Teorema de la Función Inversa (sistema $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

Teorema 1. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sean*

$$\begin{gathered} f_1 : U \to \mathbb{R} \\ \vdots \\ f_n : U \to \mathbb{R} \end{gathered}$$

con derivadas parciales continuas. Considerar las ecuaciones

$$\left.\begin{array}{c} f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = y_1 \\ f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = y_2 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = y_n \end{array}\right\} \textit{Tratamos de resolver las n-ecuaciones para } x_1, x_2, ...x_n \textit{como funciones de } y_1, y_2, ...y_n.$$

La condición de existencia para la solución en una vecindad del punto x_0 es que el determinante de la matriz $Df(x_0)$ y $f = (f_i, f_2, ...f_n)$ sean distintos de cero. Explicitamente:

$$\left.\frac{\partial(f_1, f_2, ..., f_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}\right|_{x=x_0} = J(f)(x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces el sistema anterior se puede resolver de manera 'unica como $x = g(y)$ para x cerca de x_0 y y cerca de y_0

Nota La cuestión de existencia se responde por medio del teorema general de la función implícita aplicado a las funciones $y_i - f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ con las incognitas $x_1, x_2, ..., x_n$.

Ejemplo El problema de factorizar un polinomio $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ en factores lineales es, en cierto sentido un problema de función inversa. Los coeficientes a_i son funciones conocidas de las n raices r_j. ¿Se podran expresar las raices como funciones de los coeficientes en alguna región?. Con n=3, aplicar el teorema de la función inversa a este problema y enunciar la conclusión acerca de la posibilidad de hacer lo planteado.

Solución Para el caso n=3 tenemos que podemos factorizar el polinomio de la siguiente forma

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)$$

desarrolando el lado derecho tenemos que

$$(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = x^3 - r_3x^2 - r_2x^2 + r_2r_3x - r_1x^2 + xr_1r_3 + r_1r_2x - r_1r_2r_3$$

que se puede escribir

$$x^3 + x^2(-r_3 - r_2 - r_1) + x(r_2r_3 + r_1r_3 + r_1r_2) - r_1r_2r_3$$

igualando las expresiones

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x^3 + x^2(-r_3 - r_2 - r_1) + x(r_2r_3 + r_1r_3 + r_1r_2) - r_1r_2r_3$$

por lo tanto igualando coeficientes

$$\begin{aligned} a_0 &= -r_1r_2r_2 \\ a_1 &= r_2r_3 + r_1r_3 + r_1r_2 \\ a_2 &= -r_1 - r_2 - r_3 \end{aligned}$$

Al sistema anterior le aplicamos el teorema de la función implicita para comprobar si las raices se pueden expresar en términos de los coeficientes, para ello calculamos el determinante de jacobiano del sistema que en este caso es

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial a_0}{\partial r_1} & \frac{\partial a_0}{\partial r_2} & \frac{\partial a_0}{\partial r_3} \\ \frac{\partial a_1}{\partial r_1} & \frac{\partial a_1}{\partial r_2} & \frac{\partial a_2}{\partial r_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial r_1} & \frac{\partial a_2}{\partial r_2} & \frac{\partial a_3}{\partial r_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_2r_3 & -r_1r_3 & -r_1r_2 \\ r_3 + r_2 & r_3 + r_1 & r_2 + r_1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

de esta manera el determinante del jacobiano es

$$\det \begin{pmatrix} -r_1r_3 & -r_1r_3 & -r_1r_2 \\ r_3 + r_2 & r_3 + r_1 & r_2 + r_1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -r_1r_3 & -r_1r_3 & -r_1r_2 \\ r_3 + r_2 & r_3 + r_1 & r_2 + r_1 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$(-r_2r_3) \times \begin{vmatrix} r_3 + r_1 & r_2 + r_1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (-r_1r_3) \times \begin{vmatrix} r_3 + r_2 & r_2 + r_1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-r_1r_2) \times \begin{vmatrix} r_3 + r_2 & r_3 + r_1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(-r_2r_3) \times (r_2 - r_3) + (r_1r_3) \times (r_1 - r_3) - (r_1r_2) \times (r_1 - r_2) = -r_2r_3r_2 + r_2r_3r_3 + r_1r_3r_1 - r_1r_3r_3 - r_1r_2r_1 + r_1r_2r_2$$

que se puede escribir

$$= r_3r_1r_1 - r_3r_1r_3 - r_3r_2r_1 + r_3r_2r_3 - r_2r_1r_1 + r_2r_1r_3 + r_2r_2r_1 - r_2r_2r_3$$

$$= (r_3r_1 - r_3r_2 - r_2r_1 + r_2r_2)r_1 - (r_3r_1 - r_3r_2 - r_2r_1 + r_2r_2)r_3 = (r_3r_1 - r_3r_2 - r_2r_1 + r_2r_2)(r_1 - r_3)$$

$$= ((r_3 - r_2)r_1 - (r_3 - r_2)r_2)(r_1 - r_3) = (r_3 - r_2)(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)$$

Este último término no es cero si el polinomio tiene raices distintas. Así el teorema de la función inversa muestra que las raices se pueden hallar como funciones de los coeficientes en alguna vecindad de cualquier punto en el que las raices sean distintas. Esto es, si las rices $r_1,\ r_2,\ r_3$ de $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ son todas diferentes, entonces hay vecindades V de $(r_1,\ r_2,\ r_3)$ y W de $(a_0,\ a_1,\ a_2)$ tales que las raices en V son funciones de los coeficientes en W.

Funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definición 1. *Una función f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ denotada $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, es una relación que asigna a cada vector del espacio $\mathbb{R}^n$ un único vector del espacio $\mathbb{R}^m$*
Si f es una función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, entonces f se expresa

$$f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$$

en donde $f_k \quad k = 1, ..., m$ es la k-ésima función componente y $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $k = 1, ..., m$

Definición 2. *Si $A \subset \mathbb{R}^n$, la imagen bajo la función f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ se denota $f(A)$, y se define*

$$f(A) = \{f(x) \in \mathbb{R}^m \mid x \in A\}$$

Definición 3. *El dominio de una función f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es la intersección de los dominios de las funciones componentes f_k es decir*

$$Dom_f = \bigcap_{k=1}^{m} Dom_{f_k} = Dom_{f_1} \bigcap Dom_{f_2} \bigcap Dom_{f_3} \bigcap \cdots \bigcap Dom_{f_m}$$

Ejemplo Encontrar el dominio y la imagen de la recta $y = 3x$ para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \left(\frac{4x+2y}{5}, \frac{2x+y}{5}\right)$$

Solución En este caso

$$f_1 = \left(\frac{4x+2y}{5}\right) \;\Rightarrow\; Dom_{f_1} = \mathbb{R}^2$$

$$f_2 = \left(\frac{2x+y}{5}\right) \;\Rightarrow\; Dom_{f_2} = \mathbb{R}^2$$

por lo tanto

$$Dom_f = Dom_{f_1} \bigcap Dom_f = \mathbb{R}^2 \bigcap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$$

Para la imagen de la recta $y = 3x$ procedemos de la siguiente manera

$$f(x,y) = \left(\frac{4x+2y}{5}, \frac{2x+y}{5}\right) = (x', y') \;\Rightarrow\; f(x,3x) = \left(\frac{4x+2(3x)}{5}, \frac{2x+(3x)}{5}\right) = (x', y') \;\Rightarrow$$

$$x' = \frac{4x+2(3x)}{5} \;\; y \;\; y' = \frac{2x+(3x)}{5} \;\Rightarrow\; x' = 2x \;\; y \;\; y' = x \;\Rightarrow\; y' = \frac{x'}{2}$$

por lo tanto la imagen de la recta $y = 3x$ sera:

$$f(3x) = \left\{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid y' = \frac{x'}{2}\right\}$$

Definición 4. *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $D \subset \mathbb{R}^m$. Definimos la **imagen inversa** de D bajo f, que denotamos $f^{-1}(D)$, como el conjunto dado por:*

$$f^{-1}(D) = \{\hat{x} \in A \mid f(\hat{x}) \in D\}$$

Definición 5. *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $D \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset A$. Definimos la **imagen directa** de B bajo f, que denotamos $f(B)$, como el conjunto dado por:*

$$f(B) = \{f(\hat{x}) \in \mathbb{R}^m \mid \hat{x} \in B\}$$

Proposición 1. *Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A_α, $B, C \subset A$ y D_α, D, $E \subset \mathbb{R}^m$, con $\alpha \in I$ I un conjunto de indices. Pruebe que:*

1. $D \subset E \;\Rightarrow\; f^{-1}(D) \subset f^{-1}(E)$
2. $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} D_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(D_\alpha)$
3. $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I} D_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(D_\alpha)$
4. $f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c$
5. $B \subset C \;\Rightarrow\; f(B) \subset f(C)$
6. $f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$
7. $f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$
8. $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$
9. $B \subset f^{-1}(f(B))$
10. $f(f^{-1})(D) \subset D$

Demostración. (1). $D \subset E \;\Rightarrow\; f^{-1}(D) \subset f^{-1}(E)$

$$x \in f^{-1}(D) \;\Rightarrow\; f(x) \in D$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{D\subset E} \; f(x) \in E$$

$$\Rightarrow\; x \in f^{-1}(E)$$

(2). $f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} D_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(D_\alpha)$

$$x \in f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} D_\alpha\right) \;\Leftrightarrow\; f(x) \in \bigcup_{\alpha\in I} D_\alpha$$

$$\Leftrightarrow\; f(x) \in D_{\alpha_i} \quad p.a.\ i \in I$$

$$\Leftrightarrow\; x \in f^{-1}(D_{\alpha_i}) \;\; p.a.\ i \in I$$

$$\Leftrightarrow\; x \in (\bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(D_\alpha)$$

(3). $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I} D_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(D_\alpha)$

$$x \in f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in I} D_\alpha\right) \;\Leftrightarrow\; f(x) \in \bigcap_{\alpha\in I} D_\alpha$$

$$\Leftrightarrow\; f(x) \in D_{\alpha_i} \;\; \forall\ i \in I$$

$$\Leftrightarrow\; x \in f^{-1}(D_{\alpha_i}) \;\; \forall\ i \in I$$

$$\Leftrightarrow\; x \in (\bigcap_{\alpha\in I} f^{-1}(D_\alpha)$$

(4). $f^{-1}(D^c) = (f^{-1}(D))^c$

$$x \in f^{-1}(D^c) \;\Leftrightarrow\; f(x) \in D^c$$

$$\Leftrightarrow\; f(x) \notin D$$

$$\Leftrightarrow\ x \notin f^{-1}(D)$$
$$\Leftrightarrow\ x \in (f^{-1}(D))^c$$

(5). $B \subset C\ \Rightarrow\ f(B) \subset f(C)$

$$f(x) \in f(B)\ \Rightarrow\ x \in B$$
$$\underbrace{\Rightarrow}_{B \subset C}\ x \in C$$
$$\Rightarrow\ f(x) \in f(C)$$

(6). $f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$

$$f(x) \in f\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)\ \Leftrightarrow\ x \in \bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha$$
$$\Leftrightarrow\ x \in A_\alpha\ \ p.a\ \alpha \in\ I$$
$$\Leftrightarrow\ f(x) \in\ f(A_\alpha)\ p.a\ \alpha \in\ I$$
$$\Leftrightarrow\ f(x) \in \bigcup_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$$

(7). $f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) \subset \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$

$$f(x) \in f\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)\ \Rightarrow\ x \in \bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha$$
$$\Rightarrow\ x \in A_\alpha\ \ \forall\ \alpha \in\ I$$
$$\Rightarrow\ f(x) \in\ f(A_\alpha)\ \forall\ \alpha \in\ I$$
$$\Rightarrow\ f(x) \in \bigcap_{\alpha\in I} f(A_\alpha)$$

(8). $f(A) - f(B) \subset f(A - B)$

$$f(A) - f(B) = f(A) \bigcap (f(B))^c$$
$$\Rightarrow\ f(x) \in f(A) - f(B)$$
$$\Rightarrow\ f(x) \in f(A) \bigcap (f(B))^c$$
$$\Rightarrow\ f(x) \in f(A)\ \ y\ \ f(x) \in (f(B))^c$$
$$\Rightarrow\ x \in A\ \ y\ \ f(x) \notin f(B)$$
$$\Rightarrow\ \ x \in A\ \ y\ \ x \notin B$$
$$\Rightarrow\ \ x \in A\ \ y\ \ x \in B^c$$
$$\Rightarrow\ x \in A \bigcap B^c$$
$$\Rightarrow\ x \in A - B$$

$$\Rightarrow\ f(x) \in f(A-B)$$

(9). $B \subset f^{-1}(f(B))$

$$x \in B \ \Rightarrow\ f(x) \in f(B)$$
$$\Rightarrow\ x \in f^{-1}(f(B))$$

(10). $f(f^{-1}(D)) \subset D$

$$f(x) \in f(f^{-1}(D)) \ \Rightarrow\ x \in f^{-1}(D)$$
$$\Rightarrow\ f(x) \in D$$

□