Ejercicio Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$. Hallar $(\|f(t)\|)'$

Solución En este caso

$$\begin{aligned}(\|f(t)\|)' &= \left(\sqrt{f_1^2(t)+...+f_n^2(t)}\right)' \\ &= \frac{f(t)\cdot f'(t)}{\|f'(t)\|}\end{aligned}$$

Ejercicio Mostramos que la derivada de un vector de magnitud constante es ortogonal a el.

Solución Sea $r(t)$ un vector de magnitud constante

$$r(t)\cdot r(t) = ||r(t)||^2 = \text{constante}$$

por lo tanto

$$\frac{dr(t)\cdot r(t)}{dt} = r(t)\cdot r'(t) + r'(t)\cdot r(t) = 2r(t)\cdot r'(t)\cdots(1)$$

por otro lado

$$\frac{dr(t)\cdot r(t)}{dt} = \frac{\|r(t)\|^2}{dt} = 0\cdots(2)$$

de (1) y (2) tenemos

$$\begin{aligned}2r(t)\cdot r'(t) &= 0\\ r(t)\cdot r'(t) &= 0\end{aligned}$$

por lo tanto el vector es ortogonal a su derivada

Teorema del Valor Medio para Funciones Vectoriales

Una versión del Teorema del valor medio para funciones vectoriales seria:
Si f es una función vectorial continua sobre $[a,b]$ y diferenciable sobre (a,b), entonces existe $C\in(a,b)$ tal que

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'(C)$$

Por un lado se tiene que

$$\begin{aligned}f(t) = (f_1(t),...,f_n(t)) \;&\Rightarrow\; f(b)-f(a) = (f_1(b)-f_1(a),...,f_n(b)-f_n(a))\\ &\Rightarrow\; \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \left(\frac{(f_1(b)-f_1(a),...,f_n(b)-f_n(a)}{b-a}\right)\end{aligned}$$

podemos entonces aplicar el Teorema del valor medio para funciones reales y tenemos que

$$\exists\, c_i\in(a,b) \ni \frac{f_i(b)-f_i(a)}{b-a} = f'(c_i),\quad i=1,...,n$$

Por otro lado

$$f'(C) = (f_1(C),...,f_n(C))$$

de manera que

$$(f_1(C),...,f_n(C)) \neq (f_1'(c_1),...,f_n'(c_1))$$

y por lo tanto el teorema del valor medio no es válido para funciones vectoriales

Ejemplo Sea $\gamma : [0,1] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$\gamma(t) = (\cos(2\pi\ t), \operatorname{sen}(2\pi\ t), t)$$

En este caso se tiene que

$$\gamma'(t) = (-2\pi\ \operatorname{sen}(2\pi\ t), 2\pi \cos(2\pi\ t), 1)$$

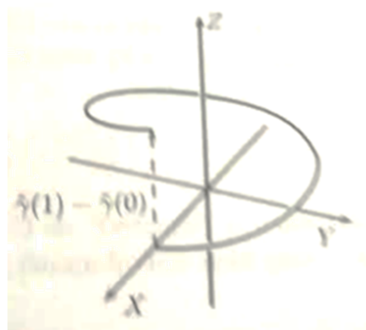
por lo tanto no existe $C \in (0,1)$ tal que

$$\gamma(1) - \gamma(0) = (2\pi - 0)\gamma'(C) = (-4\pi \operatorname{sen}(C), 4i \cos(C), 2\pi)$$

ya que

$$\gamma(1) - \gamma(0) = (0,0,1)$$

y $2\pi \neq 1$



Integrales de Funciones Vectoriales

Definición 1. *Si $f = (f_1, \ldots, f_n)$ es una funcion vectorial definida sobre $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f = \left(\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_n \right)$$

La integral existe siempre que cada una de las integrales $\displaystyle\int_a^b f_1$ con $i = 1, \ldots, n$ existe. En particular, si f es continua sobre $[a,b]$ entonces $\displaystyle\int_a^b$ existe.

Teorema 1. *Si $f = (f_1, \ldots, f_n)$ es continua sobre un intervalo I y $a \,\epsilon\, I$ entonces:*

$$\frac{d \displaystyle\int_a^t f}{dt} = f(t) \quad \forall \quad t \,\epsilon\, I$$

Demostración. La prueba se obtiene por la aplicación del primer teorema fundamental del cálculo a cada una de las funciones componentes

$$\begin{aligned}
\frac{d\displaystyle\int_a^t f}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\int_a^t f_1, \ldots, \int_a^t f_n\right) \\
&\left(\frac{d}{dt}\int_a^t f_1, \ldots, \frac{d}{dt}\int_a^t f_n\right) \\
&= (f_1(t), \ldots, f_n(t)) \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

□

Teorema 2. *Si $f = (f_1, \ldots, f_n)$ tiene derivada continua sobre un intervalo I, entonces $\forall \quad a, b \in I$ $\displaystyle\int_a^b f'(t) = f(b) - f(a)$*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\int_a^b f' &= \int_a^b (f_1', \ldots, f_n') \\
&= \left(\int_a^t f_1', \ldots, \int_a^t f_n'\right) \\
&= (f_1(b) - f_1(a), \ldots, f_n(b) - f_n(a)) \\
&= f(b) - f(a)
\end{aligned}$$

□

Ejercicio Si $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))$ es integrable en $[a, b]$, para todo vector $C = (c_1, c_2, ..., c_n)$ entonces el producto escalar $C \cdot F$ es integrable en $[a, b]$ y

$$C \cdot \int_a^b f(t)dt = \int_a^b C \cdot f(t)dt$$

Solución Tenemos que

$$C \cdot \int_a^b f(t)dt = (c_1, c_2, ..., c_n) \cdot \left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt, ..., \int_a^b f_n(t)dt\right) =$$

$$\left(c_1 \cdot \int_a^b f_1(t)dt + c_2 \cdot \int_a^b f_2(t)dt + ... + c_n \cdot \int_a^b f_n(t)dt\right) =$$

$$\left(\int_a^b c_1 \cdot f_1(t)dt +, \int_a^b c_2 \cdot f_2(t)dt + ... + \int_a^b c_n \cdot f_n(t)dt\right) = \int_a^b C \cdot f(t)dt$$