Funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$ (Funciones Vectoriales)

Llamaremos función vectorial de variable real o simplemente función vectorial, a aquellas con dominio en un subconjunto de $\mathbb{R}$ y contradominio en un espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. De esta manera una función vectorial f asocia a cada elemento t de un conjunto A de números reales, un único vector $f(t)$.

Puesto que $f(t)$ es un punto en el espacio R^n, éste tiene n coordenadas, las cuales son en general, funciones de la variable t. Así podemos escribir

$$f(t) = (x_1(t)), x_2(t)), ..., x_n(t)) \quad \in \mathbb{R}^n$$

Nota:*Observemos que cada una de las componentes $x_i(t)$ de una función vectorial es una función real (de variable real) y que las llamadas ecuaciones paremétricas se obtienen precisamente al expresar cada una de las componnentes en función del parámetro. Así pues, las ecuaciones paramétricas definen una función vectorial y viceversa.*
Una ecuación en dos varaibles define un lugar geométrico que por lo general, y para nuestros propósitos, será una curva plana. Cuando este lugar geométrico se define mediante ecuaciones paramétricas y pensando que un punto se mueve sobre la curva conforme el parámetro recorre el dominio, tendremos que las ecuaciones paramétricas definiran, ademas el lugar geométrico, el sentido en que la curva es recorrida, el punto de partida, la rapidez con la que se hace el recorrido, qué porción de la curva se considera (variando el dominio) y si la curva es cerrada, cuantas veces se recorre

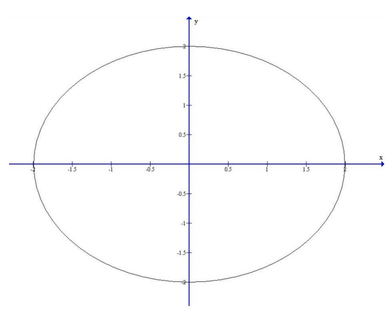
En los cursos de Geometría Analítica, ya han sido consideradas funciones de este tipo, por ejemplo, la ecuación vectorial de una recta L, en el espacio, que pasa por un punto P_0 y que es paralela a un vector $\overrightarrow{a}$, que puede darse en la función

$$L = \{P \,\epsilon\, \mathbb{R}^3 \,|\, P = P_0 + t\overrightarrow{a},\, t \,\epsilon\, \mathbb{R}\}$$

en donde, si consideramos que P_0 es un punto fijo y $\overrightarrow{a}$ es un vector tambien constante, entonces tenemos que P es una función vectorial del parametro real t, es decir, cada valor de t esta asociado con un punto P de la recta.

Ejemplo.- Si f es la función vectorial por $f(t) = (2\cos(t), 2\sin(t))$ con $t \,\epsilon\, [0, 2\pi]$, tenemos entonces que f asocia a cada número real t en el intervalo $t \,\epsilon\, [0, 2\pi]$, un par ordenado (x, y) con $x = 2\cos t$ y $y = 2\sin t$, que son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia de radio 2 y centro en el origen.

Asi pues la gráfica de f es una circunferencia.



Cada una de las funciones vectoriales que se dan a continuación, define el mismo lugar geométrico o una parte de éste; sin embargo, el sentido, el punto de partida y la rapidez de recorrido así como la porción de la curva que se considera en cada caso varia.

$$f_1(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad t\,\epsilon\,[0, 2\pi]$$

$$f_2(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad t\,\epsilon\,[0, 2\pi]$$

$$f_3(t) = (2\cos 3t, 2\sin 3t) \quad t\,\epsilon\,[0, 2\pi]$$

$$f_4(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad t\,\epsilon\,[0, \pi]$$

$$f_5(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad t\,\epsilon\,[0, 6\pi]$$

$$f_6(t) = (2\cos t, 2\sin t) \quad t\,\epsilon\,[-\pi, \pi]$$

Para una función vectorial en $\mathbb{R}^3$ decimos que: Si D es un conjunto de $\mathbb{R}$, entonces $f(t)$ es una función vectorial con dominio D si y sólo si, para todo $t\,\epsilon\,D$

$$f(t) = x_1(t)i + x_2(t)j + x_3(t)k$$

donde $x_1(t), x_2(t)$ y $x_3(t)$ son funciones escalares con dominio D.

Ejemplo Que representa la función vectorial cuyas ecuaciones parametricas son:

$$f(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$$

En este caso haciendo la sustitución $t = \tan\left(\dfrac{u}{2}\right)$ se tiene que

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\tan^2\left(\frac{u}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{1-\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}} = \frac{\frac{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)-\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)} = \cos^2\left(\frac{u}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{2u}{2}\right) = \cos(u)$$

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\tan\left(\frac{u}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{u}{2}\right)} = 2\frac{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}}{1+\frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}} = 2\frac{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos\left(\frac{u}{2}\right)}}{\frac{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{u}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{u}{2}\right)}} = 2\operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{u}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{2u}{2}\right) = \operatorname{sen}(u)$$

donde $u \in [0, \pi]$.
al ser

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \cos^2(u) + \operatorname{sen}^2(u) = 1$$

se trata de una circunferencia con centro en el origen

Dominio de una función Vectorial

El dominio de una función vectorial $r(t)$ es el conjunto de valores permitidos de t. Si $r(t)$ se define en términos de las funciones de las componentes y no se especifica explícitamente el dominio, entonces se sobreentiende que el dominio es la intersección de los dominios naturales de las funciones de las componentes, por lo que éste recibe el nombre de dominio natural de $r(t)$. Sea

$$f(t) = (x_1(t)), x_2(t)), ..., x_n(t)) \quad \in \mathbb{R}^n$$

entonces el $Dom(f) = \bigcap_{i=1}^{n} x_i(t)$

Ejemplo Halle el dominio de la función vectorial $f(t) = (t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t})$

Solución tenemos que

$$Si \quad x_1(t) = t^2 \quad entonces \quad Dom(x_1(t)) = \mathbb{R}$$
$$Si \quad x_2(t) = \sqrt{t-1} \quad entonces \quad Dom(x_2(t)) = \{t \in \mathbb{R} | t \geq 1\}$$
$$Si \quad x_3(t) = \sqrt{5-t} \quad entonces \quad Dom(x_3(t)) = \{t \in \mathbb{R} | 5 \geq t\}$$

Por lo tanto

$$Dom(f(t)) = \bigcap \{Dom(x_1(t)), Dom(x_2(t)), Dom(x_3(t))\} = \{t \in \mathbb{R} | 1 \leq t \leq 5\}$$

Ejemplo Halle el dominio de la función vectorial $f(t) = (Ln(t), \frac{t}{t-1}, e^{-t})$

Solución tenemos que

$$Si \quad x_1(t) = Ln(t) \quad entonces \quad Dom(x_1(t)) = \{t \in \mathbb{R} | 0 < t\}$$
$$Si \quad x_2(t) = \frac{t}{t-1} \quad entonces \quad Dom(x_2(t)) = \{t \in \mathbb{R} | 1 \neq t\}$$
$$Si \quad x_3(t) = e^{-t} \quad entonces \quad Dom(x_3(t)) = \mathbb{R}$$

Por lo tanto

$$Dom(f(t)) = \bigcap \{Dom(x_1(t)), Dom(x_2(t)), Dom(x_3(t))\} = \{t \in \mathbb{R} | 0 < t, \quad t \neq 1\}$$

Operaciones con Funciones Vectoriales

Las operaciones usuales del algebra vectorial pueden aplicarse para combinar 2 funciones o una función vectorial con una función real.

Si f y g son funciones vectoriales y si u es una función real, teniendo todas un dominio común, definimos nuevas funciones $F+G$, uF y $F \cdot G$ mediante

a) $(F+G)(t) = F(t) + G(t)$

b) $uF(t) = u(t)F(t)$

c) $(F \cdot G)(t) = F(t) \cdot G(t)$

d) $(F \times G)(t) = F(t) \times G(t)$ si $F, G \in \mathbb{R}^3$

Limites de Funciones Vectoriales

Definición 1. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial definida para todos los valores de t en alguna vecindad de un punto t_0, excepto quiza en t_0. Entonces se dice que el límite de la función f cuando t se acerca a t_0 es $L \in \mathbb{R}^n$ y se expresa como*

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L$$

si y solo si $\forall\ \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $\|f(t) - L\| < \epsilon$ siempre que $|t - t_0| < \delta$

Teorema 1. *Si $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una función vectorial, entonces*

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L = (l_1, \cdots, l_n) \in \mathbb{R}^n \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to t_0} x_i(t) = l_i$$

Donde $f(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$

Demostración. Si

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L$$

entonces $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que si $0 < |t - t_0| < \delta$, entonces $\|f(t) - L\| < \epsilon$. Pero como

$$\|f(t) - L\| = \|x_1(t) - l_1, \cdots, x_n(t) - l_n\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - l_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

se tiene que

$$|x_i(t) - l_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - l_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \epsilon$$

Por lo tanto dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x_i(t) - l_i| < \epsilon$ por lo tanto

$$\lim_{t \to t_0} x_i(t) = l_i$$

Reciprocamente

Supongamos ahora que

$$\lim_{t \to t_0} x_i(t) = l_i \qquad i = 1, \cdots, n.$$

Esto quiere decir que $\forall\ \epsilon_i > 0\ \exists\ \delta_i > 0$ tal que $0 < |t - t_0| < \delta_i \Rightarrow |x_i(t) - l_i| < \epsilon_i$.

Sea $\epsilon > 0$ y sea $\epsilon_i = \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}$ tomamos $\delta = \mathbf{min}(\delta_1, \cdots, \delta_n)$.

Para esta δ se tiene $0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x_i(t) - l_i| < \frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\ \forall\ i = 1, \cdots, n$, entonces

$$\|f(t) - L\| = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i(t) - l_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{n}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \epsilon$$

Por lo tanto

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = L$$

$\square$

Ejemplo: Se sabe que

$$\lim_{t\to 2}(t,t) = (2,2)$$

Puesto que $\epsilon > 0$, determine $\delta > 0$ que verifique la validez del límite.
Tenemos que

$$\lim_{t\to 2}(t,t) = \left(\lim_{t\to 2} t, \lim_{t\to 2} t\right) = (2,2)$$

$\therefore$ Según la definición

$$\|(t,t)-(2,2)\| = \sqrt{(t-2)^2+(t-2)^2} = \sqrt{2(t-2)^2} = \sqrt{2}|t-2|$$

$$\therefore \quad si \quad \sqrt{2}|t-2| < \epsilon$$

podemos definir a $\delta = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$

Ejemplo: Se sabe que

$$\lim_{t\to 2}(t,t^3) = (2,8)$$

Puesto que $\epsilon > 0$, determine $\delta > 0$ que verifique la validez del límite.
Tenemos que

$$\lim_{t\to 2}(t,t^3) = \left(\lim_{t\to 2} t, \lim_{t\to 2} t^3\right) = (2,8)$$

Ahora bien

$$\lim_{t\to 2} t = 2 \;\Leftrightarrow\; Para \;\; \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \;\; \exists\, \delta_1 > 0 \; tal \; que \; 0 < |t-2| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |t-2| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

$$\lim_{t\to 2} t^3 = 8 \;\Leftrightarrow\; Para \; \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \;\; \exists\, \delta_2 > 0 \; tal \; que \; 0 < |t-2| < \delta_1 \;\Rightarrow\; |t^3-8| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto si consideramos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene

$$\|(t,t^3)-(2,8)\| = \sqrt{(t-2)^2+(t^3-8)^2} < \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{2\frac{\epsilon^2}{2}} = \epsilon$$

$$\therefore \lim_{t\to 2}(t,t^3) = (2,8)$$