Aproximación de Taylor para funciones $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

El caso de la aproximación con $n = 2$ nos queda

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\right)+$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) + R_2$$

Donde la expresión azul se puede escribir

$$\frac{1}{1!}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)\right) = \nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(h_1,h_2,h_3)$$

y la expresión en rojo

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}_p(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}_p(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}_p(y-y_0)^2\right)$$

Define una forma cuadratica que podemos escribir

$$\frac{1}{2!}(x-x_0 \quad y-y_0)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

Por lo que el desarrollo de Taylor se puede escribir

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(h_1,h_2,h_3) + \frac{1}{2!}(x-x_0 \quad y-y_0)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

A la matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

se le conoce como matriz Hessiana y se denota $H(x_0,y_0)$ por lo que el desarrollo de Taylor se puede escribir

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(h_1,h_2,h_3) + \frac{1}{2!}(x-x_0 \quad y-y_0)(H(x_0,y_0))\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

Aproximación de Taylor para funciones $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$

Sea $f: A\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ y sea $F(t)=f(x_0+h_1t, y_0+h_2t, z_0+h_3t)$ con $t\in[0,1]$, de esta manera f recorre el segmento de $[x_0,y_0,z_0]$ a $[x_0+h_1t, y_0+h_2t, z_0+h_3t]$. Se tiene entonces que usando la regla de la cadena

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h_1t,y_0+h_2t,z_0+h_3t)\cdot\frac{d(x_0+h_1t)}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h_1t,y_0+h_2t,z_0+h_3t)\cdot\frac{d(y_0+h_2t)}{dt}+$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0+h_1t,y_0+h_2t,z_0+h_3t)\cdot\frac{d(z_0+h_3t)}{dt}=$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h_1t,y_0+h_2t,z_0+h_3)\cdot h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h_1t,y_0+h_2t,z_0+h_3)\cdot h_2+\frac{\partial f}{\partial z}(x_0+h_1t,y_0+h_2t,z_0+h_3)\cdot h_3$$

Vamos ahora a calcular $F''(t)$

$$F''(t)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h_1+\frac{\partial f}{\partial y}h_2+\frac{\partial f}{\partial z}h_3\right)h_1+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h_1+\frac{\partial f}{\partial y}h_2+\frac{\partial f}{\partial z}h_3\right)h_2+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}h_1+\frac{\partial f}{\partial y}h_2+\frac{\partial f}{\partial z}h_3\right)h_3=$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}h_2^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}h_3h_1+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}h_3h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}h_3^2$$

Ahora bien si se aplica la fórmula de Taylor con la forma del residuo de Lagrange a la función

$$F(t)=f(x_0+h_1t,y_0+h_2t)$$

y ponemos $t=0$, y $n=2$ se tiene

$$F(t)=F(0)+\frac{1}{1!}F'(0)t+\frac{1}{2!}F''(0)t^2+R_2$$

ahora bien con $t=1$, $x=x_0+h_1$, $y=y_0+h_2$, $z=z_0+h_3$

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p(y-y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_p(z-z_0)+$$

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}_p(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}_p(x-x_0)(y-y_0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}_p(y-y_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}_p(z-z_0)(x-x_0)+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}_p(z-z_0)(y-y_0)\right)$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}_p(z-z_0)+R_2$$

Donde la expresión en azul se puede escribir

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_p(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_p(y-y_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_p(z-z_0)=\nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(h_1,h_2,h_3)$$

y la expresión en rojo

$$\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}h_1h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}h_2^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}h_3h_1+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}h_3h_2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}h_3^2\right)$$

se puede ver como producto de matrices

$$\frac{1}{2!}(h_1\ h_2\ h_3)\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}_p \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

La matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

se le conoce como matriz Hessiana y se le denota $H(x_0, y_0, z_0)$, por lo que la aproximación de Taylor se puede escribir

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(h_1,h_2,h_3) + \frac{1}{2!}(h_1\ h_2\ h_3)H(x_0,y_0,z_0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

Ejemplo Considere la función $f(x,y) = e^{2x+3y}$

$$f[(0,0)+(x,y)] = f(0,0) + \nabla f(0,0)\cdot(x,y) + \tfrac{1}{2}[xy]H(0,0)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + r_2(x,y)$$

donde $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{r(x,y)}{x^2+y^2} = 0$

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (2e^{2x+3y}, 3e^{2x+3y}) \qquad \therefore \nabla f(0,0) = (2,3)$$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{2x+3} & 6e^{2x+3y} \\ 6e^{2x+3y} & 9e^{2x+3y} \end{bmatrix} \qquad \therefore H(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

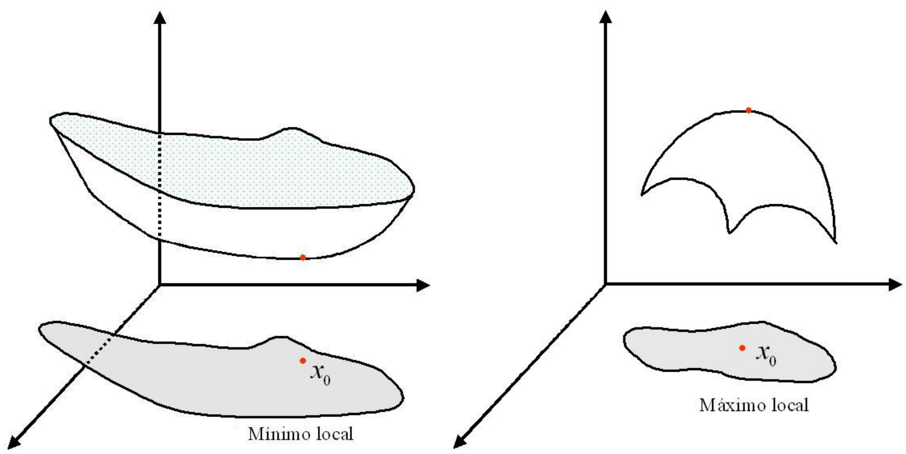
Así $f(x,y) = f(0,0) + (2,3)\cdot(x,y) + \frac{1}{2}[xy]\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + r(x,y)$

$\therefore e^{2x+3y} = 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy\frac{9}{2}y^2 + r(x,y)$

Extremos Locales

Entre las caracteristicas geometricas básicas de la gráficas de una función estan sus puntos extremos, en los cuales la función alcanza sus valores mayor y menor.

Definición 1. *Si $f : u \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función escalar, dado un punto $x_0 \in u$ se llama mínimo local de f si existe una vecindad v de x_0 tal que $\forall \quad x \in v \quad f(x) > f(x_0)$. De manera analoga, $x_0 \in u$ es un máximo local si existe una vecindad v de x_0 tal que $f(x) < f(x_0) \quad \forall \quad x \in v$. El punto $x_0 \in u$ es un extremo local o relativo, si es un mínimo local o máximo local.*



En la expresión del desarrollo de Taylor

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0,z_0)\cdot(h_1,h_2,h_3) + \frac{1}{2!}(x-x_0 \quad y-y_0)(H(x_0,y_0))\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

Si consideramos los valores para los cuales

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$$

es decir los puntos críticos del gradiente entonces nuestra aproximación de Taylor nos queda

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}(x-x_0 \quad y-y_0)(H(x_0,y_0))\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

que se puede escribir

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2!}(x-x_0 \quad y-y_0)(H(x_0,y_0))\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

por lo que el signo del lado izquierdo $f(x,y) - f(x_0,y_0)$ dependerá del signo de la expresión

$$\frac{1}{2!}(x-x_0 \quad y-y_0)(H(x_0,y_0))\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

es decir dependerá del signo de la forma

$$\frac{1}{2!}(h_1\ h_2)\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}_p\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\\ h_3\end{pmatrix}$$

Teorema 1. *Sea* $B=\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$ *y* $H(h)=\frac{1}{2}[h_1,h_2]\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}$ *entonces* $H(h)$ *es definida positiva si y solo si* $a>0$ *y* $ac-b^2>0$.

Demostración. Tenemos

$$H(h)=\frac{1}{2}[h_1,h_2]\begin{bmatrix}ah_1 & bh_2\\ bh_1 & ch_2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}(ah_1^2+2bh_1h_2+ch_1^2)$$

si completamos el cuadrado

$$H(h)=\frac{1}{2}a\left(h_1+\frac{b}{a}h_2\right)^2+\frac{1}{2}\left(c-\frac{b^2}{a}\right)h_2^2$$

supongamos que h es definida positiva. Haciendo $h_2=0$ vemos que $a>0$. Haciendo $h_1=-\frac{b}{a}h_2$ $c-\frac{b^2}{a}>0$ ó $ac-b^2>0$ De manera analoga $H(h)$ es definida negativa si y solo si $a<0$ y $ac-b^2>0$. □

Criterio del máximo y del mínimo para funciones de dos variables Sea $f(x,y)$ de clase C^3 en un conjunto abierto u de $\mathbb{R}^2$. Un punto x_0,y_0 es un mínimo local (Estricto) de f si se cumple las siguientes tres condiciones:

I) $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

II) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)>0$

III) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2>0$ en (x_0,y_0) (Discriminante)

Si en II) tenemos <0 en lugar de >0 sin cambiar III) hay un máximo local