Caso particular de la regla de la cadena

Supongamos que $C:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ es una trayectoria diferenciable y $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. Sea $h(t){=}f(x(t),y(t),z(t))$ donde $c(t){=}(x(t),y(t),z(t))$. Entonces

$$\frac{\partial h}{\partial t}{=}\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$

Esto es: $\dfrac{\partial h}{\partial t}{=}\nabla f(c(t))\cdot c'(t)$, donde $c'(t){=}((x'(t),y'(t),z'(t))$

Dem: Por definición $\dfrac{\partial h}{\partial t}(t_0){=}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}$ Sumando y restando tenemos que

$$\frac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0}{=}\frac{f(c(t))-f(c(t_0))}{t-t_0}{=}\frac{f(x(t),y(t),z(t))-f(x(t_0),y(t_0),z(t_0))}{t-t_0}{=}$$

$$=\frac{f(x(t),y(t),z(t))\ -\ f(x(t_0),y(t),z(t))\ +\ f(x(t_0),y(t),z(t))\ -\ f(x(t_0),y(t_0),z(t))\ +\ f(x(t_0),y(t_0),z(t))\ -\ f(x(t_0),y(t_0),z(t_0))}{t-t_0}\ldots *$$

Aplicando el Teorema del valor medio **(T.V.M.)**

$$f(\ x(t),\ y(t),\ z(t))-f(\ x(t_0),\ y(t),\ z(t)){=}\ \frac{\partial f}{\partial x}(\ c,\ y(t),\ z(t))\ (x(t)-x(t_0))$$

$$f(\ x(t_0),\ y(t),\ z(t))-f(\ x(t_0),\ y(t_0),\ z(t)){=}\ \frac{\partial f}{\partial y}\ (x(t),\ d,\ z(t))\ (y(t)-y(t_0))$$

$$f(\ x(t_0),\ y(t_0),\ z(t))-f(\ x(t_0),\ y(t_0),\ z(t_0)){=}\ \frac{\partial f}{\partial z}(\ x(t),\ y(t),\ e)\ (z(t)-z(t_0))$$

$$\therefore\ *\ =\ \frac{\partial f}{\partial x}\ (\ c,\ y(t),\ z(t))\ \frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0}+\frac{\partial f}{\partial y}\ (\ x(t),\ d,\ z(t))\ \frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0}+\frac{\partial f}{\partial z}\ (\ x(t),\ y(t),\ e))\ \frac{z(t)-z(t_0)}{t-t_0}$$

Tomando $\lim\limits_{t\to t_0}$ y por la continuidad de las parciales

$$\frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

Ejemplos: Caso particular de la regla de la cadena

Ejemplo Verificar la regla de la cadena para $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^2+3y^2$ y $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por $c(t)=(e^t,\cos(t))$

Solución En este caso $h(t)=f\circ c(t)\ \Rightarrow\ h'(t)=\dfrac{\partial h}{\partial t}$ y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(t))\cdot\frac{dx(t)}{dt}=\frac{\partial(x^2+3y^2)}{\partial x}\Big|_{(e^t,\cos(t))}\cdot\frac{d(e^t)}{dt}=2x\Big|_{(e^t,\cos(t))}\cdot e^t\ =2e^t\cdot e^t=2e^{2t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(c(t))\cdot\frac{dy(t)}{dt}=\frac{\partial(x^2+3y^2)}{\partial y}\Big|_{(e^t,\cos(t))}\cdot\frac{d(\cos(t))}{dt}=6y\Big|_{(e^t,\cos(t))}\cdot(-\operatorname{sen}(t))\;=6\cos(t)\cdot(-\operatorname{sen}(t))$$

por lo tanto

$$h'(t)=2e^{2t}-6\cos(t)\cdot(\operatorname{sen}(t))$$

Ejemplo Verificar la regla de la cadena para $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=xy$ y $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por $c(t)=(e^t,\cos(t))$

Solución En este caso $h(t)=f\circ c(t)\;\Rightarrow\;h'(t)=\dfrac{\partial h}{\partial t}$ y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(t))\cdot\frac{dx(t)}{dt}=\frac{\partial(xy)}{\partial x}\Big|_{(e^t,\cos(t))}\cdot\frac{d(e^t)}{dt}=y\Big|_{(e^t,\cos(t))}\cdot e^t\;=\cos(t)\cdot e^t$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(c(t))\cdot\frac{dy(t)}{dt}=\frac{\partial(xy)}{\partial y}\Big|_{(e^t,\cos(t))}\cdot\frac{d(\cos(t))}{dt}=x\Big|_{(e^t,\cos(t))}\cdot(-\operatorname{sen}(t))\;=e^t\cdot(-\operatorname{sen}(t))$$

por lo tanto

$$h'(t)=\cos(t)e^t-e^t\cdot\operatorname{sen}(t)$$

Ejemplo Verificar la regla de la cadena para $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=e^{xy}$ y $c:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ dada por $c(t)=(3t^2,t^3)$

Solución En este caso $h(t)=f\circ c(t)\;\Rightarrow\;h'(t)=\dfrac{\partial h}{\partial t}$ y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(t))\cdot\frac{dx(t)}{dt}=\frac{\partial(e^{xy})}{\partial x}\Big|_{(3t^2,t^3)}\cdot\frac{d(3t^2)}{dt}=ye^{xy}\Big|_{(3t^2,t^3)}\cdot 6t\;=t^3e^{3t^5}6t=6t^4e^{3t^5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(c(t))\cdot\frac{dx(t)}{dt}=\frac{\partial(e^{xy})}{\partial y}\Big|_{(3t^2,t^3)}\cdot\frac{d(t^3)}{dt}=xe^{xy}\Big|_{(3t^2,t^3)}\cdot 3t^2\;=3t^2e^{3t^5}3t^2=9t^4e^{3t^5}$$

por lo tanto

$$h'(t)=6t^4e^{3t^5}+9t^4e^{3t^5}=15t^4e^{3t^5}$$

Teorema 1. *El gradiente es normal a las superficies de nivel. Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una aplicación C^1 y sea $(x_0,\;y_0,\;z_0)$ un punto sobre la superficie de nivel S definida por $f(x,y,z)=k,\;\;k=cte$. Entonces $\nabla f(x_0,\;y_0,\;z_0)$ es normal a la superficie de nivel en el siguiente sentido: si v es el vector tangente en $t{=}t_0$ de una trayectoria $c(t)$ con $c(t_0)=(x_0,\;y_0,\;z_0)$ Entonces $\nabla f\cdot v=0$*

Demostración. Sea $c(t)=(x(t),y(t),z(t))$ una curva contenida en la superficie que pase por (x_0,y_0,z_0), con $c(t_0)=(x_0,y_0,z_0)$ al estar en la superficie se debe cumplir $f(c(t))=k\;\Rightarrow\;f(xt,y(t),z(t))=k$ y aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x(t),y(t)z(t))=0$$

es decir

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)z(t))\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)z(t))\frac{dy}{dt}+\frac{\partial f}{\partial z}(x(t),y(t)z(t))\frac{dz}{dt}=0$$

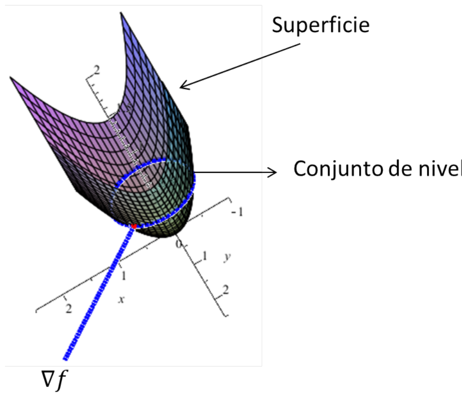
que se puede escribir como

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)z(t)),\frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t)z(t)),\frac{\partial f}{\partial z}(x(t),y(t)z(t))\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt},\frac{dz}{dt}\right)=0$$

en $t=t_0$

$$\nabla f(x(0),y(0),z(0))\cdot c'(t_0)=0$$

$\square$



Plano Tangente

Sea $f: A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ una función diferenciable definida en A, y sea

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid f(x,y,z)=c\}$$

una superficie de nivel de f y $\hat{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ un punto de ella. Considere además, una curva

$$\alpha(t)=(x(t),y(t),z(t))$$

y una curva

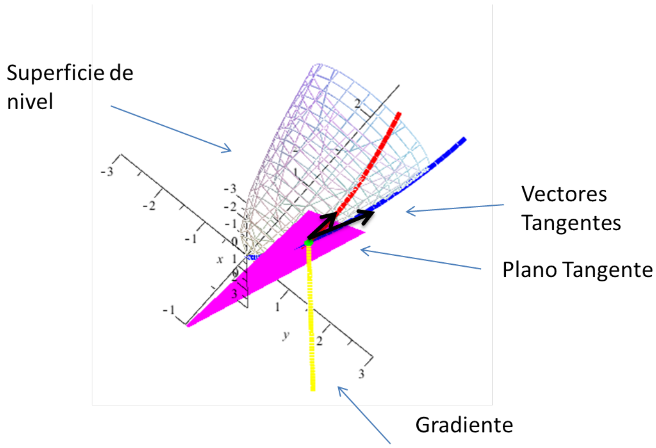
$$\beta(t)=(x_1(t),y_1(t),z_1(t))$$

que pasen por $\hat{x}_0$ con $t\in[a,b]$ en ambos casos y tanto α como β diferenciables, se tiene entonces

$$(f\circ\alpha)'(t)=f'(\alpha(t))\alpha'(t)=\nabla f(\alpha(t))\cdot\alpha'(t)=0$$

$$(f\circ\beta)'(t)=f'(\beta(t))\beta'(t)=\nabla f(\beta(t))\cdot\beta'(t)=0$$

pues el gradiente $\nabla f(\hat{x}_0)$ en ambos casos es ortogonal tanto al vector $\alpha'(t_0)$ como al vector $\beta'(t_0)$ en el punto $\hat{x_0}=\alpha(t_0)=\beta(t_0)$.
Si $\nabla f(\hat{x}_0)\neq 0$, entonces las tangentes a las curvas $\alpha,\ \beta$ sobre S que pasan por $\hat{x}_0$



están contnidas en un mismo plano; por lo que el plano tangente a

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = c\}$$

se define

Definición 1. *El plano tangente a S en $\hat{x}_0$ se define*

$$P = \{\hat{x} \mid \nabla f(\hat{x}_0) \cdot (\hat{x} - \hat{x}_0) = 0\}$$

Ejemplo Hallar el plano tangente a la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + z^2 = 1\}$$

en el punto $(2, 3, 1)$

Solución En este caso el gradiente es

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{x}{2}, -\frac{2}{9}y, 2z\right)$$

en el punto $(2, 3, 1)$ es

$$\nabla f(2, 3, 1) = \left(1, -\frac{2}{3}, 2\right)$$

Por tanto la ecuación del plano tangente es

$$\left(1, -\frac{2}{3}, 2\right) \cdot (x - 1, y - 3, z - 1) = 0$$

es decir

$$3x - 2y + 6z - 6 = 0$$