Derivadas Parciales de Orden Superior

Si f es una función de doas variables $x, y \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ son funciones de las mismas variables, cuando derivamos $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ obtenemos las derivadas parciales de segundo orden, las derivadas de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ están definidas por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x+h,y) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \lim_{k \to 0} \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y+k) - \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{k}$$

Si f es una función de dos variables entonces hay cuatro derivadas parciales de segundo orden.

Consideremos las diferentes notaciones para las derivadas parciales:

$$f_{1,1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

$$f_{1,2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy}$$

$$f_{2,1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx}$$

$$f_{2,2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yy}$$

Ejemplo. $z = x^3 + 3x^2y - 2x^2y^2 - y^4 + 3xy$ hallar $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 6xy - 4xy^2 + 3y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 4x^2y - 4y^3 + 3x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x + 6y - 4y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4x^2 - 12y^2$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6x - 8xy + 3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x - 8xy + 3$$

Teorema 1. *(Teorema de schwarz) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función definida en el abierto A de $\mathbb{R}^2$. Si las derivadas parciales*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

existen y son continuas en A, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Demostración. Sea $M = f(x + h_1, y + h_2) - f(x + h_1, y) - f(x, y + h_2) + f(x, y)$ y definimos

$$\varphi(x) = f(x, y + h_2) - f(x, y)$$

de manera que

$$\varphi(x + h_1) - \varphi(x) = f(x + h_1, y + h_2) - f(x + h_1, y) - (f(x, y + h_2) - f(x, y)) = M$$

Aplicando el TVM a φ en el intervalo $[x, x + h_1]$ se tiene que existe $\theta \in (x, x + h_1)$ tal que

$$\varphi(x + h_1) - \varphi(x) = \varphi'(\theta)h_1$$

por otro lado

$$\varphi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

por lo tanto

$$\varphi'(\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, y + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, y)$$

tenemos entonces que

$$M = \varphi(x + h_1) - \varphi(x) = \varphi'(\theta)h_1 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\theta, y + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, y)\right) h_1$$

Consideremos ahora $\psi(y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$. Aplicando el TVM a ψ en el intervalo $[y, y+h_2]$ se tiene que existe $\eta \in (y, y + h_2)$ tal que

$$\psi(y + h_2) - \psi(y) = \psi'(\eta)h_2$$

por otro lado

$$\psi'(y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

por lo tanto
$$\psi'(\eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, \eta)$$
de esta manera
$$\psi(y + h_2) - \psi(y) = \psi'(\eta)h_2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, \eta) \right) h_2$$
y si $\theta \in (x, x + h_1)$ tenemos entonces que
$$\frac{\partial f}{\partial x}(\theta, y + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, y) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\theta, \eta) \right) h_2$$
en consecuencia
$$M = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\theta, y + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(\theta, y) \right) h_1 = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\theta, \eta) \right) h_2 h_1$$
Consideremos ahora
$$\overline{\varphi}(y) = f(x + h_1, y) - f(x, y)$$
de manera que
$$\overline{\varphi}(y + h_2) - \overline{\varphi}(y) = f(x + h_1, y + h_2) - f(x + h_1, y) - (f(x, y + h_2) - f(x, y)) = M$$
Aplicando el TVM a $\overline{\varphi}$ en el intervalo $[y, y + h_2]$ se tiene que existe $\overline{\eta} \in (y, y + h_2)$ tal que
$$\overline{\varphi}(y + h_2) - \overline{\varphi}(y) = \overline{\varphi}'(\overline{\eta})h_2$$
por otro lado
$$\overline{\varphi}'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x + h_1, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$
por lo tanto
$$\overline{\varphi}'(\overline{\eta}) = \frac{\partial f}{\partial y}(x + h_1, \overline{\eta}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{\eta})$$
tenemos entonces que
$$M = \overline{\varphi}(y + h_2) - \overline{\varphi}(y) = \overline{\varphi}'(\overline{\eta})h_2 = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x + h_1, \overline{\eta}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{\eta}) \right) h_2$$
Consideremos ahora $\overline{\psi}(x) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Aplicando el TVM a ψ en el intervalo $[x, x + h_1]$ se tiene que existe $\overline{\theta} \in (x, x + h_1)$ tal que
$$\overline{\psi}(x + h_1) - \overline{\psi}(x) = \overline{\psi}'(\overline{\theta})h_1$$
por otro lado
$$\overline{\psi}'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$$
por lo tanto
$$\overline{\psi}'(\overline{\theta}) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\overline{\theta}, y)$$

de esta manera

$$\overline{\psi}(x+h_1)-\overline{\psi}(x)=\overline{\psi}'(\overline{\theta})h_1=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\overline{\theta},y)\right)h_1$$

es decir

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x+h_1,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\overline{\theta},y)\right)h_1$$

y si $\overline{\eta}\in(y,y+h_2)$ tenemos entonces que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x+h_1,\overline{\eta})-\frac{\partial f}{\partial y}(x,\overline{\eta})=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\overline{\theta},\overline{\eta})\right)h_1$$

en consecuencia

$$M=\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x+h_1,\overline{\eta})-\frac{\partial f}{\partial y}(x,\overline{\eta})\right)h_1h_2=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\overline{\theta},\overline{\eta})\right)h_2h_1$$

igualando ambas expresiones de M se tiene

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\theta,\eta)\right)h_2h_1=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\overline{\theta},\overline{\eta})\right)h_2h_1$$

donde

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\theta,\eta)\right)=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(\overline{\theta},\overline{\eta})\right)$$

Tomando limite cuando $h_1,h_2\to 0$ y usando la continuidad asumida de las parciales mixtas se tiene que $\theta,\overline{\theta}\to x$ y $\eta,\overline{\eta}\to y$ se concluye

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)$$

□

Ejemplo Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y)=x^3+3x^2y-2x^2y^2-y^4+3xy$

En este caso

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+6xy-4xy^2+3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3x^2-4x^2y-4y^3+3x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x+6y-4y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-4x^2-12y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6x-8xy+3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=6x-8xy+3$$

Ejemplo Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

tenemos que para $(x,y)\neq(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}$$

para el primer caso hacemos $x=0$ y tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}=y\frac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\underbrace{=}_{x=0}-y$$

para el segundo caso hacemos $y=0$ y tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x\frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}\underbrace{=}_{y=0}1$$

Calculamos ahora

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2(-y)}{\partial y\partial x}=-1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2(1)}{\partial x\partial y}=1$$

por lo tanto

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-1\neq 1=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

En este caso las parciales segundas no son contiuas en $(0,0)$

Teorema 2. *(Caso General) Sea $f:A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida en el abierto A de $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$$

sean continuas en A, entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$$