Criterio de Convergencia de Cauchy

Definición 1. *Sea $\{\overline{x_k}\}$ una sucesión de puntos de $\mathbb{R}^n$. Se dice que $\{\overline{x_k}\}$ es una sucesión de Cauchy si dado $\epsilon > 0$ $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\overline{x_k} - \overline{x_l}\| < \epsilon$ $\forall k, l \geq N_0$*

Teorema 1. *Una sucesión $\{\overline{x_k}\} \in \mathbb{R}^n$ es convergenta si y solo si cumple el criterio de Cauchy*

Demostración. $\Rightarrow$ Suponemos que $\{\overline{x_k}\} \to \overline{x}$ $\therefore$ $\|\overline{x_k} - \overline{x}\| < \epsilon$ $\forall k > N_0$. Se tiene entonces que

$$\|\overline{x_k} - \overline{x_l}\| = \|\overline{x_k} - \overline{x} + \overline{x} - \overline{x_l}\| \leq \|\overline{x_k} - \overline{x}\| + \|\overline{x} - \overline{x_l}\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\forall k, l > N_0$ $\therefore$ $\{\overline{x_k}\}$ cumple la condición de Cauchy
$\Leftarrow$ Supongamos que $\{\overline{x_k}\}$ cumple la condición de Cauchy por tanto se tiene que:

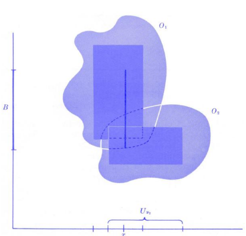
$$\|\overline{x_k} - \overline{x_l}\| < \epsilon \Rightarrow |x_{i,k} - x_{i,l}| < \epsilon \quad \forall i \Rightarrow \{x_{i,k}\} \quad cumple \quad Cauchy$$

$\therefore$ $x_{i,k}$ es convergente $\forall i$ $\therefore$ $\{\overline{x_k}\}$ es convergente □

Teorema 2. *(Bolzano-Wierstrass) Toda sucesión $\overline{x_k}$ en $\mathbb{R}^n$ acotada tiene un punto limite. Dicho de otro modo, toda sucesión en $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente*

Demostración. Sea $\overline{x_k}$ en $\mathbb{R}^n$ suponiendo $\overline{x_k}$ es acotada, entonces cada $x_{i,k}$ es acotada $\therefore$ según el teorema de Bolzano-Wierstrass para sucesiones en $\mathbb{R}$ $\{x_{i,k}\}$ tiene una subsucesión convergente $\alpha_{i,k}$ la cual es una sucesión convergente, $\therefore$ podemos formar la sucesiòn $\overline{x_{\alpha,k}} = \{x_{\alpha,1,k}, x_{\alpha,2,k}, ..., x_{\alpha,n,k}\}$ la cual es una sucesión convergente, pero $\overline{x_{\alpha,k}}$ es subsucesión de $\overline{x_k}$ $\therefore$ $\overline{x_k}$ tiene una subsucesión convergente □

Conjuntos Compactos



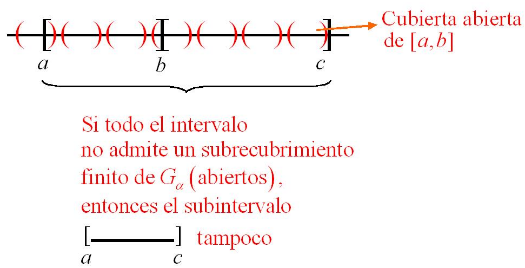
Una colección g de conjuntos abiertos cuya unión contiene a K con frecuencia se llama cubierta de K. De modo que el requisito para que K sea compacto es que toda cubierta g de K se pueda sustituir por una cubierta finita g de K.

Ejemplo Sea $k = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ un subconjunto finito de $\mathbb{R}^n$ si $G = \{G_\alpha\}$ es una colección de abiertos tal que $k \subset \{G_\alpha\}$ y si todo punto de k pertenece a algún subconjunto de $\{G_\alpha\}$ entonces cuando más m subconjuntos de $\{G_\alpha\} \supset k$ $\therefore$ k es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo Considere al subconjunto $H = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Sea $G_n = (-1, n)$ $n \in \mathbb{N}$ de tal manera que $\{G_n | n \in \mathbb{N}\}$ sea una colección de subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}$ cuya union contenga a H. Si $\{G_{n_1}, G_{n_2}, ..., G_{n_k}\}$ es una subcolección finita de $\{G_n | n \in \mathbb{N}\}$. Sea $M = sup\{n_1, n_2, ..., n_k\}$ de tal manera que $G_{n_j} \subseteq G_{n_k}$ de aqui deducimos que G_M es la union de $\{G_{n_1}, G_{n_2}, ..., G_{n_k}\}$. Sin embargo el número real M no pertenece a G_M y por lo tanto no pertenece a $\bigcup_{j=1}^{k} G_{n_j}$. En consecuencia, ninguna unión finita de $\{G_n | n \in \mathbb{N}\}$ puede contener a H $\therefore$ H no es compacto

Ejercicio Demuestrese que todo intervalo cerrado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ es compacto.

Demostración. Supongamos un recubrimiento abierto $[a,b]$ tal que no admite subrecubrimiento finito. Entonces tampoco existe un subrecubrimiento finito para $[a,c]$ $[c;b]$ con c punto medio. Sea $[a_1,b_1]=[a,c]$ el intervalo para el cual no existe el subrecubrimiento finito.
Sea p el punto de intersección y sea U el recubrimiento que contiene a p y sea $[p-\varepsilon,p+\varepsilon]\subset U$.



Siguiendo esta construcción obtenemos una sucesión de intervalos $[a_n,b_n]\supset[a_{n-1},b_{n-1}]$ de longitudes $[b_n,a_n]=\frac{b-a}{2^n}$ tales que ninguno de ellos admite un subrecubrimiento finito.

Entonces existe $r\in\mathbb{N}$ tal que $\forall n>r$, $\frac{b-a}{2^n}<\varepsilon$ y $\forall n\geq r$ $[a_n,b_n]\subset U\underset{\circ}{\bigtriangledown}$ ya que ningun $[a_k,b_k]$ admitía un subrecubrimiento finito. $\square$

Ejemplo Sea $H=(0,1)$ en $\mathbb{R}$. Si $G_n=\{\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\}$ para $n>0$ entonces la colección $\{G_{n_1},G_{n_2},...,G_{n_k}\}$ es una subcolección finita de $\{G_n|n>2\}$. Sea $M=sup\{n_1,...,n_k\}$ de tal manera que $G_{n_j}\subset G_M$ se ifiere que G_M es la unión de $\{G_{n_1},G_{n_2},...,G_{n_k}\}$ sin embargo el número real $\frac{1}{m}$ pertenece a H pero no pertenece a G_M $\therefore$ ninguna subcolección finita de $\{G_n\mid n>2\}$ puede formar una subcolección finita para H $\therefore$ H no es compacto

Compactos por Sucesiones

Teorema 3. *Sea $A\subset\mathbb{R}^n$ tal que para todo recubrimiento abierto $\{A_i\}_{i\in I}$ admite un subrecubrimiento finito es decir $A\subset\bigcup_i^n A_i$ entonces toda sucesión de puntos de A tiene una subsucesión convergente hacia un punto que pertenece a A*

Demostración. Supongamos que exite una sucesión $\overline{x}_n\in A$ que no tuviera una subsucesión convergente (en este caso $\overline{x}_n$ tiene infinitos elementos). Sea $\overline{x}\in A$ como $\lim_{n\to\infty}\overline{x}_n\neq\overline{x}$, existe $\delta_x>0$ tal que en la bola abierta $B(\overline{x},\delta_x)$ solo hay a lo mas un número finito de elementos de $\overline{x}_n$. Entonces la familia de abiertos $\{B(\overline{x},\delta_x)\}$ es un recubrimiento abierto de A; por hipótesis este recubrimiento admite un subrecubrimiento finito $A_{x_1},A_{x_2},...,A_{x_n}$ de estos abiertos. Por lo tanto los infinitos elementos de $\overline{x}_n$ que estan en A pueden ser cubiertos por un número finito de conjuntos abiertos $\underset{\circ}{\bigtriangledown}$ pues cada A_{x_i} cubre a lo mas un número finito de elementos de A. $\square$

Teorema 4. *Si toda sucesión de puntos de A tiene una subsucesión convergente hacia un punto que pertenece a A entonces A es cerrado y acotado*

Demostración. (A es cerrado) Sea $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\overline{a} \in \partial A$ vamos a ver que $\overline{a} \in A$. Como $\overline{a} \in \partial A$ entonces $\forall\ r > 0\ B(\overline{a}, r) \bigcap A \neq \emptyset$ consideremos ahora $r = \dfrac{1}{n}$ y en cada bola abierta $(\overline{a}, \dfrac{1}{n}$ hay algún punto de A al que podemos llamar $\overline{x}_n$ de esta manera construimos una sucesión de puntos de A que convergen a $\overline{a}$ por lo tanto por hipótesis $\overline{a} \in A$ por tanto A es cerrado
(A es acotado) Si A no fuera acotado, existiria una sucesión $\overline{x}_n$ de puntos de A tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{x}_n = \infty$ y este límite no estaría en A $\underset{\circ}{\triangledown}$ por tanto A es acotado $\square$

Teorema 5. Heine-Borel *Todo subconjunto cerrado y acotado es compacto.*

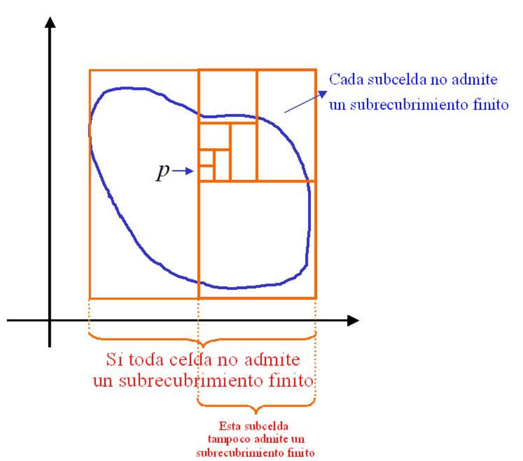
1. K compacto implica que K es cerrado.

   Demostración: Sea $\bar{x} \in K^c$ y sea $G_m = \{y \in \mathbb{R}^n | \|y - x\| > \frac{1}{m}, m \in \mathbb{N}\}$ entonces $y \in ExtB(\bar{x}, \frac{1}{m})$ cada G_m es abierta, la unión de todas las G_m consta de todos los puntos de $\mathbb{R}^n$ excepto x. Dado que $x \in K$ cada punto de K pertenece a algún G_m. Debido a la compacidad de K, se infiere que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \bigcup\limits_{1}^{m} G_i$. Dado que los conjuntos G_m incrementan con $m, K \subset G_m$ de donde la vecindad $\{z \in \mathbb{R}^n | \|z - x\| < \frac{1}{m}\}$ no intercepta a K demostrando que K^c es abierto.
   $\therefore$ K es cerrado.

2. K compacto implica K es acotado.

   Demostración: Sea $H_m = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| < m$ todo el espacio $\mathbb{R}^n$ y por tanto K está contenido en la unión de los conjuntos crecientes, $H_m \quad m \in \mathbb{N}$. Dado que K es compacto existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset H_m$ por lo que K esta acotado.

   Para completar la demostración de este teorema se necesita probar que si K es un subconjunto cerrado y acotado contenido en la unión de una colección $g = \{G_\alpha\}$ de conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$, entonces está contenido en la unión de algún número finito de conjuntos de g.



Dado que K esta acotado, encontramos un punto de acumulación de K, como K es cerrado $y \in K$ y esta en alguna celda abierta, por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que para cada w con $\|y - w\| < \varepsilon$ en la celda abierta y si suponemos que $g = \{G_\alpha\}$ no admite un subrecubrimiento finito llegamos a una contradicción.

Teorema 6. *Si S es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$ entonces S es compacto por sucesiones*

Demostración. Suponga que S es cerrado y acotado, sea $\{x_k\}$ una sucesión de puntos de S, se tiene entonces que S es acotada y por el teorema de Bolzano- Weierstrass $\{x_k\}$ tiene una subsucesión convergente $\{x_{k_\alpha}\}$ tal que $x_{k_\alpha} \to x$ y como S es cerrado $x \in S$

□