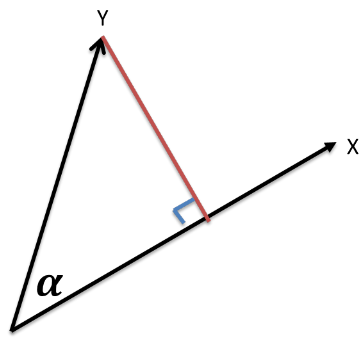
Noción de Ángulo en $\mathbb{R}^n$

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$. Consideremos la proyección ortogonal del vector Y sobre el vector X



Denotemos por u a este vector proyección.
Según la figura debe ocurrir que $U = \lambda X$ para algun $\lambda \in \mathbb{R}$. Tenemos entonces que

$$(Y - u) \cdot X = 0$$

$$\Rightarrow \ (Y - \lambda X \cdot X) = 0$$

$$\Rightarrow \ Y \cdot X - \lambda X \cdot X = 0$$

$$\Rightarrow \ \frac{Y \cdot X}{X \cdot X} = \lambda$$

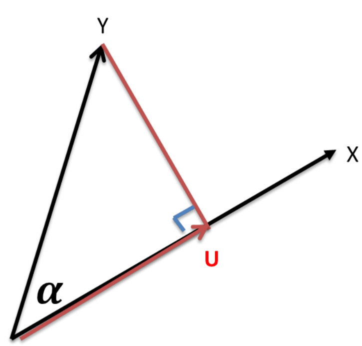
Por lo tanto

$$U = \frac{Y \cdot X}{X \cdot X} X$$

Definición 1. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ (no ortogonales) la proyección ortogonal de Y sobre X es el vector*

$$PR_{y \to x} = \frac{Y \cdot X}{X \cdot X} X$$

Ahora bien tenemos que



según la figura

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha &= \frac{\|u\|}{\|Y\|} \\
\Rightarrow \quad \cos\alpha &= \frac{\left\|\frac{Y\cdot X}{X\cdot X}X\right\|}{\|Y\|} \\
\Rightarrow \quad \cos\alpha &= \frac{\left|\frac{Y\cdot X}{X\cdot X}\right|\|X\|}{\|Y\|} \\
\Rightarrow \quad \cos\alpha &= \frac{(Y\cdot X)\|X\|}{\|X\|^2\|Y\|} \\
\Rightarrow \quad \cos\alpha &= \frac{Y\cdot X}{\|X\|\|Y\|}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{Y\cdot X}{\|X\|\|Y\|}\right)$$

Otras normas en $\mathbb{R}^n$

Definimos $\|\ \|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $\|\ \|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \quad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Por demostrar $\|\ \|_1$ es una norma en $\mathbb{R}^n$

I) Dado que $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad |x| \geq 0$, se tiene $\|\ \|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \geq 0 \quad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$

II) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$
\begin{aligned}
\|\alpha\bar{x}\| &= |\alpha x_1| + \ldots + |\alpha x_n| \\
&= |\alpha||x_1| + \ldots + |\alpha||x_n| \\
&= |\alpha|(|x_1| + \ldots + |x_n|) \\
&= |\alpha|\|\bar{x}\| \quad \forall\, \bar{x} \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

III) Si $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$

$$
\begin{aligned}
\|\bar{x} + \bar{y}\| &= |x_1 + y_1| + \ldots + |x_n + y_n| \\
&\leq |x_1| + |y_1| + \ldots + |x_n| + |y_n| \\
&= |x_1| + \ldots + |x_n| + \ldots + |y_1| + \ldots + |y_n| \\
&= \|\bar{x}\|_1 + \|\bar{y}\|_1
\end{aligned}
$$

Si $\|\bar{x}\|_1 = 0$
$\Rightarrow \quad |x_1| + \ldots + |x_n| = 0$ y como cada $|x_i| \geq 0$ $i = 1, \ldots, n$
entonces $|x_1| + \ldots + |x_n| = 0$
$\Rightarrow \quad |x_i| = 0$ $i = 1, \ldots, n$
$\therefore \quad \bar{x} = 0$

Consideremos ahora la función $\| \|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\| \|_\infty = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$

Proposición.- La función $\| \|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una norma en $\mathbb{R}^n$, que se denomina norma del máximo o norma cúbica.

Demostración :

1. Puesto que $|x_i| \geq 0 \;\; i = 1, \ldots, n$
   entonces
   $$\text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \geq 0$$
   es decir
   $$\|\bar{x}\|_\infty \geq 0$$
2. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Se tiene entonces que
   $$\|\alpha\bar{x}\| = \text{máx}\{|\alpha x_1|, \ldots, |\alpha x_n|\} = \text{máx}\{|\alpha||x_1|, \ldots, |\alpha||x_n|\}$$
   Supongamos ahora que
   $$|x_{i\alpha}| = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$
   $\therefore \quad |x_{i\alpha}| \geq |x_i| \qquad \forall \quad i = 1, \ldots, n$
   $\therefore \quad |\alpha||x_{i\alpha}| \geq |\alpha||x_i| \qquad \forall \quad i = 1, \ldots, n$
   $\therefore \quad |\alpha x_{i\alpha}| \geq |\alpha x_i| \qquad \forall \quad i = 1, \ldots, n$
   por lo que
   $$|\alpha||x_{i\alpha}| = |\alpha x_i| = \text{máx}\{|\alpha x_1|, \ldots, |\alpha x_n|\} = \text{máx}\{|\alpha||x_1|, \ldots, |\alpha||x_n|\}$$
   es decir
   $$|\alpha|\,\text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = \text{máx}\{|\alpha x_1|, \ldots, |\alpha x_n|\} = \text{máx}\{|\alpha||x_1|, \ldots, |\alpha||x_n|\}$$
   $\therefore \quad |\alpha|\|\bar{x}\|_\infty = \|\alpha\bar{x}\|_\infty$
3. $\|\bar{x} + \bar{y}\|_\infty = \text{máx}\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\}$
   Sea
   $$|x_1\alpha + y_1\alpha| \leq \text{máx}\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\}$$
   como
   $$|x_1\alpha + y_1\alpha| \leq |x_1\alpha| + |y_1\alpha|$$
   se tiene que
   $$\text{máx}\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\} \leq |x_1\alpha| + |y_1\alpha|$$
   pero por definición de
   $$\text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \quad \text{máx}\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}$$
   también se tiene que
   $$|x_1\alpha| \leq \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \qquad |y_1\alpha| \leq \text{máx}\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}$$
   luego
   $$\text{máx}\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\} \leq \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} + \text{máx}\{|y_1|, \ldots, |y_n|\}$$
   o sea
   $$\|\bar{x} + \bar{y}\|_\infty \leq \|\bar{x}\|_\infty + \|\bar{y}\|_\infty$$

4. $\|\bar{x}\|_\infty = 0 \quad \Rightarrow \qquad \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = 0$
   sea
   $$|x_\alpha| = \text{máx}\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$
   entonces
   $$|x_\alpha| = 0$$
   $\therefore \quad x_\alpha = 0$
   y como $x_i \leq |x_\alpha| \ \ \forall\ i$ entonces $x = 0$

La relación entre las normas es
$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|$$

Demostración. Sea $|x_k| = \text{máx}\{|x_1, ..., |x_n||\}$
Se tiene entonces
$$|x_k| = \sqrt{x_k^2} \leq \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} = \|x\|$$
$\therefore \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|$
Ahora bien
$$(\|x\|)^2 = (|x_1| + ... + |x_n|)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2 \sum_{i \leq i \leq j \leq n} |x_i||x_j| = (|x_1| + ... + |x_n|)^2 = (\|x\|_1)^2$$
$$\Rightarrow \ \ (\|x\|)^2 \leq (\|x\|_1)^2$$
$$\Rightarrow \ \ \|x\| \leq \|x\|_1$$
También si suponemos que $|x_j| = \text{máx}\{|x_1|, ..., |x_n|\}$ entonces
$$\|x\|_1 = |x_1| + ... + |x_n| \leq |x_j| + ... + |x_j| = n|x_j| = n\,\text{máx}\{|x_1|, ..., |x_j|\} = n\|x\|_\infty$$
por lo que
$$\|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$$
□

Otra relación entre las normas es
$$\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

Demostración. suponemos que $|x_j| = \text{máx}\{|x_1|, ..., |x_n|\}$
Se tiene entonces
$$|x_j| = \sqrt{x_j^2} \leq \sqrt{x_1^2 + ... + x_j^2 + ... + x_n^2} = \|x\|$$
Por tanto
$$\|x\|_\infty \leq \|x\|$$
Por otro lado suponemos que $|x_j| = \text{máx}\{|x_1|, ..., |x_n|\}$ y tenemos
$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_j^2 + ... + x_n^2} \leq \sqrt{x_j^2 + ... + x_j^2 + ... + x_j^2} = \sqrt{n(x_j^2)} = \sqrt{n}\|x\|_\infty$$
por lo tanto
$$\|x\| \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$$
□

Otra relación es

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|$$

Demostración.

$$\|x\|_1 = |x_1| + ... + |x_n| = (1, ..., 1) \cdot (|x_1|, ..., |x_1|) \leq \|(1, ..., 1)\|\|x\| = \sqrt{n}\|x\|$$

por lo tanto

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|$$

□

El Espacio Metrico $\mathbb{R}^n$

El concepto de $\| \ \|$ (norma) nos da una noción de distancia, el tener una noción de distancia en $\mathbb{R}$ o más generalmente en $\mathbb{R}^n$, es lo que nos permite hablar de limite o de convergencia.

Definición 2. *Sea E un espacio vectorial, la función $d : E \times E \to E$ que a cada par de elementos $x, y \in E$ le asocia el número $d(x, y)$ que satisface*
1) $d(x, y) = 0 \ \Leftrightarrow \ x = y$
2) $d(x, y) = d(y, x)$
3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$

Consideremos la noción común de distancia entre dos puntos en $\mathbb{R}^3$.
Si $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \qquad \bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$

$$\|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$$

Esta distancia la denominamos métrica euclidiana y la generalizamos en $\mathbb{R}^n$ en la siguiente definición.

Definición: Sean $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ elementos cualesquiera de $\mathbb{R}^n$ definimos la distancia euclidiana entre ellos como

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{x} - \bar{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$$

La función $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se denomina distancia o métrica euclidiana.

Proposición: Para cualesquiera vectores $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z} \,\epsilon\, \mathbb{R}^n$ se tiene:

I. $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$
II. $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{y}, \bar{x})$
III. $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, \bar{z}) + d(\bar{z}, \bar{y})$
IV. $d(\bar{x}, \bar{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \bar{y}$

Demostración :

1. Como $d(x, y) = \|\bar{x} - \bar{y}\| \geq 0$ entonces $d(\bar{x}, \bar{y}) \geq 0$ tambien si $d(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{x} - \bar{y}\| = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \bar{y}$

2. $d(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\| = \|\bar{x}-\bar{y}\| = \|\bar{y}-\bar{x}\| = d(\bar{y},\bar{x})$
3. $d(\bar{x},\bar{y}) = \|\bar{x}-\bar{y}\| = \|\bar{x}-\bar{z}+\bar{z}-\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-\bar{z}\| + \|\bar{z}-\bar{y}\| = d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y})$

Métrica discreta.- Demostrar que la metrica definida por $d(a,b) = \begin{cases} 0 & a=b \\ 1 & a\neq b \end{cases}$ satisface los axiomas de métrica

Demostración :

1. Sean $a,b\,\epsilon\,\mathbb{R}^n$ entonces $d(a,b)=1$ ó $d(a,b)=0$ $\therefore$ $d(a,b)\geq 0$
2. Sean $a,b\,\epsilon\,\mathbb{R}^n$ Si $\bar{a}\neq\bar{b}$ $d(\bar{a},\bar{b})=1$ y si $\bar{b}\neq\bar{a}$ $d(b,a)=1$ $\therefore$ $d(a,b)=1=d(b,a)$
   Ahora bien si $a=b$ entonces $d(a,b)=0 \overset{*}{=} d(b,a)$
   * Si $a=b$ entonces $b=a$ por lo tanto $d(b,a)=0$
3. Sean $\bar{a},\,\bar{b},\,\bar{c}\,\epsilon\,\mathbb{R}^n$ $\bar{a}\neq\bar{b}\neq\bar{c}$
   $d(\bar{a},\bar{b})=1$, $d(\bar{b},\bar{c})=1$ y
   $$d(\bar{a},\bar{c})=1$$
   $\therefore$ $d(a,c)=1\leq 1+1=d(a,b)+d(b,c)$