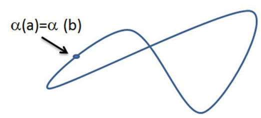
Curvas

Definición 1. *Una función vectorial* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ *continua en* $I = [a, b]$ *se llama trayectoria ó camino.*

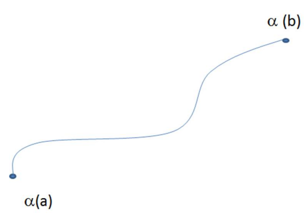
Definición 2. *A la imagen de una trayectoria se le llama curva.*

Definición 3. *Si la función continua* $f_I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *esta definida en el intervalo cerrado* $I = [a, b]$ *diremos que el punto* $f(a) \in \mathbb{R}^n$ *es el punto inicial del camino o trayectoria f, en tanto que* $f(b) \in \mathbb{R}^n$ *es el punto final de f.*

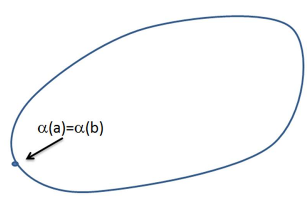
Definición 4. *Una curva cerrada es una curva con la propiedad de que* $f(a) = f(b)$*, esto es, el punto terminal sobre la curva coincide con el punto inicial.*



Definición 5. *Un arco simple o curva simple es una curva con la propiedad de que* $f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$*, es decir la curva no se cruza a si misma.*



Definición 6. *Una curva cerrada simple o una curva de Jordan es una curva cerrada con la propiedad de que* $f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$



Ejercicio.-Demuestre que toda curva del tipo $f(t) = (at + b, ct + d)$ donde a y c son reales no nulos, es simple

Demostración. Para que $f(t)$ sea una curva simple debe ocurrir que $f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2 \; \forall t_1, t_2 \in I$ tenemos que $f(t_1) = (at_1 + b, ct_1 + d)$ y $f(t_2) = (at_2, ct_2 + d) \therefore$

$$f(t_1) = f(t_2) \Rightarrow (at_1 + b, ct_1 + d) = (at_2 + b, ct_2 + d) \Rightarrow at_1 + b = at_2 + b \quad y \quad ct_1 + d = ct_2 + d \Rightarrow t_1 = t_2$$

por lo que f es simple □

Ejercicio.-Demuestre que la curva $f(t) = (t^2 + 1, t^2 - 1)$ no es simple

Demostración. Tenemos que $f(1) = (1^2, 1^2 - 1) = (2, 0) = ((-1)^2 + 1, (-1)^2 - 1) = f(-1)$ pero $1 \neq -1$ por lo que f no es simple $\square$

Parametrización de Curvas

Definición 7. *Sea $C \subset \mathbb{R}^n$. Decimos que C es una curva si existe*

$$\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$$

derivable en un intervalo I tal que $\alpha(t) = C$.
Si además $\alpha'(t) \neq 0, \ \ \forall\, t \in I$ decimos que C es una curva regular (suave).
Se dice que α es una parametrización de C.

Ejemplo *Sea $R \subset \mathbb{R}^2$ la recta cuya ecuación cartesiana es*

$$ax + by + c = 0$$

Muestre que si

$$\overline{x_0} = (x_0, y_0), \quad \overline{x_1} = (x_1, y_1)$$

son dos puntos diferentes que pertenecen a R entonces la función

$$\alpha(t) = \overline{x_0} + t(\overline{x_1} - \overline{x_0})$$

es una parametrización de R.

Solución *En este caso se tiene que*

$$\overline{x_0} + t(\overline{x_1} - \overline{x_0}) =$$

$$(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + y(y_1 - y_0))$$

evaluando en la ecuación cartesiana

$$a(x_0 + t(x_1 - x_0)) + b(y_0 + y(y_1 - y_0)) + c$$

$$= ax_0 + atx_1 - atx_0 + by_0 + bty_1 - bty_0 + c$$

$$= (ax_0 + by_0) - t(ax_0 + by_0) + t(ax_1 + by_1) + c$$

$$= -c + c - c + c = 0$$

por lo que $\alpha(t) = C, \ \ t \in \mathbb{R}$

Curvas Rectificables

Definición 8. *Para funciones vectoriales: Sea $f(t)$ una curva dada por $f(t) = (f_1(t), ..., f_n(t))$ $t \in [a, b]$ y sea P una partición de $[a, b]$ $P = \{a = t_0, t_1, ..., t_{n=b}\}$ la suma*

$$L_\Delta = \Sigma \| f(t_k) - f(t_{k-1}) \|$$

es una aproximación a la longintud de la curva. Si los números L_Δ estan acotados para todas las particiones de $[a, b]$, entonces se dice que la curva C es rectificable y que la longitud de la curva esta dada por

$$L_C = sup \quad L_\Delta = sup \quad \Sigma \| f(t_k) - f(t_{k-1}) \|$$

Si los números L_Δ no estan todos acotados se dice que la curva C no es rectificable.

Teorema 1. *Sea C una curva dada por $f(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t))$ $t \in [a, b]$ una condición necesaria y suficiente para que C sea rectificable es que f_i $i = 1, ..., n$ tengan variación acotada*

Demostración. Necesidad. Supóngase que C es rectificable y que L_C existe y sea P cualquier partición de I. Entonces

$$|f_i(t_k) - f_i(t_{k-1})| \leq \|f_(t_k) - f(t_{k-1})\|$$

Dado que un vector tiene una longitud mayor que cualquiera de sus componentes. Por lo tanto

$$\sum |f_i(t_k) - f_i(t_{k-1})| \leq \sum \|f_(t_k) - f(t_{k-1})\| \leq L_C$$

Por lo tanto f_i tiene variación acotada para toda i y para toda partición P de [a,b].
Suficiencia. Supongamos ahora que $f_1, ..., f_n$ tiene variación acotada esto significa que existe $vf_1, ..., vf_n$ por lo que

$$\|f_(t_k) - f(t_{k-1})\| \leq |f_1(t_k) - f_1(t_{k-1})| + |f_2(t_k) - f_2(t_{k-1})| + ... + |f_n(t_k) - f_n(t_{k-1})| \leq$$

$$vf_1 + vf_2 + ... + vf_n$$

Por lo tanto

$$\sum \|f_(t_k) - f(t_{k-1})\| \leq \sum |f_i(t_k) - f_i(t_{k-1})| \leq \sum vf_i$$

Por lo tanto $\sum \|f_(t_k) - f(t_{k-1})\|$ esta acotada y por lo tanto f es rectificable □ □

Teorema 2. *Si f es monótona en [a,b], entonces f es de variación acotada en [a,b]*

Demostración. Sea f creciente. Entonces $\forall$ partición de [a,b] $f(t_k) - f(t_{k-1}) \geq 0$ por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} f(t_k) - f(t_{k-1}) = f(b) - f(a)$$

□

Teorema 3. *Si f es una función continua en [a,b] y existe f' y es ésta acotada en el interior de [a,b] $|f'(x)| \leq M$ $\forall x \in (a, b)$, entonces f es de variación acotada en [a,b]*

Demostración.

Dem: Por el teorema del valor medio

$$f(t_k) - f(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1})f'(t_k^*)$$

con $t_k^* \in (t_{k-1}, t_k)$ por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} |f(t_k) - f(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |t_k - t_{k-1}| \, |f'(t_k^*)| \leq \sum_{k=1}^{n} |t_k - t_{k-1}| \, M = (b-a)M$$

por lo tanto f es de variación acotada $\square$

Ejemplo: Mostrar que la siguiente función vectorial (curva) $f(t) = [t, t^2]$ es rectificable

Solución: Tenemos que $f_1(t) = t$ es monotona y continua en [0,1] por lo tanto f_1 es de variación acotada. Para $f_2(t) = t^2$ es monotona y continua en [0,1] por lo tanto f_2 es de variación acotada. Finalmente como f_1 y f_2 son de variación acotada entonces la curva f es rectificable

Ejemplo: Mostrar que la siguiente función vectorial (curva) $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = [t, t\cos\left(\frac{\pi}{2t}\right)]$ donde $f(0) = (0,0)$ no es rectificable

Solución: En este caso tenemos que revisar cada una de las funciones componentes.
Para $x_1(t) = t$ en $[0,1]$ tenemos que x_1 es monotona creciente y según el resultado anterior, es de variación acotada.
Para $x_2(t) = t\cos\left(\dfrac{\pi}{2t}\right)$ Ahora tomamos la partición

$$P = \left\{0 = x_0, x_1 = \frac{1}{2n}, x_2 = \frac{1}{2n-1}, ..., \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, x_n = 1\right\}$$

Por definición $f(x_0) = 0$ y para $x_i \neq 0$ se tiene que

$$\begin{array}{c}
f\left(1\right) = 1\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\
f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\pi\right) = -\frac{1}{2} \\
f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) = 0 \\
f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}\cos\left(2\pi\right) = \frac{1}{4} \\
f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{5}\cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0 \\
f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}\cos\left(3\pi\right) = -\frac{1}{6} \\
\cdot \\
\cdot \\
\cdot
\end{array}$$

Por lo tanto

$$\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})| = \left|0 - \left(-\frac{|1}{2}\right)\right| + \left|-\frac{1}{2} - 0\right| + \left|0 - \frac{1}{4}\right| + \left|\frac{1}{4} - 0\right| + \cdots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \cdots = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \cdots\right)$$

$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ...\right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots\right)$$

esta última es la serie armónica la cual no converge a medida que n es suficientemente grande, por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$ no es acotada y en consecuencia la función no es de variación acotada, por lo tanto la curva no es rectificable