Diferenciabilidad de Funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Definición 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, un abierto, $f : A \to \mathbb{R}$ y $(x_0, y_0) \in A$. Se dice que f es diferenciable en (x_0, y_0) si existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ tal que*

$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + r(h_1, h_2)$$

donde

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = 0$$

Diferenciabilidad implica continuidad de Funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Teorema 1. *Si la función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en A de $\mathbb{R}^2$, es diferenciable en el ´punto $p = (x_0, y_0) \in A$, entonces es continua en ese punto*

Demostración. Si f es diferenciable en el ´punto $p = (x_0, y_0) \in A$ se tiene

$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + r(h_1, h_2)$$

tomando limite se tiene

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = \lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} f(x_0, y_0) + \cancel{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2} + \cancel{r(h_1, h_2)}$$

se tiene entonces que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x_0, y_0)$$

por lo que f es continua en (x_0, y_0) $\square$

Aplicacion del Teorema del Valor Medio de Funciones de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Teorema 2. *Suponga que $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \le M \quad y \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \le M$$

donde M no depende de x, y entonces f es continua en A.

Demostración. Sean (x_0, y_0), $(x_0 + h_1, y_0 + h_2) \in A$ tenemos entonces que

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0 + h_1, y_0) + f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)$$

Aplicando teorema del valor medio se tiene que existen $\xi_1, \in (x_0, x_0 + h_1)$ $\xi_2 \in (y_0, y_0 + h_2)$ tal que

$$f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0 + h_1, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + h_1, \xi_2)h_2$$

$$f(x_0+h_1,y_0)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1,y_0+h_2)h_1$$

por lo tanto

$$|f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)|=\left|\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h_1,\xi_2)h_2\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1,y_0+h_2)h_1\right)\right|\leq$$

$$\left|\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h_1,\xi_2)\right)\right||h_2|+\left|\left(\frac{\partial f}{\partial x}(\xi_1,y_0+h_2\right)\right|)|h_1|\leq M(|h_2|+|h_1|)$$

si tenemos que $\|(h_1,h_2)\|<\delta$ entonces

$$M(|h_2|+|h_1|)<2M\delta \quad \therefore \quad \epsilon=2M\delta\Rightarrow\delta=\frac{\epsilon}{2M}$$

□

Diferenciabilidad y Derivadas Direccionales

Teorema 3. *Si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es una función diferenciable en x_0 en la dirección del vector unitario u entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\ f}{\partial x_i}\cdot u_i$$

Demostración. Sea $u\in\mathbb{R}^n$ tal que $u\neq 0$ y $\|u\|=1$ como f es diferenciable en x_0, se tiene que

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i+r(h)$$

satisface

$$\lim_{(h)\to 0}\frac{r(h)}{\|(h)\|}=0$$

tomando $h=tu$ se tiene $\|h\|=\|tu\|=|t|\|u\|=|t|$
se tiene entonces

$$f(x_0+t(u))-f(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)tu_i+r(tu)$$

tenemos entonces

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x_0+t(u))-f(x_0)}{t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)u_i+\cancel{\lim_{t\to 0}r(tu)}$$

es decir

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)u_i$$

□

Ejemplo Halle la derivada direccional de $f(x,y)=\ln(x^2+y^3)$ en el punto $(1,-3)$ en la dirección $(2,-3)$

Solución En este caso

$$u = (2, -3) \ \Rightarrow \ \|u\| = \sqrt{13} \ \rightarrow \ \frac{u}{\|u\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, -3) = \frac{2x}{x^2 + y^3} \,|_{(1,-3)} = \frac{-2}{26}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, -3) = \frac{3y^2}{x^2 + y^3} \,|_{(1,-3)} = \frac{-27}{26}$$

por lo tanto

$$D_{\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)} f\,(1, -3) = \left(\frac{-2}{26}\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) + \left(\frac{-27}{26}\right) \cdot \left(\frac{-3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{77\sqrt{13}}{338}$$

El Gradiente

Definición 2. *Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $x_0 \in A$. Entonces el vector cuyas componentes son las derivadas parciales de f en x_0 se le denomina Vector Gradiente*

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0),\right)$$

y se le denota por ∇f.

En el caso particular $n = 2$ se tiene

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0)\right)$$

En el caso particular $n = 3$ se tiene

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0), \frac{\partial f}{\partial z}(x_0)\right)$$

Ejemplo Calcular ∇f para $f(x, y) = x^2 y + y^3$

Solución En este caso

$$\nabla f(x, y) = \left(2xy, x^2 + 3y^2\right)$$

Teorema 4. *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable en (x_0, y_0) en la dirección del vector unitario u entonces*

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot u$$

Demostración. Sea $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u \neq 0$ y $\|u\| = 1$ como f es diferenciable en (x_0, y_0), se tiene que

$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2 + r(h_1, h_2)$$

satisface
$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = 0$$
tomando $h = tu$ se tiene $\|h\| = \|(h_1,h_2)\| = \|tu\| = |t|\|u\| = |t|$
se tiene entonces
$$f((x_0,y_0)+t(u)) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)tu_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)tu_2 + r(tu_1,ru_2)$$
y también
$$\frac{r(h_1,h_2)}{\|(h_1,h_2)\|} = \frac{r(tu_1,ru_2)}{\|tu\|} = \frac{r(tu_1,ru_2)}{|t|\|u\|} = \frac{r(tu_1,ru_2)}{|t|}$$
tenemos entonces
$$\lim_{t\to0} \frac{r(tu_1,ru_2)}{|t|} = \lim_{t\to0} \frac{f((x_0,y_0)+t(u)) - f(x_0,y_0)}{|t|} - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)tu_1}{|t|} - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)tu_2}{|t|}$$
es decir
$$0 = \frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)u_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)u_2$$
y en consecuencia
$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)u_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0\right)\cdot(u_1,u_2) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot u$$
□

Ejemplo Halle la derivada direccional de $f(x,y) = \ln(x^2+y^3)$ en el punto $(1,-3)$ en la dirección $(2,-3)$

Solución En este caso
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,-3) = \frac{2x}{x^2+y^3}\Big|_{(1,-3)} = \frac{-2}{26}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,-3) = \frac{3y^2}{x^2+y^3}\Big|_{(1,-3)} = \frac{-27}{26}$$
por lo tanto
$$\nabla f(1,-3) = \left(\frac{-2}{26}, \frac{-27}{26}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{77}{26\sqrt{13}} = \frac{77\sqrt{13}}{338}$$

Dirección de Mayor Crecimiento de una Función

Teorema 5. *Supongamos que $\nabla(f(x)) \neq (0,0,0)$. Entonces $\nabla(f(x))$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f crece más rápido.*

Demostración. Si v es un vector unitario, la razón de cambio de f en la dirección v está dada por $\nabla(f(x))\cdot v$ y $\nabla(f(x))\cdot v = \|\nabla f(x)\|\ \|v\|\cos\Theta = \|\nabla f(x)\|\cos\Theta$, donde Θ es el ángulo entre ∇f, v. Este es máximo cuando $\Theta = 0$ y esto ocurre cuando v, ∇f son paralelos. En otras palabras, si queremos movernos en una dirección en la cual f va a crecer más rápidamente, debemos proceder en la dirección $\nabla f(x)$. En forma análoga, si queremos movernos en la dirección en la cual f decrece más rápido, habremos de proceder en la dirección $-\nabla f$. □

Ejemplo Encontrar la dirección de rapido crecimiento en $(1,1,1)$ para $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Solución En este caso

$$\nabla f(1,1,1) = \left(\frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial x}, \frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial y}, \frac{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{\partial z} \right)\Big|_{(1,1,1)} =$$

$$\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, -\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\Big|_{(1,1,1)} = -\frac{1}{3\sqrt{3}}(1,1,1)$$

Podemos tomar

$$u = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$$

en este caso

$$u = \frac{-\frac{1}{3\sqrt{3}}(1,1,1)}{\frac{1}{3}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Puntos Estacionarios

Definición. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable, a los puntos $x \in \Omega$ tales que $\nabla f(x) = 0$ se les llama puntos críticos (o punto estacionario) de la función.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^2 - y^2$ hallar los puntos críticos de f

Se tiene que $\nabla f(x) = (2x, 2y)$ $\quad \nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x,2y) = (0,0) \Leftrightarrow 2x = 0$ y $2y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ y $y = 0$
$\therefore (0,0)$ es el único punto crítico de f

Ejemplo. Que condición se debe satisfacer para que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx - ey + f$ tenga un punto crítico

$$\nabla f = (2ax + 2by + d, 2bx + 2cy - e) \qquad \text{entonces}$$

$$\nabla f = 0 \Leftrightarrow 2ax + 2by + d = 0 \text{ y } 2bx + 2cy - e = 0$$

$$\Rightarrow 2ax + 2by = -d \quad \text{ y } \quad 2bx + 2cy = e \quad \text{ se necesita que } \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow 2a(2c) - (2b)^2 \neq 0 \qquad \therefore ac - b^2 \neq 0$$