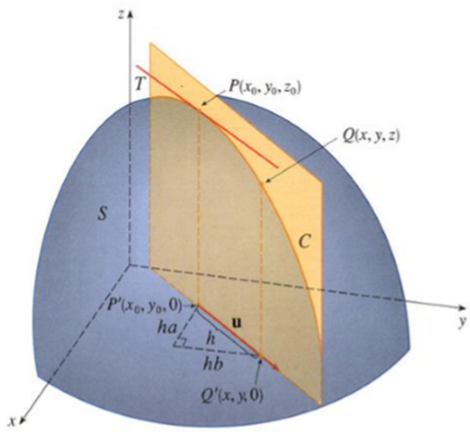
$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h(0)}{h^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0 \\ f_y(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(0)h}{h^2}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0 \end{aligned}$$

En este caso $f_x = 0 = f_y$ sin embargo la función no es continua

Derivada Direccional en un punto

Definición 1. *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $x_0 \in A$. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ con $\|u\| = 1$ la derivada direcional de f en la dirección del vector u, en el punto x_0 denotada por $\frac{\partial f}{\partial u}(x_0)$, se define por*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+hu)-f(x_0)}{h}$$



Ejemplo Sea $f(x,y) = x^2y$ y sea $u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ por lo tanto la derivada direccional en (x_0, y_0) es:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f\left((x_0,y_0) + h\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right) - f(x_0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(x_0 + \frac{h}{\sqrt{5}}\right)^2\left(y_0 + \frac{2h}{\sqrt{5}}\right) - x_0^2 y_0}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(x_0^2 + \frac{2x_0h}{\sqrt{5}} + \frac{h^2}{5}\right)\left(y_0 + \frac{2h}{\sqrt{5}}\right) - x_0^2 y_0}{h} = \frac{2x_0^2}{\sqrt{5}} + \frac{2x_0y_0}{\sqrt{5}}$$

Notas:
1. La derivada direccional indica la variación de la función en la dirección de $\bar{u}$.
2. Las derivadas parciales son derivadas direccionales respecto a los vectores de la base canonica.

Diferenciabilidad

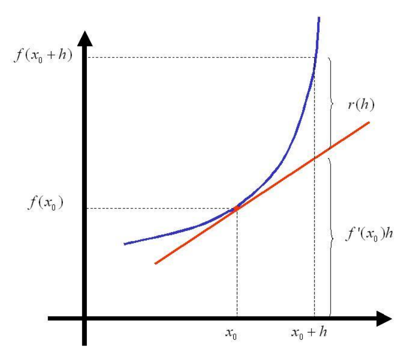
Idea Geometrica

$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
si $x = x_0$
$y = f(x_0)$
si $x = x_0 + h$
$y = f'(x_0)h$
$\therefore \quad r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h \qquad$ (Diferencial)
donde

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0)$$

Debería ocurrir

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$



Definición 2. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, un abierto, $f : A \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in A$. Se dice que f es diferenciable en (x_0, y_0) si existen constantes A_1, A_2 tal que*

$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x_0, y_0) + A_1 h_1 + A_2 h_2 + r(h_1, h_2)$$

donde

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

En la definición anterior si se toma $h = (h_1, 0)$ se tiene

$$f((x_0, y_0) + (h_1, 0)) = f(x_0, y_0) + A_1 h_1 + A_2(0) + r(h_1, 0)$$

donde

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} - A_1 = \lim_{h_1\to 0} \frac{r(h_1, 0)}{h_1}$$

como

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{r(h_1, 0)}{h_1} = 0$$

se tiene

$$\lim_{h_1\to 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} - A_1 = 0$$

en consecuencia

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} = A_1$$

En la definición anterior si se toma $h = (0, h_2)$ se tiene

$$f((x_0, y_0) + (0, h_2)) = f(x_0, y_0) + A_1(0) + A_2 h_2 + r(0, h_2)$$

donde

$$\lim_{h_2\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{h_2} - A_2 = \lim_{h_2\to 0} \frac{r(0, h_2)}{h_2}$$

como

$$\lim_{h_2\to 0} \frac{r(0, h_2)}{h_2} = 0$$

se tiene

$$\lim_{h_0\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{h_2} - A_2 = 0$$

en consecuencia

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h_2\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{h_2} = A_2$$

Definición 3. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, un abierto, $f : A \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in A$. Se dice que f es diferenciable en (x_0, y_0) si existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ tal que*

$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) h_2 + r(h_1, h_2)$$

donde

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$