El Espacio Euclideo $\mathbb{R}^n$

Definición 1. *Como conjunto, $\mathbb{R}^n$ es la colección de todas las n-adas ordenadas de números reales. Es decir*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n\}$$

Notación. Denotamos a un elemento de $\mathbb{R}^n$ por $\overline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$
Dados dos elementos $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ decimos que $\overline{x} = \overline{y} \Leftrightarrow x_i = y_i\ \forall i = 1, 2, ..., n$
Frecuentemente a los elementos de $\mathbb{R}^n$ se les denomina vectores, y con las operaciones usuales (suma y producto por un escalar) $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial.

Estructura Algebraica

Definición 2. *La suma $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ para dos elementos $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ se define asi:*

$$\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

Definición 3. *Definimos $\overline{0} \in \mathbb{R}^n$ como*

$$\overline{0} = (0, 0, ..., 0)$$

Lema 1. $\forall \quad \overline{a}, \overline{b}, \overline{c} \in \mathbb{R}^n$

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a} \tag{1}$$

$$\left(\overline{a} + \overline{b}\right) + \overline{c} = \overline{a} + \left(\overline{b} + \overline{c}\right) \tag{2}$$

$$\overline{0} + \overline{a} = \overline{a} \tag{3}$$

$$\forall \quad \overline{a} \in \mathbb{R}^n \quad \exists \quad \overline{b} \in \mathbb{R}^n \quad tal \quad que \quad \overline{a} + \overline{b} = \overline{0} \tag{4}$$

Observación.-El elemento $\overline{0}$ es el único elemento de $\mathbb{R}^n$ que se comporta como neutro para la suma. Para cada elemento $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ existe exactamente un elemento $\overline{b} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{a} + \overline{b} = 0$.
A dicho elemento lo denotamos $-\overline{a}$
El producto escalar $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ para $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ se define asi:

$$\lambda \cdot \overline{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$$

Lema 2. $\forall \quad \overline{a}, \overline{b} \in \mathbb{R}^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$$1 \cdot \overline{a} = \overline{a} \tag{5}$$

$$(\lambda + \mu) \cdot \overline{a} = \lambda \cdot \overline{a} + \mu \cdot \overline{a} \tag{6}$$

$$\lambda \cdot \left(\overline{a} + \overline{b}\right) = \lambda \cdot \overline{a} + \lambda \cdot \overline{b} \tag{7}$$

La base canónica de dicho espacio vectorial son los vectores:

$$e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)$$

$$e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$$

.

.

.

$$e_n = (0, 0, 0, ..., 1)$$

ya que si $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, se tiene que $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$

Estructura Geométrica

Para dotar de una estructura geométrica al espacio $\mathbb{R}^n$ (que incluya los conceptos de distancia, ángulo y ortogonalidad) debemos dotar a $\mathbb{R}^n$ de un producto escalar.

Definición 4. *Sea E un espacio vectorial, un **producto escalar** en E es una función de $E \times E$ en $\mathbb{R}$ que a cada par de vectores x, y le asocia un número*

$$\langle x, y\rangle$$

que satisface las siguientes propiedades:
1)$\langle x, x\rangle > 0$ si $x \neq 0$
2) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
3)$\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$
4) $\langle x + y, z\rangle = \langle x + y\rangle + \langle y, z\rangle$

Teorema 1. *La función de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con valores*

$$\langle x, y\rangle = x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

es un producto escalar

Demostración. Tenemos que

$$a) \quad \langle x, x\rangle = x \cdot x = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 > 0 \quad si \quad x \neq 0$$

$$b) \quad \langle x, y\rangle = x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n = y \cdot x = \langle y, x\rangle$$

$$c) \quad \lambda\langle x, y\rangle = \lambda(x \cdot y) = \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = (\lambda x_1y_1 + \lambda x_2y_2 + \cdots + \lambda x_ny_n) =$$

$$([\lambda x_1]y_1 + [\lambda x_2]y_2 + \cdots + [\lambda x_n]y_n) = (\lambda x \cdot y) = \langle \lambda x, y\rangle$$

$$d) \quad \langle x + y, z\rangle = (x + y) \cdot z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) \cdot (z_1, z_2, \cdots z_n) = ((x_1 + y_1)z_1 + (x_2 + y_2)z_2 + \cdots$$

$$+(x_n+y_n)z_n) = x_1z_1+y_1z_1+x_2z_2+y_2z_2+\cdots+x_nz_n+y_nz_n = x_1z_1+x_2z_2+\cdots+x_nz_n+y_1z_1+y_2z_2+\cdots+y_nz_n =$$

$$(x \cdot z) + (y \cdot z) = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$$

□

Ejemplo Si $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ son dos vectores de $\mathbb{R}^2$, definimos $\langle x, y\rangle$ mediante la fórmula

$$\langle x, y\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

El ejemplo anterior pone de manifiesto que pueden existir más de un producto interior en un espacio lineal dado.

Ejemplo Sea $C[a,b]$ el espacio lineal de todas las funciones reales continuas continuas en el intervalo $[a,b]$. Definimos $\langle f,g\rangle$ mediante la fórmula

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt.$$

en este caso

$$\langle f,g\rangle$$

es un producto interior para $C[a,b]$

Desigualdad de Cauchy-Shwarz

Teorema 2. *Sean* $\bar{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ $\quad \bar{y}=(y_1,\ldots,y_n)$ *elementos de* $\mathbb{R}^n$ *entonces*

$$|x_1y_1+\ldots+x_ny_n| \le \sqrt{x_1^2+\ldots+y_n^2}\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}$$

Primero probaremos la desigualdad

$$|x_1||y_1|+\ldots+|x_n||y_n| \le \sqrt{x_1^2+\ldots+y_n^2}\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}$$

lo cual implica la desigualdad deseada ya que

$$|x_1y_1+\ldots+x_ny_n| \le |x_1||y_1|+\ldots+|x_n||y_n|$$

Demostración. Si alguno de los vectores $\bar{x}$ ó $\bar{y}$ es $\bar{0}$ entonces la desigualdad se cumple trivialmente, pues en este caso ambos miembros son 0. Si $\bar{x},\bar{y}\neq 0$ hagamos $\alpha=\sqrt{x_1^2+\ldots+y_n^2}$ $\quad \beta=\sqrt{y_1^2+\ldots+y_n^2}$ usando α y β, la desigualdad a probar se escribe

$$|x_1||y_1|+\ldots+|x_n||y_n| \le \alpha\beta$$

y como $\alpha,\beta>0$ esta desigualdad es equivalente a

$$\left|\frac{x_1}{\alpha}\right|\left|\frac{y_1}{\beta}\right|+\ldots+\left|\frac{x_n}{\alpha}\right|\left|\frac{y_n}{\beta}\right| \le 1$$

Dado que para cualquiera reales a y b se cumple

$$|ab| \le \frac{a^2+b^2}{2}$$

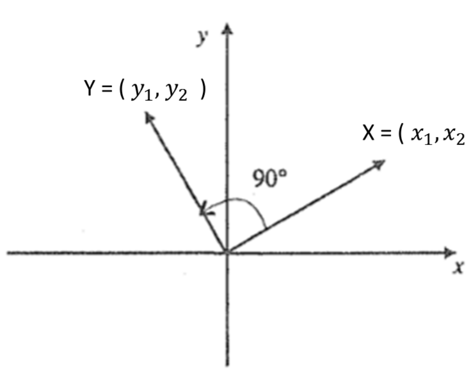
tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\left|\tfrac{x_1}{\alpha}\right|\left|\tfrac{y_1}{\beta}\right|+\ldots+\left|\tfrac{x_n}{\alpha}\right|\left|\tfrac{y_n}{\beta}\right| &\le \frac{\frac{x_1^2}{\alpha^2}+\frac{y_1^2}{\beta^2}}{2}+\ldots+\frac{\frac{x_n^2}{\alpha^2}+\frac{y_n^2}{\beta^2}}{2}\\
&= \frac{\frac{x_1^2+\ldots+x_n^2}{\alpha^2}}{2}+\frac{\frac{y_1^2+\ldots+y_n^2}{\beta^2}}{2}\\
&= \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\\
&= 1
\end{aligned}$$

□

Ortogonalidad

Suponga que $X, Y \in \mathbb{R}^2$ son perpendiculares



Se tiene entonces que la pendiente de X es $\dfrac{x_2}{x_1}$
también la pendiente de Y es $\dfrac{y_2}{y_1}$
La condición de perpendicularidad es

$$\left(\frac{x_2}{x_1}\right)\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = -1 \ \Rightarrow\ x_2 \cdot y_2 = -x_1 \cdot y_1 \ \Rightarrow\ x_2 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_1 = 0 \ \Rightarrow\ X \cdot Y = 0$$

por lo tanto X, Y son perpendiculares si $< x, y >= 0$

El Espacio Normado $\mathbb{R}^n$

Un producto escalar $\langle , \rangle$ en un espacio vectorial E da lugar a una noción de longitud de un vector $x \in E$, llamada su ***norma***, y definida como

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

En general, una ***norma*** en un espacio vectorial E es una aplicación $x \to \|x\|$ de E en $(0, +\infty)$ que satisface las siguientes propiedades:
1)$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $\|\lambda x\| = \lambda\|x\| \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}$
3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad Desigualdad \quad Triangular.$
Al par $(E, \|.\|)$ se le denomina ***espacio normado***

El concepto general de Norma en $\mathbb{R}^n$. Las propiedades de la norma euclidiana nos ayudan para definir la noción abstracta de Norma.

Definición: Una norma en $\mathbb{R}^n$ es cualquier función $\| \, \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades que denominaremos Axiomas de Norma para cualesquiera $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ y toda $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple

i) $\|\bar{x}\| \geq 0 \quad \|0\| = 0$
ii) $\|\alpha\bar{x}\| = |\alpha|\|\bar{x}\|$
iii) $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$
iv) $\|\bar{x}\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 0$

Otras normas en $\mathbb{R}^n$

Definimos $\| \|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $\| \|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Por demostrar $\| \|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^n$

I) Dado que $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0$, se tiene $\| \|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \geq 0 \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

II) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned} \|\alpha\bar{x}\| &= |\alpha x_1| + \ldots + |\alpha x_n| \\ &= |\alpha||x_1| + \ldots + |\alpha||x_n| \\ &= |\alpha|(|x_1| + \ldots + |x_n|) \\ &= |\alpha|\|\bar{x}\| \quad \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

III) Si $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|\bar{x} + \bar{y}\| &= |x_1 + y_1| + \ldots + |x_n + y_n| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + \ldots + |x_n| + |y_n| \\ &= |x_1| + \ldots + |x_n| + \ldots + |y_1| + \ldots + |y_n| \\ &= \|\bar{x}\|_1 + \|\bar{y}\|_1 \end{aligned}$$

Si $\|\bar{x}\|_1 = 0$

$\Rightarrow \quad |x_1| + \ldots + |x_n| = 0$ y como cada $|x_i| \geq 0 \; i = 1, \ldots, n$

entonces $|x_1| + \ldots + |x_n| = 0$

$\Rightarrow \quad |x_i| = 0 \; i = 1, \ldots, n$

$\therefore \quad \bar{x} = 0$