Continuidad de Funciones Vectoriales

Definición 1. *Sea $f\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial. Se dice que f es continua en t_0 si y solo si se cumple que*

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$$

Ejercicio: La función vectorial $f(t) = (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t))$ es continua en t_0 si y solo si $x_1, x_2, ..., x_n$ son continuas en t_0.

Demostración. Como $f(t)$ es continua en $t = t_0$, tenemos que se cumple

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$$

Por otro lado se tiene que

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = \lim_{t \to t_0} (x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)) = \left(\lim_{t \to t_0} x_1(t), \lim_{t \to t_0} x_2(t), ..., \lim_{t \to t_0} x_n(t)\right)$$

y como $f(t_0) = (x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_n(t_0))$ entonces

$$\left(\lim_{t \to t_0} x_1(t), \lim_{t \to t_0} x_2(t), ..., \lim_{t \to t_0} x_n(t)\right) = (x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_n(t_0))$$

$$\therefore \quad \lim_{t \to t_0} x_1(t) = x_1(t_0) \quad , \quad \lim_{t \to t_0} x_2(t) = x_2(t_0), ..., \lim_{t \to t_0} x_n(t) = x_n(t_0)$$

$\therefore x_1(t), x_2(t), ...x_n(t)$ son continuas en $t = t_0$ □

Ejercicio.- Definir la función

$$f(t) = \frac{\sin t}{t}\hat{i} + \cos(t)\hat{j}$$

en $t = 0$ de manera que $f(t)$ sea continua en $t = 0$.

Solución: Tenemos que

$$\lim_{t \to 0} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}\hat{i} + \cos t\hat{j} = \hat{i} + \hat{j}$$

Por lo tanto si definimos $f(0) = \hat{i} + \hat{j}$, entonces

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = f(t_0)$$

Teorema 1. *Si f es continua en $A \subset \mathbb{R}$ entonces para toda sucesión x_k en A tal que $x_k \to x_0$ se tiene que $f(x_k) \to f(x_0)$*

Demostración. ($\Rightarrow$) Supongamos que $x_k \to x$ para mostar que $f(x_k) \to f(x)$ sea $\epsilon > 0$ como f es continua en $x_0 \in A$ se tiene que

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \epsilon$$

elegimos entonces $k > N$ tal que $|x_k - x_0| < \delta \Rightarrow \|f(x_k) - f(x_0)\| < \epsilon$
($\Leftarrow$) Supongamos que para cada $x_k \in A$ tal que $x_k \to x$ se tiene que $\|f(x_k) - f(x)\| < \epsilon$ y queremos

demostrar que f es continua en x_0 si $x_k \to x_0$ entonces $|x_k - x_0| < \epsilon$ si $k > N_0$ tomemos $\delta = \epsilon_1$ y tenemos que

$$|x_k - x_0| < \epsilon_1 \Rightarrow |x_k - x_0| < \delta \underbrace{\Rightarrow}_{f \quad continua} \|f(x_k) - f(x_0)\| < \epsilon$$

□

Derivadas de Funciones Vectoriales

Generalizando un poco las ideas del cálculo diferencial de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Recordemos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto t_0 si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

existe y en tal caso lo denotamos $f'(t_0)$

Definición 2. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una trayectoria definida en un intervalo abierto $I \in \mathbb{R}$ y $t_0 \in I$. Se define la derivada de f en t_0, denotada por $f'(t_0)$ como*

$$f'(t_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

cuando este limite existe

Teorema 2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función vectorial, $t_0 \in \mathbb{R}$. f es diferenciable en el punto t_0 si y solo si cada función componente $x_i(t)$ de f es diferenciable en el punto t_0, en cuyo caso*

$$f'(t_0) = (x_1'(t), x_2'(t), ..., x_n'(t))$$

Demostración. ($\Rightarrow$)
Supongamos que f es diferenciable en t_0. Entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \qquad existe$$

por otro lado

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(\frac{(x_1(t_0 + h), x_2(t_0 + h), ..., x_n(t_0 + h)) - (x_1(t_0), x_2(t_0), ..., x_n(t_0))}{h} \right) =$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{x_1(t_0 + h) - x_1(t_0)}{h}, \frac{x_2(t_0 + h) - x_2(t_0)}{h}, ..., \frac{x_n(t_0 + h) - x_n(t_0)}{h} \right) =$$

$$\left(\lim_{h \to 0} \frac{x_1(t_0 + h) - x_1(t_0)}{h}, \lim_{h \to 0} \frac{x_2(t_0 + h) - x_2(t_0)}{h}, ..., \lim_{h \to 0} \frac{x_n(t_0 + h) - x_n(t_0)}{h} \right)$$

conforme $h \to 0$ cada limite de las funciónes componentes existe $\therefore$

$$\lim_{h \to 0} \frac{x_i(t_0 + h) - x_i(t_0)}{h} = x_i'(t_0)$$

$\therefore$ cada x_i es diferenciable en t_0
($\Leftarrow$) Se pueden regresar en los pasos de la prueba anterior □

Definición 3. *La derivada $f'(t)$ de una trayectoria f puede ser asociada a una matriz $n \times 1$ la cual es conocida como la matriz Jacobiana de f en el punto t_0*

Se denota

$$Jf(t_0) = \begin{bmatrix} x_1'(t_0 \\ x_2'(t_0) \\ . \\ . \\ . \\ x_n'(t_0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio Utilizar la definicióm de derivada para demostrar que:
Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ esta dada por $f(t) = a \in \mathbb{R}^n$, a constante, entonces $f'(t) = 0$

Solución

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a-a}{h} = 0$$

Ejercicio Si $f(t) = ah(t)$ entonces $f'(t) = ah'(t)$

Solución

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{ah(t+ht) - ah(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} a \lim_{h\to 0} \frac{h(t+h) - h(t)}{h} \\ &= ah'(t) \end{aligned}$$

Ejercicio Si $f(t)$ y $g(t)$ son funciones vectoriales, entonces $(f+g)'(t) = f'(t) + g'(t)$

Solución

$$\begin{aligned} (f+g)'(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f+g(t+h) - [f+g(t)]}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) + g(t+h) - f(t) - g(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} + \frac{g(t+h) - g(t)}{h} \\ &= f'(t) + g'(t) \end{aligned}$$

Ejercicio Si $f(t)$ es una función vectorial y $\phi(t)$ es una función escalar entonces $(\phi(t)f(t))' = \phi(t)f'(t) + \phi'(t)f(t)$

Solución

$$\begin{aligned} (\phi(t)f(t))' &= \lim_{h\to 0} \frac{\phi(t+h)f(t+h) - \phi(t)f(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\phi(t+h)[f(t+h) - f(t)] + [\phi(t+h) - \phi(t)]f(t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\phi(t+h)[f(t+h) - f(t)]}{h} + \frac{[\phi(t+h) - \phi(t)]f(t)}{h} \\ &= \phi(t)f'(t) + \phi'(t)f(t) \end{aligned}$$

Ejercicio $(f \cdot g)`(t) = f(t) \cdot g'(t) + f'(t) \cdot g(t)$

Solución:

$$\begin{aligned}
(f \cdot g(t))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)\cdot g(t+h) - f(t)\cdot g(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)\cdot [g(t+h) - g(t)] + [f(t+h) - f(t)]\cdot g(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)\cdot [g(t+h) - g(t)]}{h} + \frac{[f(t+h) - f(t)]\cdot g(t)}{h} \\
&= f(t)\cdot g'(t) + f'(t)\cdot g(t)
\end{aligned}$$

Ejercicio $(f \times g)`(t) = f(t) \times g'(t) + f'(t) \times g(t)$

Solución:

$$\begin{aligned}
(f \times g(t))' &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)\times g(t+h) - f(t)\times g(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)\times [g(t+h) - g(t)] + [f(t+h) - f(t)]\times g(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)\times [g(t+h) - g(t)]}{h} + \frac{[f(t+h) - f(t)]\times g(t)}{h} \\
&= f(t)\times g'(t) + f'(t)\times g(t)
\end{aligned}$$