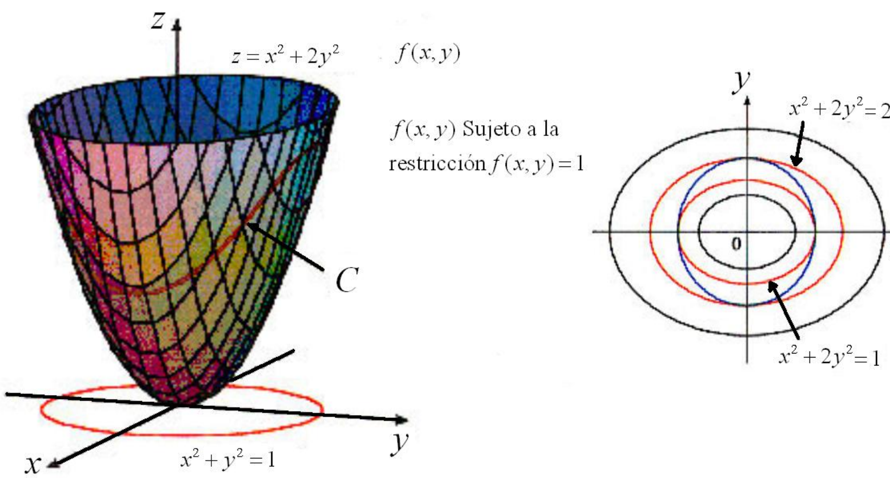
Extremos Restringidos (Multiplicadores de Lagrange)

Supongase que se quieren hallar los valores extremos (máximo ó mínimo) de una función $f(x, y)$ sujeta a la restircción $x^2 + y^2 = 1$; esto es, que (x, y) está en el circulo unitario. con mayor generalidad, podemos necesitar maximizar o minimizar $f(x, y)$ sujeta a la condición adicional de que (x, y) también satisfaga una ecuación $g(x, y) = c$ donde g es alguna función y c es una constante [En el ejemplo $g(x, y) = x^2 + y^2$ y $c = 1$]. El conjunto de dichas (x, y) es un conjunto de nivel de g.



En general, sean $f : u \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : u \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones C^1 dadas, y sea S el conjunto de nivel de g con valor c. [Recordar que el conjunto de nivel son los puntos $x \in \mathbb{R}^n$ con $g(x) = c$] Cuando f se restringe a S, de nuevo tenemos el concepto de máximos locales o mínimos locales de f (extremos locales), y un máximo (valor mayor) o un minimo absoluto (valor menor) debe ser un extremo local.

Teorema.- Método de los multiplicadores de lagrange. Sean $f : u \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : u \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funciones C^1 con valores reales dados. Sean $x_0 \in u$ y $g(x_0) = c$, y sea S el conjunto de nivel de g con valor c. Suponer $\nabla g(x_0) \neq 0$.

Si $f|_s$ (f restringida a s) tiene un máximo o un mínimo local en S, en x_0, entonces existe un número real λ tal que $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$.

Demostración: Para $n = 3$ el espacio tangente o plano tangente de S en x_0 es el espacio ortogonal a $\nabla g(x_0)$ y para n arbitraria podemos dar la misma definición de espacio tangente de S en x_0. Esta definición se puede motivar al considerar tangentes a trayectorias $c(t)$ que estan en s, como sigue: si $c(t)$ es una trayectoria en S y $c(0) = x_0$, entonces $c'(0)$ es un vector tangente a S en x_0, pero

$$\frac{dg(c(t))}{dt} = \frac{d}{dt}(c) = 0$$

Por otro lado usando regla de la cadena

$$\left.\frac{d}{dt} g(c(t))\right|_{t=0} = \nabla g(x_0) \cdot c'(0)$$

de manera que $\nabla g(x_0) \cdot c'(0) = 0$, esto es, $c'(0)$ es ortogonal a $\nabla g(x_0)$.

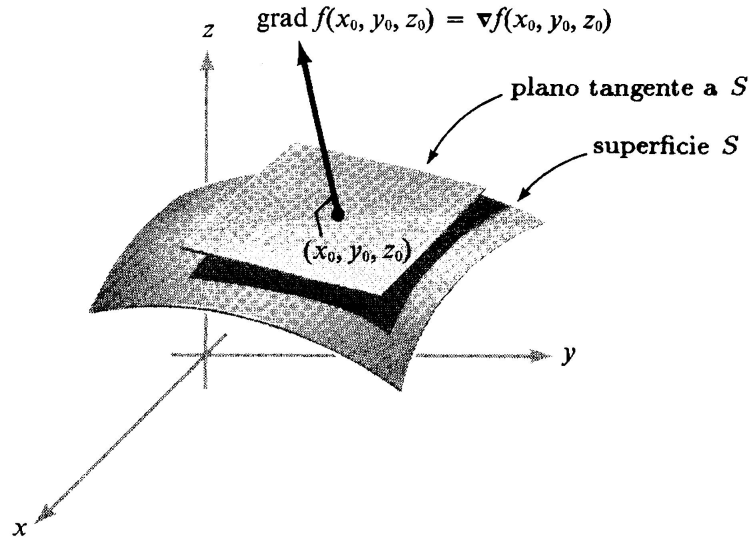
Si $f|_s$ tiene un máximo en x_0, entonces $f(c(t))$ tiene un máximo en $t = 0$. Por cálculo de una variable, $\left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0} = 0$.

Entonces por regla de la cadena $0 = \left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0} = \nabla f(x_0) \cdot c'(0)$.

Asi, $\nabla f(x_0)$ es perpendicular a la tangente de toda curva en S y entonces tambien es perpendicular al espacio tangente completo de S en x_0. Como el espacio perpendicular a este espacio tangente es una recta, $\nabla f(x_0)$ y $\nabla g(x_0)$ son paralelos. Como $\nabla g(x_0) \neq 0$, se deduce que $\nabla f(x_0)$ es multiplo de $\nabla g(x_0)$.

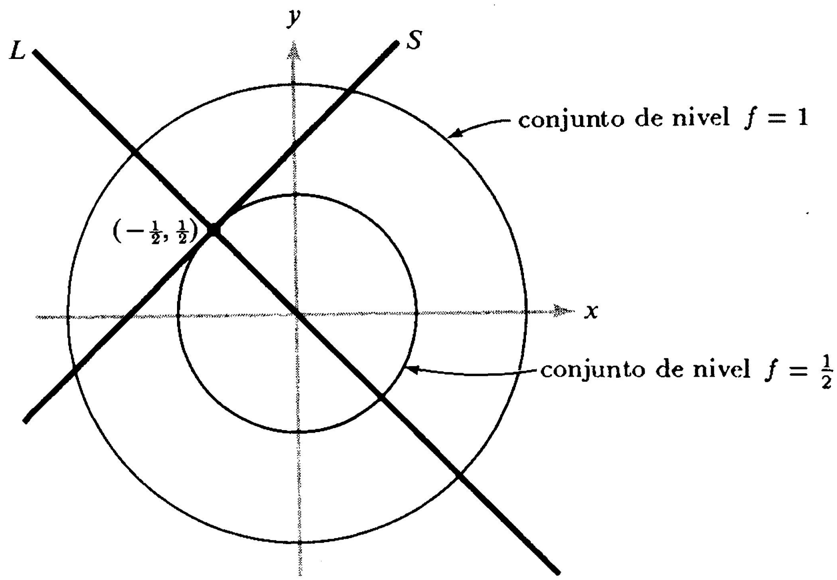
Corolario.- Si f al restringirse a una superficie S, tiene un máximo o un mínimo local en x_0, entonces $\nabla f(x_0)$ es perpendicular a S en x_0.

La geometria de los valores extremos restringidos.



Ejemplo.- Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por $(-1, 0)$ inclinada a 45^o, y sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ daa asi $f(x, y) = x^2 + y^2$. Hallar los extremos de $f|_s$.

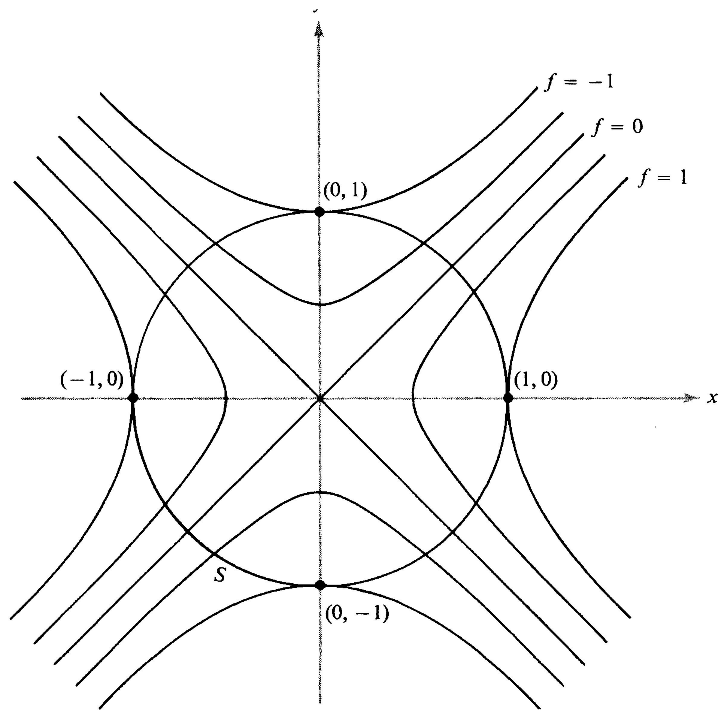
Solución.- Aqui $S = \{(x, y)|y - x - 1 = 0\}$ y por lo tanto hacemos $g(x, y) = -y - x - 1$ y $c = 0$. Tenemos $\nabla g(x, y) = -i + j \neq 0$. Los extremos relativos de $f|_s$ deben hallarse entre los puntos en que ∇f es ortogonal a S, esto es, inclinada a -45^o. Pero $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$, que tiene la pendiente deseada sólo cuando $x = -y$, o cuando (x, y) está sobre la recta L, que pasa por el origen inlinada a -45^o. Esto puede suceder en el conjunto S sólo para el unico punto en el que se intersecan L y S. Al referirnos a las curvas de nivel de f se indica que este punto $(-\frac{1}{1}, \frac{1}{2})$ es un mínimo relativo de $f|_s$ (Pero no de f).



Ejemplo.- Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada asi $f(x, y) = x^2 - y^2$ y sea S el circulo de radio 1 alrededor del origen. Halar los extremos de $f|_s$.

Solución.- El conjunto S es la curva de nivel para g con valor t. Donde $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x^2 + y^2$. La condición de que $\nabla f = \lambda \nabla g$ en x_0, es decir que ∇f y ∇g son pararlelos en x_0, es la misma que las curvas de nivel sean tangentes en x_0. Asi los puntos extremos de $f|_s$ son $(0, \pm 1)$ y $(\pm 1, 0)$. Evaluando f hallamos que $(0, \pm 1)$ son mínimos y $(\pm 1, 0)$ son máximos. Usando Multiplicadores de lagrange $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ y $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$

$\therefore \quad (2x, -2y) = \lambda(2x, 2y)$ cuya solución es $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$.



Ejemplo.- Maximizar la función $f(x,y,z) = x + z$ sujeta a la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Solución.- Buscamos λ y (x,y,z) tales que $1 = 2x\lambda$, $0 = 2y\lambda$ y $1 = 2z\lambda$ $x^2+y^2+z^2 = 1$ la solución es $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ comprobando los valores de f en estos puntos podemos ver que el primer punto produce el máximo de f y el segundo el mínimo.

Ejemplo.- Hallar los puntos extremos de $f(x,y,z) = x + y + z$ sujeto a las dos condiciones $x^2 + y^2 = 2$ y $x + z = 1$

Solución.- Aquí hay dos restricciones $g_1 = (x,y,z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ $g_2(x,y,z) = x + z - 1 = 0$ asi, debemos encontrar x, y, z, λ_1 y λ_2 tales que

$$\nabla f(x,y,z) = \lambda_1 \nabla g(x,y,z) + \lambda_2 \nabla g_2(x,y,z)$$

$$g_1(x,y,z) = 0 \quad y \quad g_2(x,y,z) = 0$$

Calculando gradientes e igualando componentes, obtenemos

$$1 = \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 \cdot 1 \tag{1}$$

$$1 = \lambda_1 2y + \lambda_2 \cdot 0 \tag{2}$$

$$1 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 \tag{3}$$

$$x^2 + y^2 = 2 \tag{4}$$

$$x + z = 1 \tag{5}$$

De (3) $\lambda_2 = 1$ y asi $2x\lambda_1 = 0$, $2y\lambda_1 = 1$. Como la segunda implica $\lambda_1 \neq 0$ $x = 0$. Asi $y = \pm\sqrt{2}$ y $z = 1$. Entonces los extremos deseados son $(0, \pm\sqrt{2}, 1)$. Por inspección $(0, \sqrt{2}, 1)$ da un máximo relativo y $(0, -\sqrt{2}, 1)$ un mínimo relativo.
La condición $x+z = 1$ implica que z tambien esta acotada. Se deduce que el conjunto de restricciones S es cerrada y acotada, Por lo tanto f tiene un máximo y un mínimo en S que se deben alcanzar en $(0, \sqrt{2}, 1)$ y $(0, -\sqrt{2}, 1)$ respectivamente.