Funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (parte dos)

Ejemplo Encontrar el dominio y la imagen de la región $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right)$$

Solución En este caso

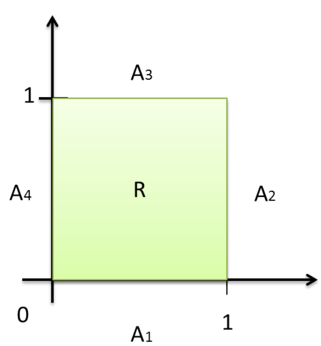
$$f_1 = \left(x^2 - y^2\right) \ \Rightarrow \ Dom_{f_1} = \mathbb{R}^2$$

$$f_2 = (2xy) \ \Rightarrow \ Dom_{f_2} = \mathbb{R}^2$$

por lo tanto

$$Dom_f = Dom_{f_1} \bigcap Dom_f = \mathbb{R}^2 \bigcap \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2$$

Para la imagen de la región $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$ procedemos de la siguiente manera: Definimos los siguientes conjuntos que limitan la región



$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ y = 0\}$$

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ x = 1\}$$

$$A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ y = 1\}$$

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ x = 0\}$$

ahora procedemos a encontrar las imagenes de cada uno de los conjuntos definidos
Para A_1 se tiene

$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ y = 0\} \ \ f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right) = (x', y')$$

$$x' = x^2 - y^2 \underbrace{\Rightarrow}_{y=0} x' = x^2 \ \ y \ \ si \ \ 0 \le x \le\le 1 \ \Rightarrow \ 0 \le x^2 \le 1 \ \Rightarrow \ 0 \le x' \le 1$$

$$y' = 2xy \ \underbrace{\Rightarrow}_{y=0} y' = 0$$

por lo tanto

$$f(A_1) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x' \le 1\ ,\ y' = 0\}$$

Para A_2 se tiene

$$A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ x = 1\} \ \ f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right) = (x', y')$$

$$x' = x^2 - y^2 \underbrace{\Rightarrow}_{x=1} x' = 1 - y^2 \ \Rightarrow \ y = \sqrt{1 - x'}$$

$$y' = 2xy \underbrace{\Rightarrow}_{x=1} y' = 2y \ \Rightarrow\ y' = 2\sqrt{1-x'} \ \Rightarrow\ y'^2 = 4(1-x')$$

por lo tanto

$$f(A_2) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid y'^2 = 4(1-x'),\ 0 \le y' \le 2\}$$

Para A_3 se tiene

$$A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ y = 1\} \quad f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right) = (x', y')$$

$$x' = x^2 - y^2 \underbrace{\Rightarrow}_{y=1} x' = x^2 - 1 \ \Rightarrow\ x' + 1 = x^2 \ \Rightarrow\ x = \sqrt{x'+1}$$

$$y' = 2xy \underbrace{\Rightarrow}_{y=1} y' = 2x \ \Rightarrow\ y' = 2\sqrt{x'+1} \ \Rightarrow\ y'^2 = 4(x'+1)$$

por lo tanto

$$f(A_3) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid y'^2 = 4(x'+1),\ 0 \le y' \le 2\}$$

Para A_4 se tiene

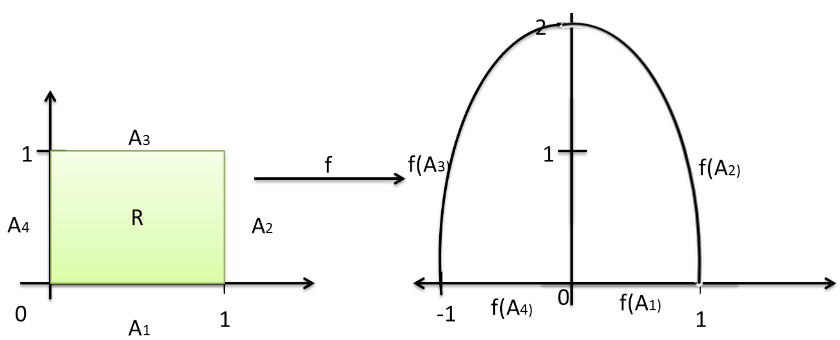
$$A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 1,\ x = 0\} \quad f(x,y) = \left(x^2 - y^2, 2xy\right) = (x', y')$$

$$x' = x^2 - y^2 \underbrace{\Rightarrow}_{x=0} x' = -y^2 \ \ y \ \ si \ \ 0 \le y \le 1 \ \Rightarrow\ 0 \le y^2 \le 1 \ \Rightarrow\ -1 \le y^2 \le 0$$

$$y' = 2xy \underbrace{\Rightarrow}_{x=0} y' = 0$$

por lo tanto

$$f(A_4) = \{(x', y') \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x' \le 0\ ,\ y' = 0\}$$



Operaciones con Funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definición 1. *Sean $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $h : D \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$. Definimos*
1. La suma de f y g que denotamos por f+g como

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad x \in A$$

2. El producto del escalar α por la función f que denotamos αf como

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \quad x \in A$$

3. El producto punto de f por g que denotamos $f \cdot g$ como

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), \quad x \in A$$

4. Si $m = 3$ el producto cruz de f por g que denotamos $f \times g$ como

$$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x), \quad x \in A$$

5. Si $m = 1$ el cociente de f por g que denotamos $\frac{f}{g}$ como

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in A$$

6. La composición de h con f, que denotamos como $h \circ f$ como

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)) \ \ para \ \ cada \ \ \{x \in A \mid f(x) \in D\}$$

Gráficas de Funciones de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definición 2. *Dada la función $f = (f_1, ..., f_m) : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definimos su gráfica como el subconjunto*

$$g_f = \{(x_1, ..., x_n, f_1(x_1, ..., x_n), f_2(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n)) \in \mathbb{R}^{n+m} | (x_1, ..., x_n) \in A\}$$

Límite de Funciones de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Definición 3. *Por sucesiones*
Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in A'$. Decimos que f tiene límite en x_0 y que su límite es $\ell \in \mathbb{R}^m$, si para toda sucesión $\{x_k\}$ contenida en $A - \{x_0\}$ que converge a x_0 se tiene que la sucesión $\{f(x_k)\}$ converge a ℓ. En este caso escribimos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

y decimos que ℓ es el límite de f en x_0.

Definición 4. *$(\epsilon - \delta)$*
Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, y sea x_0 un punto de acumulación de A. Se dice que $\ell \in \mathbb{R}^m$ es el límite de f en x_0, y se denota por:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

Si dado $\forall\ \epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(x) - \ell\| < \epsilon \ \ cuando \ \ 0 < \|x - x_0\| < \delta$$

Continuidad de Funciones de Varias Variables

Definición 5. *Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in \Omega$. Se dice que f es continua en x_0 si dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ tal que $\|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$ siempre que $x \in \Omega$ y $0 < \|x - x_0\| < \delta$*

Definición 6. *Se dice que un subconjunto $V \subset \mathbb{R}^n$ es un entorno del punto x, si exite $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \subset V$.*

Definición 7. *Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $x_0 \in \Omega$. Se dice que f es continua en x_0 cuando $\forall$ entorno V de $f(x_0)$ existe un entorno U de x_0 tal que $f(U) \subset V$ es decir para cualquier $x \in U$ se cunple $f(x) \in V$*

Proposición 1. *Una función $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua si y solo si*

$$f^{-1}(v) = \{x \in D \mid f(x) \in v\}$$

es un abierto (contenido en D) para cada abierto $v \subset \mathbb{R}^m$.

Demostración. $\Rightarrow$ Sea v un abierto en $\mathbb{R}^m$ y sea $\overline{x} \in f^{-1}(v)$; tenemos por definición $f(\overline{x}) \in v$. Como v es un conjunto abierto $\exists\ r > 0$ tal que $B(f(\overline{x}), r) \subset v$ como f es continua $\exists\ \rho > 0$ tal que $f(B(x, \rho)) \subset B(f(x), r)$ pero esto significa que $B(x, \rho) \subset f^{-1}(B(f(x), r)) \subset f^{-1}(v)$ por lo que cada punto $x \in f^{-1}(v)$ es punto interior lo que prueba que v es abierto.
$\Leftarrow$
Supongamos que $f^{-1}(v)$ es un abierto, para cada conjunto abierto $v \subset \mathbb{R}^m$
Sea $\epsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}^n$, hacemos
$B(f(x), \epsilon) = V$ por lo que$f^{-1}(V)$ es abierto, esto quiere decir que $\exists\ \delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset f^{-1}(V)$ esto implica $f(B(x, \delta)) \subset V$ esto es $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \epsilon)$ esto muestra que f es continua en x. □

Proposición 2. *(1)*

$$f^{-1}(v) = \{x \in D \mid f(x) \in v\}$$

es un abierto (contenido en D) para cada abierto $v \subset \mathbb{R}^m$.
(2)

$$f^{-1}(v) = \{x \in D \mid f(x) \in v\}$$

es un cerradoo (contenido en D) para cada cerradoo $v \subset \mathbb{R}^m$.

Vamos a probar que $1 \Rightarrow 2$

Demostración. Si $V = \overline{V} \subset \mathbb{R}^m$, consideremos el conjunto V^c el cual es abierto y por hipotesis $f^{-1}(V^c)$ es abierto, pero

$$f^{-1}(V^c) = \left(f^{-1}(V)\right)^c$$

por lo que $\left(f^{-1}(V)\right)^c$ es abierto, en consecuencia $f^{-1}(V)$ es cerrado
Vamos a probar que $2 \Rightarrow 1$
Si $V = int(V) \subset \mathbb{R}^m$ entonces V^c es cerrado y por hipotesis $f^{-1}(V^c)$ es cerrado, pero

$$f^{-1}(V^c) = \left(f^{-1}(V)\right)^c$$

por lo que $\left(f^{-1}(V)\right)^c$ es cerradoo, en consecuencia $f^{-1}(V)$ es abierto

□