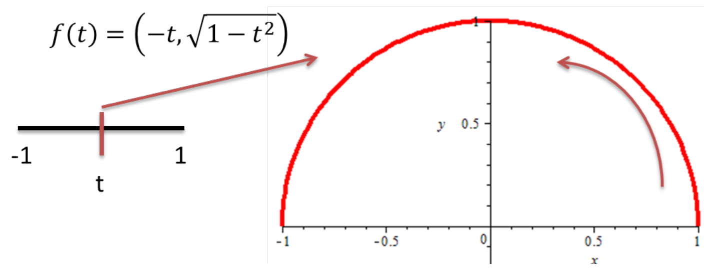
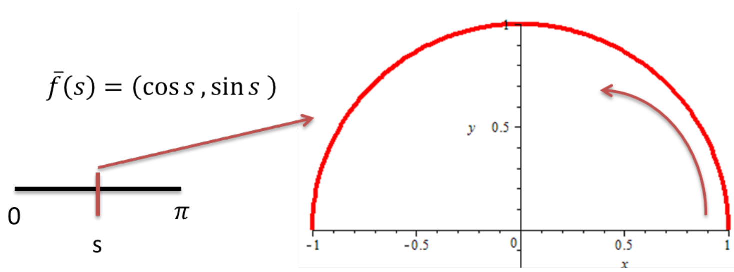
Reparametrización de curvas

Ejemplo: Consideremos la curva $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (-t, \sqrt{1-t^2})$ la cual describe un arco de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ entre -1 y 1.

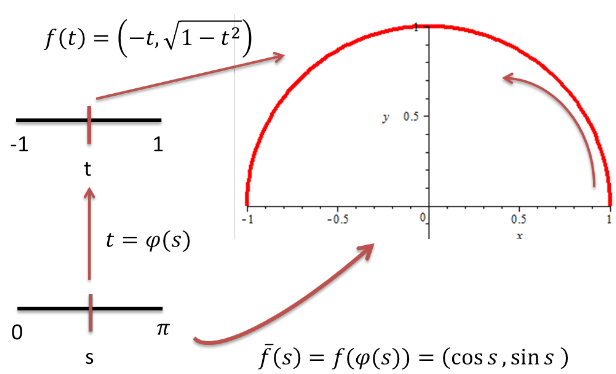


Sea $\overline{f} : [0, \pi] \to [0, pi]$ la función $\overline{f}(s) = [\cos(s), \sin(s)]$



Si definimos una función $\varphi : [0.\pi] \to [-1, 1]$ dada por $\varphi(s) = -cos(s)$ tenemos que $\overline{f} = f \circ \varphi$, es decir

$$\overline{f}(s) = f \circ \varphi(s) = f(\varphi(s)) = f(-cos(s)) = [-(-cos(s)), \sqrt{1 - (-\cos(s))^2}] = [cos(s), \text{sen}(s)]$$



Decimos que $\overline{f}$ es una reparametrización de f

Definición Sea $f : [a, b] \subset \mathbb{R}^n$ una curva con derivada distinta de cero. Sea $\varphi : [c, d] \to [a, b]$ una función con derivada continua sobreyectiva tal que $\varphi' \neq 0\ \forall s \in [a, b]$. Entonces la curva $g = f \circ \varphi : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ se llama reparametrización de la curva f

Observación: La condición $\varphi' \neq 0$ nos conduce a $\varphi' > 0$ o $\varphi' < 0$. Si $\varphi' > 0$ entonces φ es una función creciente en [c,d] de modo que $\varphi(c) = a$ y $\varphi(c) = b$ y asi los puntos inicial y final de g coinciden con los respectivos de f

$$g(c) = f \circ \varphi(c) = f(\varphi(c)) = f(a) \quad g(d) = f \circ \varphi(d) = f(\varphi(d)) = f(b)$$

como $g'(s) = \varphi'(s)f'(\varphi(s))$ entonces f' y g' tienen la misma dirección y en este caso, entonces, el camino g recorre la curva descrita por f en la misma dirección. En este caso g es una reparametrización que conserva la orientación

Ejemplo: Obtenga una reparametrización de la curva $f : [0, 2] \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (3t+2, t^3+3)$

Solución: Proponemos $t = \varphi(s) = 2s$ para la cual $\varphi'(s) = 2 > 0$ no se anula para ningun valor. Ahora bien si $t = 0 \Rightarrow s = 0$ y $t = 2 \to s = 1$ por lo tanto $\varphi : [0, 1] \to [0, 2]$ mientras que

$$g(s) = f(\varphi(s)) = f(2s) = (3(2s) + 2, (2s)^3 + 3) = (6s + 2, 8s^3 + 3) \quad s \in [0, 1]$$

tenemos entonces que g es una reparametrización de f. Vamos a comprobar que representan el mismo lugar geométrico. Para $f(t)$ se tiene $x = 3t+2 \to t = \frac{x-2}{3}$ y si $y = t^3+3$ entonces $y = \left(\frac{x-2}{3}\right)^3 + 3$ mientras que para $g(s)$ $x = 6s + 2 \to s = \frac{x-2}{6}$ por tanto si $y = 8s^3 + 3$ entonces $y = \left(\frac{x-2}{6}\right)^3$ igualando coordenadas

$$\left(\frac{x-2}{3}\right)^3 + 3 = \left(\frac{x-2}{6}\right)^3 \Rightarrow \frac{1}{3^3} = \frac{8}{6^3}$$

lo cual es cierto por lo tanto representan el mismo lugar geometrico

Sea $\overline{f} : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una reparametrización de una curva f de tal manera que la rapidez a que $\overline{f}$ recorre la curva sea constante e igual a uno.
Es decir

$$\|\overline{f}'(t)\| = 1, \quad \forall\ t \in [a, b]$$

tenemos entonces

$$L(\overline{f}) = \int_a^b \|\overline{f}'(t)\| dt = \int_a^b dt = b - a$$

por lo que $\overline{f}$ será una reparametrización tal que la longitud de la curva es igual al tiempo que emplea en recorrerla.

Ejemplo Sea $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = [\cos(t), \sin(t)]$. En este caso se tiene

$$\|f'(t)\| = \sqrt{(-\operatorname{sen}(t))^2 + (\cos(t))^2} = 1$$

por lo que

$$L(f) = 2\pi$$

Función Longitud de Arco

Si al extremo final de la curva $L(t) = \int_a^t \|f'(t)\|dt$ se deja variable, entonces el límite superior de la integral depende del parámetro t, y se tiene que la longitud de arco de una curva es función de la variable escalar t o sea $L(t) = \int_a^t \|f'(t)\|dt$ entonces $L(t)$ define un nuevo parámetro para c al que se denomina parámetro de longitud de arco.

Reparametrización por Longitud de Arco

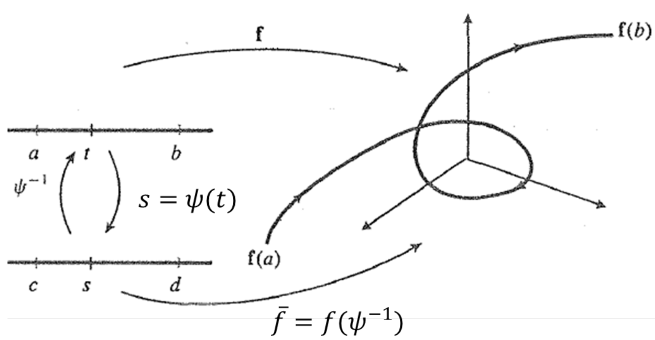
Sea

$$s = \psi(t) = \int_a^t \|f'(u)\|du$$

Noetemos que

$$\psi'(t) = \|f'(t)\| > 0$$

es decir que como función de t ψ es creciente y por tanto biyectiva, en consecuencia exite ψ^{-1}.
Vamos ahora a considerar esta función ψ para dar una reparametrización de una función f dada.



Tenemos entonces que

$$\overline{f}'(s) = \left(f \circ \psi^{-1}\right)'(s) = f'(\psi^{-1}(s))(\psi^{-1})'(s) = f'(t)\left(\frac{1}{\psi(\psi'(s))}\right) = f'(t)\frac{1}{\psi'(t)} = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$$

por lo que

$$\|\overline{f}'(s)\| = 1$$

Definición 1. *Dada una curva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$ diremos que $\overline{f}$ es una reparametrización por longitud de arco de f si $\|\overline{f}'\| = 1$*