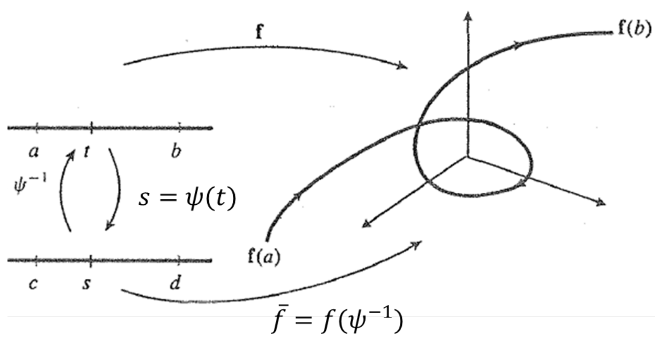
Reparametrización por Longitud de Arco

Proposición 1. *Sea $C \subset \mathbb{R}$ una curva suave. Si $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es una parametrización de C tal que $f'(t)$ es continua y diferente de cero para toda $t \in [a, b]$ entonces C tiene una parametrización por longitud de arco*

Demostración. Sea $t \in [a, b]$ definimos

$$s = \psi(t) = \int_a^t \|f'(u)\| du$$



Notemos que

$$\psi'(t) = \|f'(t)\| > 0$$

es decir que como función de t, ψ es creciente y por tanto biyectiva, en consecuencia exite ψ^{-1}.
Vamos ahora a considerar esta función ψ^{-1} para dar una reparametrización de una función f dada. Definimos $\overline{f} : [c, d] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ como

$$\overline{f}(s) = (f \circ \psi^{-1})(s)$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\overline{f}'(s) &= \left(f \circ \psi^{-1}\right)'(s) \\
&= f'(\psi^{-1}(s))(\psi^{-1})'(s) \\
&= f'(\psi^{-1}(s)) \left(\frac{1}{\psi'(\psi^{-1}(s))}\right) \\
&= f'(\psi^{-1}(s)) \frac{1}{\|f'(\psi^{-1}(s))\|}
\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}
\|\overline{f}'(s)\| &= \left\| f'(\psi^{-1}(s)) \frac{1}{\|f'(\psi^{-1}(s))\|} \right\| \\
&= \|f'(\psi^{-1}(s))\| \left(\frac{1}{\|f'(\psi^{-1}(s))\|}\right) = 1
\end{aligned}$$

$\square$

Ejemplo: Sea $f(t) = (r\cos t, r\sin t)$. Obtengamos la reparametrizacion por la longitud de arco.

$$s = \psi(t) = \int_0^t \|f'(u)\|du = \int_0^t \sqrt{r^2(\cos^2(u) + \sin^2(u))}du = \int_0^t rdu = rt$$

Entonces $s = rt$, por lo tanto $\psi^{-1}(s) = \frac{s}{r} = t$.

Entonces el camino

$$\overline{f}(s) = f \circ \psi^{-1}(s) = f\left(\psi^{-1}(s)\right) = f\left(\frac{s}{r}\right) = \left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right), r\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

es la reparametrización por la longitud de arco.

Observe que

$$\|\overline{f}'(s)\| = \| - r\sin(\frac{s}{r})\frac{1}{r}, r\cos(\frac{s}{r})\frac{1}{r}\| = \| - \sin(\frac{s}{r}), \cos(\frac{s}{r})\| = 1$$

$\forall\ s \in I$, como tenia que ocurrir.

Ejemplo Sea $f(t) = (r\cos t, r\sin t)$, con $r > 0$ se tiene que la parametrización por longitud de arco es:

$$\overline{f}(s) = \left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right), r\sin\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

en este caso

$$\overline{f}'(s) = \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

$$\overline{f}''(s) = \left(-\frac{1}{r}\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\frac{1}{r}\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

por lo que

$$\|\overline{f}''(s)\| = \frac{1}{r}, \quad \forall\ s \in \mathbb{R}$$

Intuitivamente: Si r es muy grande, la curva´está menos curvada y si el r es pequeño la curva esta muy curvada. Ambos hechos estan reflejados en el número

$$\|\overline{f}''(s)\|$$

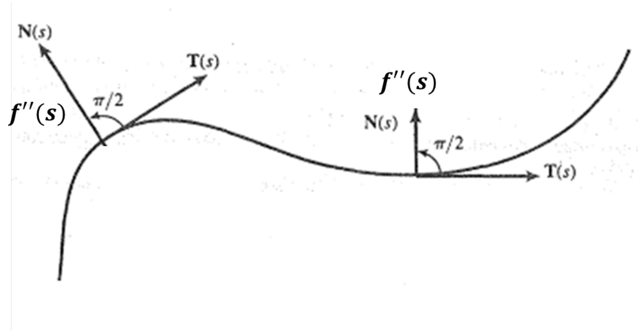
Definición 1. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una reparametrización de una curva $C \subset \mathbb{R}^n$ por longitud de arco tal que $f''(s)$ existe $\forall\ s \in I$. Se define la curvatura de C en el punto $f(s) \in C$ que denotamos por $\kappa(s)$, como*

$$\kappa(s) = \|f''(s)\|$$

Notemos que

$$f'(s) \cdot f''(s) = 0$$

ya que $\|f'(s)\| = 1$, por lo que $f''(s)$ apunta en la dirección normal de la curva



Definición 2. *El vector tangente unitario a C en $f(s)$ es:*

$$T(s) = f'(s)$$

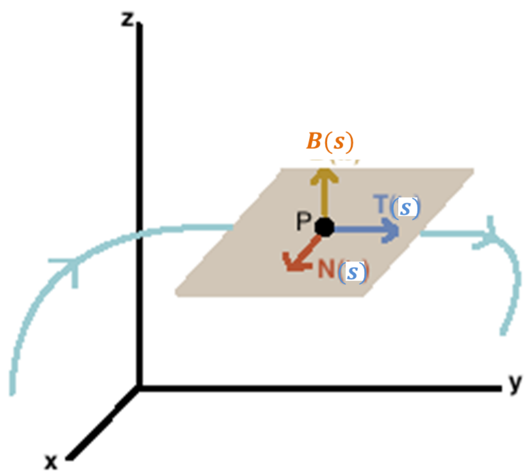
Definición 3. *Si $f''(s) \neq 0$. El vector normal unitario a C en $f(s)$ es:*

$$N(s) = \frac{f''(s)}{\|f''(s)\|}$$

Definición 4. *Si $f''(s) \neq 0$. El plano osculador a C en $f(s)$, el cual denotamos por $\prod_s$, generado por los vectores $T(s)$ y $N(s)$ y que contiene al punto $f(s)$ es:*

$$\prod_s = \{f(s) + \alpha T(s) + \beta N(s) \mid \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}\}$$

El plano osculador es el plano que mejor se adapta a la curva en cada uno de sus puntos. Si la curva es plana, el plano osculador coincide con el plano de la curva.



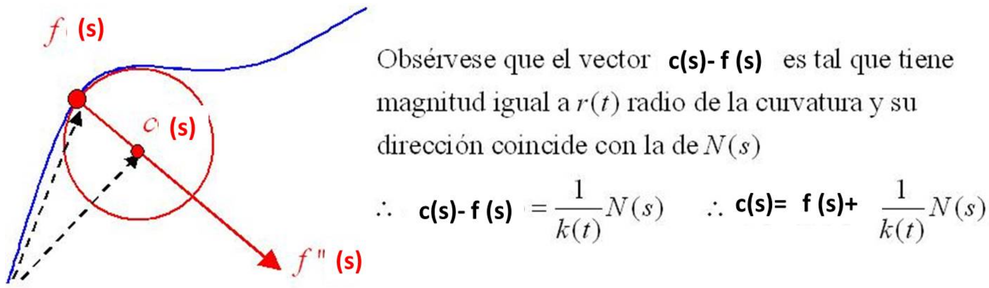
Definición.- El radio de curvatura es $\rho = \frac{1}{k}$ el reciproco de la curvatura, el círculo de curvatura o circulo osculador en un punto P sobre una curva plana donde $k \neq 0$ es el circulo en el plano de la curva que:

i) Es tangente a la curva en P.

ii) Tiene la misma curvaturaque la curva en P.

iii) Se encuentra hacia el lado concavo o interior de la curva.

iv) El radio de la curvatura de la curva P es el radio del círculo de curvatura o círculo osculador.



Asi el centro del círculo osculador (llamado centro de curvatura) debe estar en:

$$c(s) = f(s) + \frac{1}{k(t)}N(s)$$

Definición 5. *Si $f''(s) \neq 0$. El vector binormal unitario a C en $f(s)$ es:*

$$B(s) = T(s) \times N(s)$$

Ejemplo *Reparametrice la hélice $r(t) = \cos t\hat{i} + \sin t\hat{j} + t\hat{k}$ con respecto a la longitud de arco.*

Solución.

$$s = s(t) = \int_0^t \|r^2(t)\|dt = \int_0^t \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + 1}dt = \int_0^t \sqrt{2}\ dt = \sqrt{2}\ t$$

$$\Rightarrow \quad s = \sqrt{2}\ t \quad \textit{Por lo tanto} \quad \frac{s}{\sqrt{2}} = t \quad \textit{y } t \textit{ esta en función de } s.$$

Por lo tanto la parametrización requerida es

$$\bar{r}(t) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$$

y

$$\|\bar{r}'(s)\| = \sqrt{\left[-\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right]^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[\cos^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \sin^2\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\right] + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1 \quad \textit{como tenia que ser.}$$

Vector Tangente

$$T(s) = \frac{f'(s)}{\|f'(s)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Vector Normal

$$N(s) = \frac{T'(s)}{\|T'(s)\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$$

Vector Binormal

$$B(s) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & -\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right) & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{-1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Plano Osculador

$$\prod_{o} = f(s) + \alpha T(s) + \beta N(s)$$

en este caso

$$\prod_{o} = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right) + \alpha\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{1}{\sqrt{2}}\right) +$$

$$\beta\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$$

Centro del circulo osculador

$$f(s) + \frac{1}{k(s)}N(s) = \left(\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), \frac{s}{\sqrt{2}}\right) +$$

$$2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right), -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right), 0\right)$$