Ejemplo Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ y sea $u = (a,b) \in \mathbb{R}^2$ un vector unitario dado, tenemos entonces que la derivada direccional en $(0,0)$ es:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(ha,hb)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(ha)^2(hb)}{(ha)^4+(hb)^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3(a^2b)}{h^3(h^2a^4+b^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{(a^2b)}{(h^2a^4+b^2)} = \frac{a^2}{b}$$

Por lo tanto esta función posee derivadas direccionales en todas direcciones. Sin embargo no es continua en $(0,0)$, pues tendría que ocurrir

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$$

pero si nos acercamos al $(0,0)$ por la trayectoria $y = x^2$ se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,x^2) = \lim_{(x)\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

por lo tanto esta función no es continua en $(0,0)$

Proposición 1. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$ y $\hat{u} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|\hat{u}\| = 1$. Si $D_{\hat{u}}f(x_0)$ existe entonces*

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h\hat{u}) = f(x_0)$$

Demostración. Tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} f(x_0+h\hat{u}) - f(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h\hat{u})-f(x_0)}{h} \cdot h \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h\hat{u})-f(x_0)}{\cdot} \lim_{h\to 0} h \\ &= D_{\hat{u}}f(x_0) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h\hat{u}) = f(x_0)$$

□

La proposición anterior nos dice que si la derivada direccional existe en la dirección $\hat{u}$ entonces la función restringida a esa dirección es continua en el punto x_0

Proposición 2. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Si $f_x(x_0,y_0)$ existe entonces*

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h,y_0) = f(x_0,y_0)$$

Demostración. Tenemos que

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h,y_0) - f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} \cdot h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{\cdot} \lim_{h\to 0} h$$

$$= f_x(x_0,y_0)\cdot 0 = 0$$

por lo tanto

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h,y_0) = f(x_0,y_0)$$

□

La proposición anterior nos dice que si la derivada parcial existe en (x_0,y_0) entonces la función restringida a esa dirección es continua en el punto (x_0,y_0)

Proposición 3. *Sea* $f : A\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x_0\in A$. *Si* $f_y(x_0,y_0)$ *existe entonces*

$$\lim_{h\to 0} f(x_0,y_0+h) = f(x_0,yo)$$

Demostración. Tenemos que

$$\lim_{h\to 0} f(x_0,y_0+h) - f(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}\cdot h$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{\cdot} \lim_{h\to 0} h$$

$$= f_y(x_0,y_0)\cdot 0 = 0$$

por lo tanto

$$\lim_{h\to 0} f(x_0,y_0+h) = f(x_0,y_0)$$

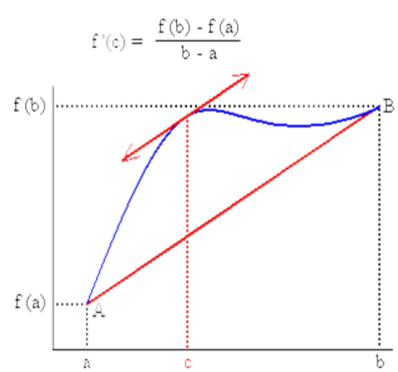
□

La proposición anterior nos dice que si la derivada parcial existe en (x_0,y_0) entonces la función restringida a esa dirección es continua en el punto (x_0,y_0)

Teorema del Valor Medio de Funciones de $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

Teorema 1. *Suponga que* $f : [a,b]\to\mathbb{R}$ *es derivable en* (a,b) *y continua en* $[a,b]$ *entonces existe* $c\in(a,b)$ *tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



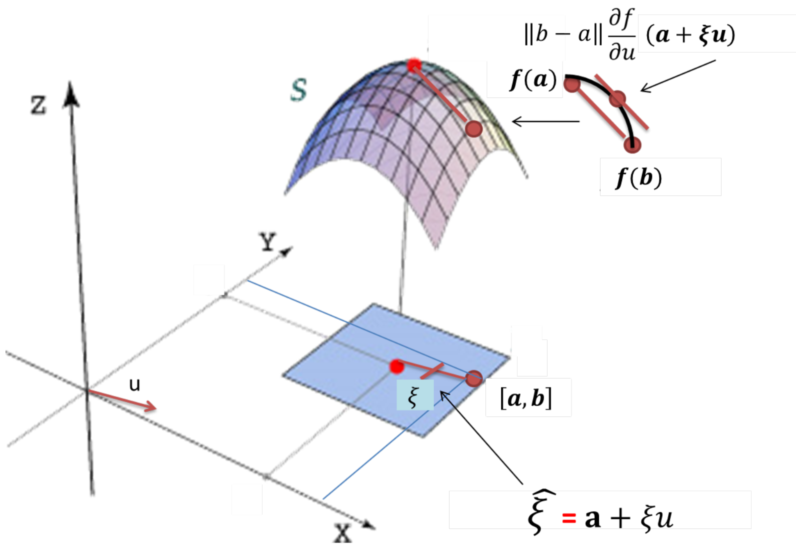
Teorema del Valor Medio para la derivada direccional en funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Teorema 2. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto A de $\mathbb{R}^n$. Si $a, b \in A$ se pide que el conjunto A sea tal que $[a, b] = \{a + t(b - a) \mid t \in [0, 1]\} \subset A$. Sea*

$$u = \frac{b - a}{\|b - a\|} \in \mathbb{R}^n$$

un vector unitario en la dirección del vector $b - a$. Si la función f es continua en los puntos del segmento $[a, b] \subset A$ y tiene derivadas direccionales en la dirección del vector u en los puntos del segmento $[a, b]$, entonces existe $\xi \in (0, \|b - a\|)$ tal que si $\hat{\xi} = a + \xi u$, se cumple

$$f(b) - f(a) = \|b - a\| D_u f(\xi)$$



Demostración. Considere la función $g : [0, \|b - a\|] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f(a + tu)$ ciertamente la función g es continua en $[0, \|b - a\|]$ pues f lo es en $[a, b]$. Ademas

$$\begin{aligned} g'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{g(t + h) - g(t)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + (t + h)u) - f(a + tu)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f(a + tu + hu) - f(a + tu)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}(a + tu) \end{aligned}$$

por lo que g es derivable para toda t en $[0, \|b-a\|]$ de tal forma que aplicando el TVM a la función g existe $\hat{\xi} = a + \xi u$ tal que

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= g(\|b-a\|) - g(0) \\ &= (\|b-a\| - 0)\, g'(\xi) \\ &= (\|b-a\|)\, D_u f(a + \xi u) \\ &= (\|b-a\|)\, D_u f(\hat{\xi}) \end{aligned}$$

□

Diferenciabilidad de Funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definición 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, un abierto, $f : A \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in A$. Se dice que f es diferenciable en (x_0, y_0) si existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ tal que*

$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + r(h_1, h_2)$$

donde

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

Ejemplo Verificar la diferenciabilidad de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Solución En este caso se tiene que

$$\begin{gathered} f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = (x_0 + h_1)^2 + (y_0 + h_2)^2 \\ f(x_0, y_0) = x_0^2 + y_0^2 \\ \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right) h_1 = 2x_0 h_1 \\ \left(\tfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) h_2 = 2y_0 h_2 \end{gathered}$$

Por lo tanto

$$(x_0 + h_1)^2 + (y_0 + h_2)^2 = x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 h_1 + 2y_0 h_2 + r(h_1, h_2)$$

simplificando se tiene

$$h_1^2 + h_2^2 = r(h_1, h_2) \;\Rightarrow\; \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{h_1^2 + h_2^2}{\|(h_1, h_2)\|} = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = 0$$

por lo tanto f es diferenciable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Teorema 3. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto A de $\mathbb{R}^n$. Si las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $\forall i = 1, .., n$ son continuas en $x_0 \in A$ entonces f es diferenciable en $x_0 \in A$*

Vamos a dar una idea de la demostración para el caso n=2

Teorema 4. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto A de $\mathbb{R}^2$. Si las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existen y son continuas en $(x_0, y_0) \in A$ entonces f es diferenciable en $(x_0, y_0) \in A$*

Demostración. Vamos a probar que

$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + r(h_1, h_2)$$

donde

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

para ello tenemos que

$$r(h_1, h_2) = f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2$$

sumando un cero adecuado

$$r(h_1, h_2) = f((x_0, y_0)+(h_1, h_2))-f(x_0, y_0 + h_2)+f(x_0, y_0 + h_2)-f(x_0, y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2$$

trabajaremos

$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) - f(x_0, y_0 + h_2)$$

Considerando la función $\varphi(x) = f(x, y_0 + h_2)$ por lo tanto tenemos que

$$\varphi'(x) = \lim_{h_1\to 0} \frac{\varphi(x + h_1) - \varphi(x)}{h_1} = \lim_{h_1\to 0} \frac{f(x + h_1, y_0 + h_2) - f(x, y_0 + h_2)}{h_1}$$

este limite existe y nos dice que φ es es continua en este caso en el intervalo $[x_0, x_0 + h_1]$. Por lo tanto aplicando el TVM en dicho intervalo se obtiene

$$\varphi(x_0 + h_1) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)h_1$$

es decir

$$f((x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0 + h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0 + h_2)h_1$$

Analogamente

$$f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)$$

Considerando la función $\varphi(y) = f(x_0, y)$ por lo tanto tenemos que

$$\varphi'(y) = \lim_{h_2\to 0} \frac{\varphi(x_0, y_0 + h_2) - \varphi(y_0 + h_2)}{h_2} = \lim_{h_2\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(y_0 + h_2)}{h_2}$$

este limite existe y nos dice que φ es es continua en este caso en el intervalo $[y_0, y_0+h_2]$. Por lo tanto aplicando el TVM en dicho intervalo se obtiene

$$\varphi(y_0+h_2)-\varphi(y_0)=\varphi'(\xi)h_2$$

es decir

$$f((x_0,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\xi)h_2$$

Sustituimos en

$$r(h_1,h_2)=f((x_0,y_0)+(h_1,h_2))-f(x_0,y_0+h_2)+f(x_0,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2$$

y obtenemos

$$r(h_1,h_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0+h_2)h_1-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\xi)h_2-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)h_2$$

es decir

$$r(h_1,h_2)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0+h_2)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)h_1+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\xi)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)h_2$$

por lo tanto

$$\frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|}=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0+h_2)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\frac{h_1}{\|(h_1,h_2)\|}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\xi)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\frac{h_2}{\|(h_1,h_2)\|}$$

ahora bien si $\|(h_1,h_2)\|\to(0,0)$ se tiene

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,y_0+h_2)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)\to 0$$

y

$$\frac{h_1}{\|(h_1,h_2)\|}<1$$

Analogamente

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\xi)-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\to 0$$

y

$$\frac{h_2}{\|(h_1,h_2)\|}<1$$

en consecuencia

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)}\frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|}=0$$

por lo tanto f es diferenciable en (x_0,y_0) □